Courbe de Bézier en Terminale, Spécialité de Mathématiques

L. GARNIER

Extrait du B. O. n° 27 du 7 juillet 2022.

> Approfondissements possibles :
>
> ➢ Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points.
>
> Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie.
>
> ➢ Fonction vectorielle de Leibniz.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan muni du repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$.

Exercice 1 *:*

B_0, B_1 et B_2 désignent les polynômes de Bernstein de degré 2 :

$$B_0(t) = (1-t)^2 \quad , \quad B_1(t) = 2\,t\,(1-t) \quad , \quad B_2(t) = t^2$$

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de $\mathcal{P}$. Une courbe de Bézier polynomiale quadratique est définie, pour $t \in [0;1]$, quel que soit le point Ω, par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\Omega M(t)} = B_0(t)\,\overrightarrow{\Omega P_0} + B_1(t)\,\overrightarrow{\Omega P_1} + B_2(t)\,\overrightarrow{\Omega P_2} \qquad (1)$$

1. *Montrer que $M(t)$ est le barycentre des points P_0, P_1 et P_2 dont on précisera les poids.*
2. *Soit $N_1(t)$ le barycentre des points pondérés $(P_0;1-t)$ et $(P_1;t)$. Soit $N_2(t)$ le barycentre des points pondérés $(P_1;1-t)$ et $(P_2;t)$. Quel est le lien entre $M(t)$ et les points $N_1(t)$ et $N_2(t)$?*
3. *Soit $P_0(-4;0)$, $P_1(0;4)$ et $P_2(4;0)$.*
   (a) *Construire les points $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $M(t)$ pour $t \in \left\{\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right\}$;*
   (b) *Donner l'équation cartésienne de la parabole verticale $\mathtt{P}$ passant par les points P_0, $M\left(\frac{1}{2}\right)$ et P_2.*
   (c) *Montrer que les points $M(t)$ vérifient l'équation cartésienne de la parabole $\mathtt{P}$.*

(d) *Déterminer l'équation de la tangente* Δ_1 *à la parabole* $\mathtt{P}$ *au point* P_0*. Déterminer l'équation de la tangente* Δ_2 *à la parabole* $\mathtt{P}$ *au point* P_2*.*

(e) *Déterminer le point d'intersection des droites* Δ_1 *et* Δ_2*. Que peut-on en conclure ?*

(f) *Pour* $t = \frac{1}{2}$*, est-il possible de construire plus rapidement le point* $M\left(\frac{1}{2}\right)$ *? Quelle est la nature de la droite* $\left(M\left(\frac{1}{2}\right)P_1\right)$ *dans le triangle* $P_0P_1P_2$ *?*

   i. *Soit* $Q(t)$ *les points de la courbe de Bézier de points de contrôle* P_0*,* $N_1\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* $M\left(\frac{1}{2}\right)$*. Quel est le lien entre* $M\left(\frac{1}{4}\right)$ *et* $Q\left(\frac{1}{2}\right)$ *?*

   ii. *Soit* $R(t)$ *les points de la courbe de Bézier de points de contrôle* $M\left(\frac{1}{2}\right)$*,* $N_2\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* P_2*. Quel est le lien entre* $M\left(\frac{3}{4}\right)$ *et* $R\left(\frac{1}{2}\right)$ *?*

   iii. *A partir des questions 3(f)i et 3(f)ii, expliquer comment construire récursivement des points de la courbe de Bézier donnée par la formule (1).*

---

1. Prenons $\Omega = M(t)$ dans la formule (1), nous obtenons :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{M(t)\,M(t)} = B_0(t)\,\overrightarrow{M(t)\,P_0} + B_1(t)\,\overrightarrow{M(t)\,P_1} + B_2(t)\,\overrightarrow{M(t)\,P_2} \tag{2}$$

et $M(t)$ est le barycentre des points pondérés $(P_0; B_0(t))$, $(P_1; B_1(t))$ et $(P_2; B_2(t))$.

2. Le barycentre $N_1(t)$ des points pondérés $(P_0; 1-t)$ et $(P_1; t)$ est défini par :

$$\overrightarrow{\Omega N_1(t)} = (1-t)\,\overrightarrow{\Omega P_0} + t\overrightarrow{\Omega P_1}$$

Le barycentre $N_2(t)$ des points pondérés $(P_1; 1-t)$ et $(P_2; t)$ est défini par :

$$\overrightarrow{\Omega N_2(t)} = (1-t)\,\overrightarrow{\Omega P_1} + t\overrightarrow{\Omega P_2}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega M(t)} &= (1-t)^2\,\overrightarrow{\Omega P_0} + 2t(1-t)\,\overrightarrow{\Omega P_1} + t^2\overrightarrow{\Omega P_2} \\
&= \left((1-t)^2\,\overrightarrow{\Omega P_0} + t(1-t)\,\overrightarrow{\Omega P_1}\right) + \left(t(1-t)\,\overrightarrow{\Omega P_1} + t^2\overrightarrow{\Omega P_2}\right) \\
&= (1-t)\left((1-t)\,\overrightarrow{\Omega P_0} + t\overrightarrow{\Omega P_1}\right) + t\left((1-t)\,\overrightarrow{\Omega P_1} + t\overrightarrow{\Omega P_2}\right) \\
&= (1-t)\,\overrightarrow{\Omega N_1(t)} + t\,\overrightarrow{\Omega N_2(t)}
\end{aligned}$$

donc $M(t)$ est le barycentre des points pondérés $(N_1(t); 1-t)$ et $(N_2(t); t)$. Cette méthode de construction est due à Paul Faget De Casteljau.

3. Soit $P_0(-4; 0)$, $P_1(0; 4)$ et $P_2(4; 0)$.

(a) Construire les points $M(t)$, $N_1(t)$ et $N_2(t)$ pour $t \in \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\}$. On prend $\Omega = O$, origine du repère. Le calcul revient alors à faire une moyenne pondérée par coordonnée avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ON_1(t)} = (1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1} \\ \overrightarrow{ON_2(t)} = (1-t)\overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{OP_2} \\ \overrightarrow{OM(t)} = (1-t)\overrightarrow{ON_1(t)} + t\,\overrightarrow{ON_2(t)} \end{cases}$$

i. Pour $t = \frac{1}{4}$, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ON_1\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OP_0} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP_1} \\ \overrightarrow{ON_2\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP_2} \\ \overrightarrow{OM\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ON_1\left(\frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{ON_2\left(\frac{1}{4}\right)} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} N_1\left(\frac{1}{4}\right)(-3;1) \\ N_2\left(\frac{1}{4}\right)(1;3) \\ M\left(\frac{1}{4}\right)\left(-2;\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

La figure 1 montre les points $N_1\left(\frac{1}{4}\right)$, $N_2\left(\frac{1}{4}\right)$ et $M\left(\frac{1}{4}\right)$.

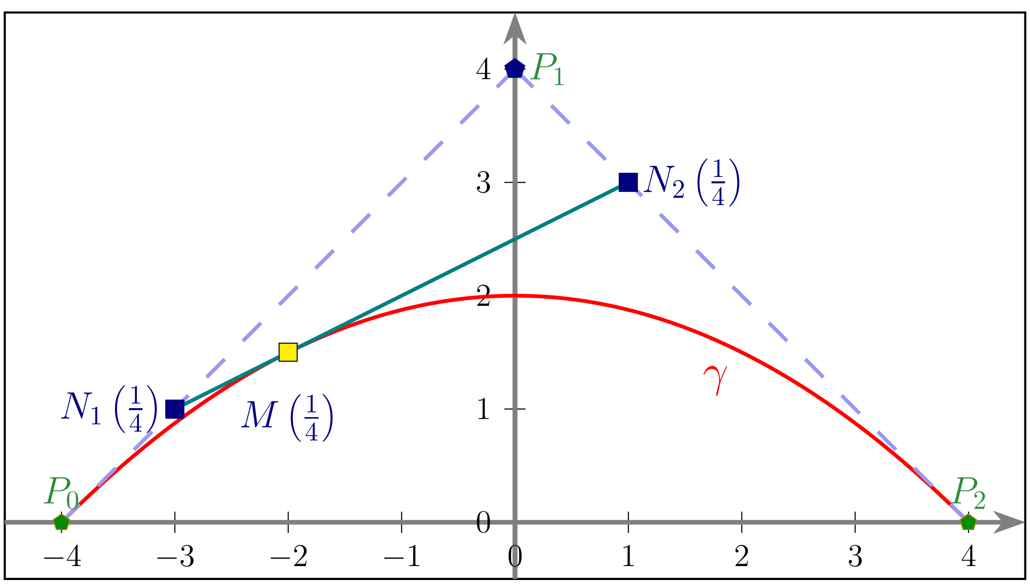

FIGURE 1 – Construction du point $M\left(\frac{1}{4}\right)$ d'une courbe de Bézier polynomiale γ de points de contrôle P_0, P_1 et P_2.

ii. Pour $t = \frac{1}{2}$, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ON_1\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_0} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_1} \\ \overrightarrow{ON_2\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_1} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_2} \\ \overrightarrow{OM\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{ON_1\left(\dfrac{1}{2}\right)} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{ON_2\left(\dfrac{1}{2}\right)} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} N_1\left(\dfrac{1}{2}\right)(-2;2) \\ N_2\left(\dfrac{1}{2}\right)(2;2) \\ M\left(\dfrac{1}{2}\right)(0;2) \end{cases}$$

La figure 2 montre les points $N_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $N_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et $M\left(\frac{1}{2}\right)$.

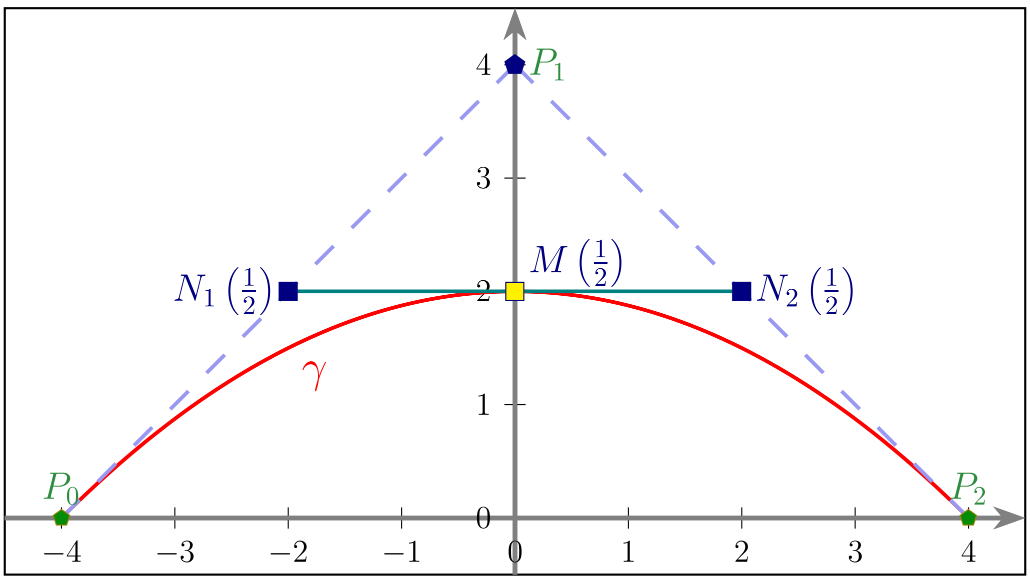

Figure 2 – Construction du point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ d'une courbe de Bézier polynomiale γ de points de contrôle P_0, P_1 et P_2.

iii. Pour $t = \frac{3}{4}$, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ON_1\left(\dfrac{3}{4}\right)} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{OP_0} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{OP_1} \\ \overrightarrow{ON_2\left(\dfrac{3}{4}\right)} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{OP_1} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{OP_2} \\ \overrightarrow{OM\left(\dfrac{3}{4}\right)} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{ON_1\left(\dfrac{3}{4}\right)} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{ON_2\left(\dfrac{3}{4}\right)} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} N_1\left(\dfrac{1}{4}\right)(-1;3) \\ N_2\left(\dfrac{1}{4}\right)(3;1) \\ M\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(2;\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

La figure 3 montre les points $N_1\left(\frac{3}{4}\right)$, $N_2\left(\frac{3}{4}\right)$ et $M\left(\frac{3}{4}\right)$.

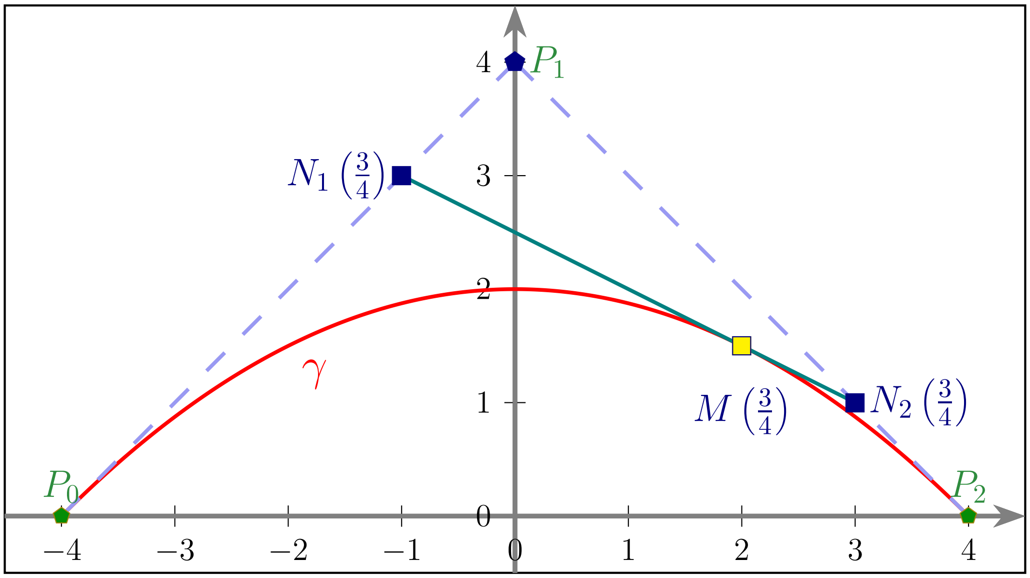

FIGURE 3 – Construction du point $M\left(\frac{3}{4}\right)$ d'une courbe de Bézier polynomiale γ de points de contrôle P_0, P_1 et P_2.

(b) L'équation cartésienne de la parabole verticale `P` passant par les points P_0, $M\left(\frac{1}{2}\right)$ et P_2 est de la forme :

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Or, $M\left(\dfrac{1}{2}\right)(0;2)$ d'où :

$$\gamma = 2$$

Les points P_0 et P_2 sont sur l'axe des abscisses et symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, donc :

$$\beta = 0$$

Pour P_0, nous avons :

$$0 = \alpha\left(-4\right)^2 + 2$$

d'où :

$$\alpha = -\frac{1}{8}$$

L'équation cartésienne de la parabole verticale `P` est :

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$$

(c) Pour les points $M(t)$, nous avons˜ :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x & = & (1-t)^2 \times -4 & + & 2t(1-t) \times 0 & + & t^2 \times 4 \\ y & = & (1-t)^2 \times 0 & + & 2t(1-t) \times 4 & + & t^2 \times 0 \end{array}\right.$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x & = & (1-2t+t^2) \times -4 & + & & + & t^2 \times 4 \\ y & = & & & 8t(1-t) & & \end{array}\right.$$

c'est-à-dire˜ :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & -4(1-2t) & & \\ y & = & 8t(1-t) & = & 8t-8t^2 \end{array}\right.$$

Or :

$$-\frac{1}{8}x^2+2 = -\frac{1}{8} \times 16\left(1-4t+4t^2\right)+2 = -2+8t-8t^2+2 = 8t-8t^2 = y$$

et les coordonnées de $M(t)$ vérifient l'équation cartésienne de la parabole $\mathtt{P}$.

(d) Soit f la fonction définie par :

$$x \longmapsto -\frac{1}{8}x^2+2$$

Nous avons :

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x$$

et l'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \tag{3}$$

Pour le point P_0, nous avons $x_0 = -4$ et l'équation de la formule (3) devient :

$$y = 1 \times (x-(-4))+0$$

c'est-à-dire que l'équation de Δ_1 est :

$$y = x+4 \tag{4}$$

Pour le point P_2, nous avons $x_0 = 4$ et l'équation de la formule (3) devient :

$$y = -1 \times (x-4)+0$$

c'est-à-dire que l'équation de Δ_2 est :

$$y = -x+4 \tag{5}$$

(e) A partir des équations (4) et (5), nous obtenons $x = 0$ d'où $y = 4$.
Le point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_2 est le point P_1.
La courbe de Bézier de point de contrôle P_0, P_1 et P_2 est un arc de parabole, d'extrémités P_0 et P_2 et le point P_1 dirige les tangentes en P_0 et en P_2.

(f) Pour $t = \frac{1}{2}$, nous avons :

$$B_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\ , \quad B_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ , \quad B_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

et le point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ est la barycentre des points $\left(P_0; \frac{1}{4}\right)$, $\left(P_1; \frac{1}{2}\right)$, et $\left(P_2; \frac{1}{4}\right)$.
Soit I le barycentre des points $\left(P_0; \frac{1}{4}\right)$ et $\left(P_2; \frac{1}{4}\right)$. I est le milieu du segment $[P_0P_2]$ et a un poids de $\frac{1}{2}$. Ainsi, $M\left(\frac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $[P_1I]$, figure 4.

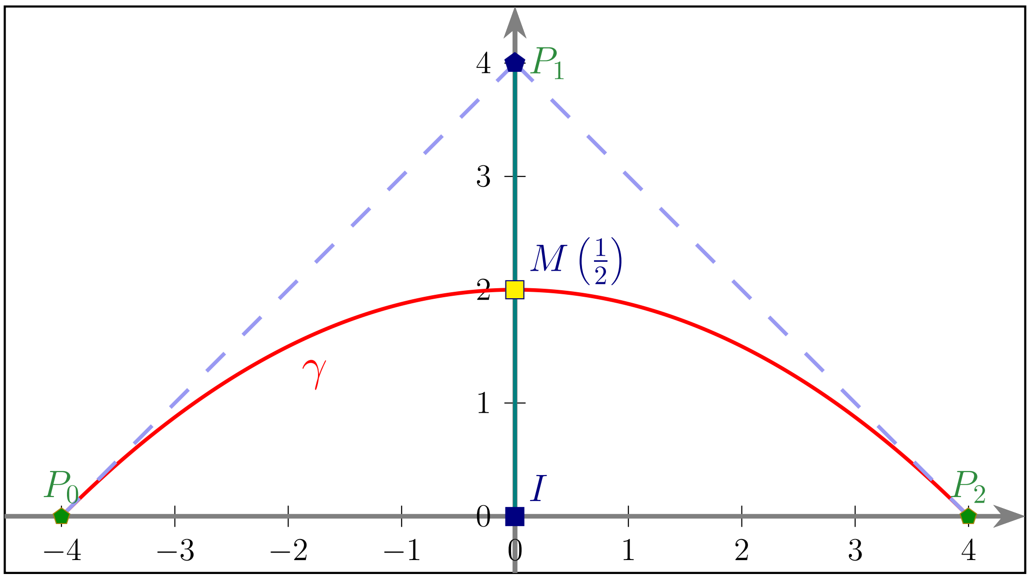

FIGURE 4 – Construction du point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ en utilisant des milieux.

La droite $\left(M\left(\frac{1}{2}\right)P_1\right)$ est une médiane du triangle $P_0P_1P_2$ est $M\left(\frac{1}{2}\right)$ est le milieu du sommet P_1 et du pied I de la médiane.

i. En reprenant la question 3f, soit I_1 le milieu de $\left[P_0M\left(\frac{1}{2}\right)\right]$. Nous avons $I_1(-2; 1)$.
Le point $Q\left(\frac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $\left[N_1\left(\frac{1}{2}\right)I_1\right]$. Nous avons $Q\left(\frac{1}{2}\right)\left(-2; \frac{3}{2}\right)$.
Les points $M\left(\frac{1}{4}\right)$ et $Q\left(\frac{1}{2}\right)$ sont confondus.

ii. En reprenant la question 3f, soit I_2 le milieu de $\left[M\left(\frac{1}{2}\right)P_2\right]$. Nous avons $I_2(2; 1)$.
Le point $R\left(\frac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $\left[I_2N_2\left(\frac{1}{2}\right)\right]$. Nous avons $R\left(\frac{1}{2}\right)\left(2; \frac{3}{2}\right)$
Les points $M\left(\frac{3}{4}\right)$ et $R\left(\frac{1}{2}\right)$ sont confondus.

iii. A partir des questions 3(f)i et 3(f)ii, nous pouvons nous intéresser juste à la construction des points pour $t = \frac{1}{2}$ et faire des constructions itératives, algorithme 1, illustré par la figure 5.

Algorithme 1 : Méthode de De Casteljau avec des milieux.

Entrée : Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de $\mathcal{P}$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

```
//Definition de la fonction
```

`Fonction DeCasteljau`$(P_0,\, P_1,\, P_2,\, n)$

1. Soit N_1 le milieu de $[P_0P_1]$;
2. Soit N_2 le milieu de $[P_1P_2]$;
3. Soit N_3 le milieu de $[N_1N_2]$;
4. Tracer N_3 ;
5. Si $n > 0$ alors `DeCasteljau`$(P_0,\, N_1,\, N_3,\, n-1)$;
6. Si $n > 0$ alors `DeCasteljau`$(N_3,\, N_2,\, P_2,\, n-1)$.

```
Fin fonction DeCasteljau
//Appel de la fonction
```

`DeCasteljau`$(P_0,\, P_1,\, P_2,\, n_0)$

Sortie : Des points d'une courbe de Bézier polynomiale de points de contrôle P_0, P_1 et P_2.

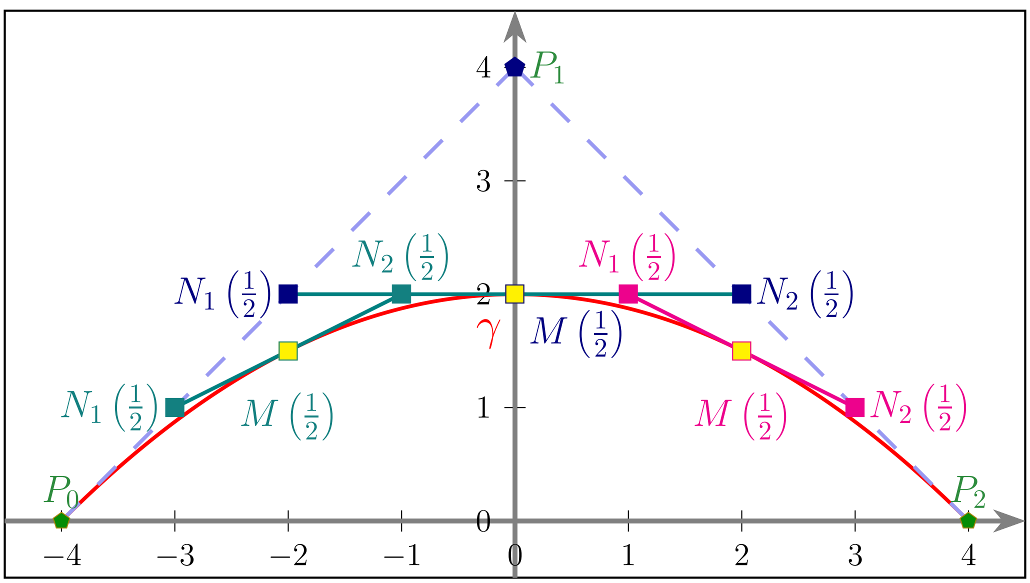

FIGURE 5 – Algorithme de De Casteljau récursif. Le premier tracé est en bleu foncé. Les points obtenus lors de la première itération, point 5 de l'algorithme 1, sont en vert tandis que ceux construits lors de la seconde itération, point 6 de l'algorithme 1, sont en magenta.

La figure 6 montre les constructions effectuées à l'aide du logiciel de géométrie dynamique Kig.

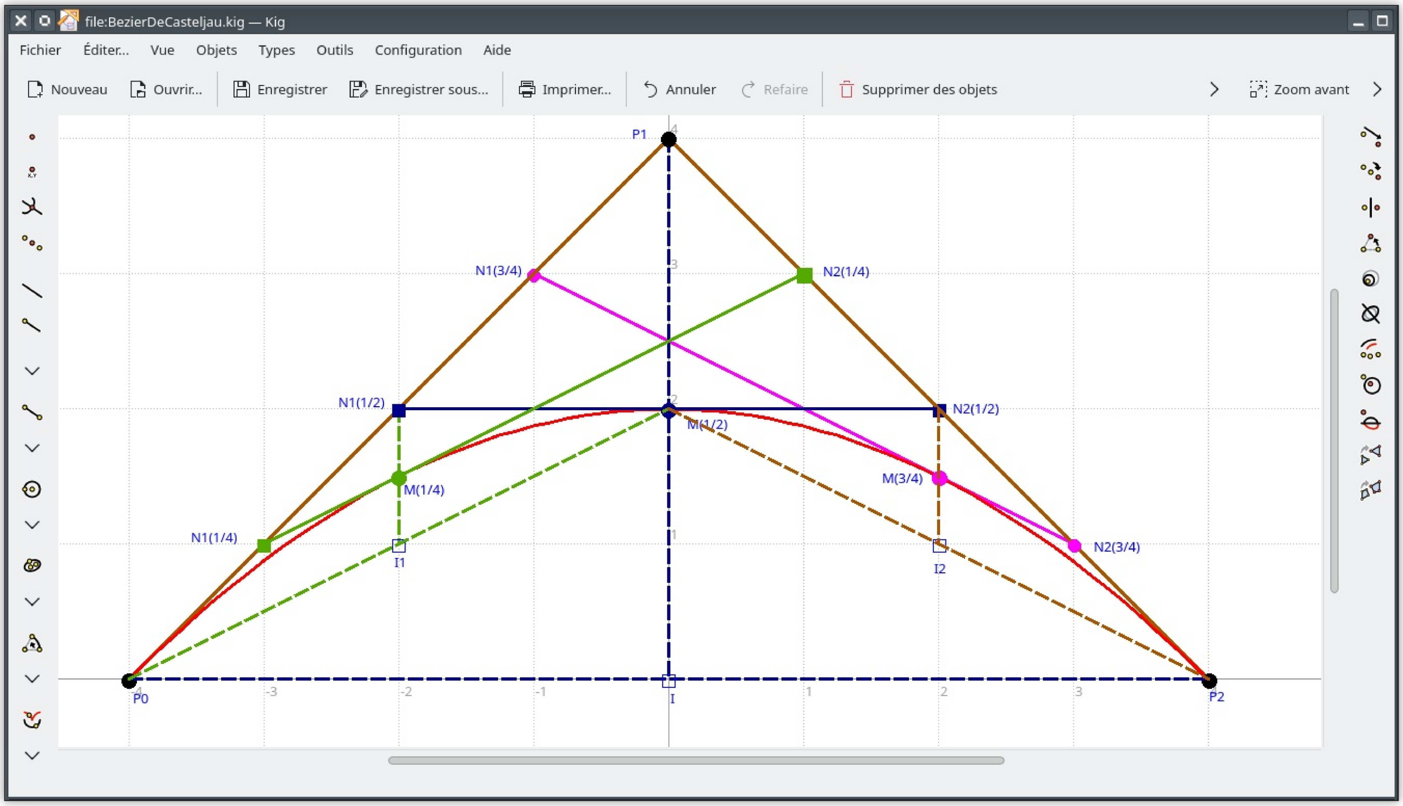

FIGURE 6 – Constructions avec Kig.