CONJECTURE DE COLLATZ

LE CAS 1X+1

APPROCHE EN BINAIRE

LA PREMIÈRE PREUVE SUR STHAM

par : Anonyme Machine de Moore

Énoncé du problème:

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $(U_0) \in \mathbb{N}$, telle que:

$(U_{n+1}) = 1(U_n) + 1$ si (U_n) est impair.
$(U_{n+1}) = (U_n)/2$ si (U_n) est pair.

Pour $(U_0) = 0$, quelque soit n : $(U_n) = 0$.
La conjecture de Collatz affirme que quelque soit l'entier naturel non nul N choisi pour (U_0), il existe alors un rang j tel que $(U_j) = 1$.
On dira qu'un entier naturel vérifie la conjecture de Collatz s'il vérifie la suite (U_n) définie précédemment.

Introduction :

La conjecture de Collatz, le cas 3X+1 est extrêmement difficile à démontrer. Pour attaquer ce problème, il semble sage d'étudier ou chercher les variantes faciles. Une variante facile est le cas 1X+1, qui par chance se démontre facilement en binaire. Je profite de ce fil pour laisser une démonstration mathématique dans cette sous-section STHAM. Malheureusement, cette méthode ne permet pas de traiter le cas 3X+1. Une méthode pour résoudre le cas 3X+1 doit également fonctionner pour le cas 1X+1 mais pas applicable pour le cas 5X+1. En effet, le cas 5X+1 obtient un cycle pour $(U_0) = 5$ et donne semble-t-il un départ grandissant sans fin pour $(U_0) = 7$. Les cas 7X+1, 9X+1, 11X+1 semblent hors de portée.

Méthode :

On représente les entiers naturels sous forme binaire naturel.
Ils sont rangés en blocs de bits de taille k avec $k \in \mathbb{N}-\{0\}$.

Ainsi,

Pour k=1 le [BLOC(1)] est représenté par 0 et 1.
Pour k=2 le [BLOC(2)] est représenté par 10 et 11.
Pour k=3 le [BLOC(3)] est représenté par 100, 101, 110, 111.
Pour k=4 le [BLOC(4)] est représenté par 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111.

Voici de manière génerale, pour une taille de $k \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ bits, le [BLOC(k)] dont la représentation sera:

10...0000 avec k bits
10...0001
10...0010
10...0011
10...0100
10...0101
10...0110
10...0111
...
11...1110
11...1111

On va utiliser un raisonnement par récurrence.

On note (H) l'hypothèse de récurrence qui porte sur k : Tout entier naturel N appartenant à l'ensemble $\mathbb{N}-\{0,1\}$ avec k bits fixé sur $\mathbb{N}-\{0,1\}$, présent dans le [BLOC(k)], vérifie la conjecture de Collatz.

(H) : La propriété P(k) $\Leftrightarrow$ [Pour tout N élément de $\mathbb{N}-\{0,1\}$ à k bits fixé sur $\mathbb{N}-\{0,1\}$, N est un élément du [BLOC(k)] et vérifie la conjecture de Collatz].

(H) : La propriété P(k) $\Leftrightarrow$ [[BLOC(k)] = [BLOC(k)$pair$]$\cup$[BLOC(k)$impair$] avec k bits fixé sur $\mathbb{N}-\{0,1\}$, vérifie la conjecture de Collatz].

Début du raisonnement par récurrence :

La propriété P(k) doit se vérifier pour k = 2.

On vérifie à la main que le [BLOC(2)] vérifie bien la conjecture de Collatz:

Pour $(U_0) = 10$ on obtient $(U_1) = (U_0)/2$ soit $(U_1) = 1$.
Pour $(U_0) = 11$ on obtient $(U_1) = 1(U_0)+1$ soit $(U_1) = 100$, puis $(U_2) = (U_1)/2$ soit finalement $(U_2) = 10$ qui a déjà été vérifié.

L′initialisation est vérifiée pour $k = 2$.

On suppose la propriété P(k) *vraie* pour k fixé sur $\mathbb{N}-\{0,1\}$.

On démontre l'hérédité : P(k) $\Rightarrow$ P(k+1).

On représente [BLOC(k+1)] = [BLOC(k+1)*pair*]$\cup$[BLOC(k+1)*impair*]

Comme [BLOC(k+1)*pair*] est pair, $(U_n)/2$ appliqué une fois au [BLOC(k+1)*pair*] donne exactement le [BLOC(k)] qui représente l'hypothèse de récurrence vérifiant la conjecture. Par conséquent, on a bien montré que le [BLOC(k+1)*pair*] avec k+1 bits vérifie la conjecture de Collatz.

Conclusion : Tous les éléments pairs du [BLOC(k+1)]vérifient la conjecture de Collatz.

On représente le premier élement du [BLOC(k+1)*impair*]:

Il s′écrit: 1000...0000...0001 avec (k+1)bits.
On aura donc (U_0) = 1000...0000...0001 avec (k+1)bits.
Une itération $1(U_0)+1 = (U_1)$ = 1000...0000...0010 avec (k+1)bits.

On remarque ainsi, que tous les entiers impairs du [BLOC(k+1)*impair*], sauf pour le dernier, donne après une itération l′entier *suivant* qui est un entier pair du [BLOC(k+1*pair*)], vérifiant la conjecture de Collatz.

On représente le dernier élement du [BLOC(k+1)*impair*]:

Il s′écrit: 1111...1111...1111 avec (k+1)bits.
On aura donc (U_0) = 1111...1111...1111 avec (k+1)bits.
Une intération $1(U_0)+1 = (U_1)$=1000...0000...00000 avec (k+2)bits.
Or cet entier vérifie trivialement la conjecture de Collatz, car c′est une puissance de deux.

Conclusion : Tout le [BLOC(k+1)*impair*] vérifie donc la conjecture de Collatz.

On en déduit que :
Tout élément du [BLOC(k+1)] = [BLOC(k+1)*pair*]$\cup$[BLOC(k+1)*impair*] avec (k+1) bits, vérifie la conjecture de Collatz.

Finalement d'après l'hypothèse de récurrence :

[BLOC(k)] = [BLOC(k)*pair*]∪[BLOC(k)*impair*] supposée *vraie*.

On obtient :

[BLOC(k+1)] = [BLOC(k+1)*pair*]∪[BLOC(k+1)*impair*] *vrai*.

On a bien montré que : P(k) ⇒ P(k+1).

Conclusion : La propriété est vraie pour P(2) et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout k appartenant à $\mathbb{N}-\{0,1\}$.

Fin de la récurrence.

Pour tout k appartenant à $\mathbb{N}-\{0,1\}$, le [BLOC(k)] vérifie la conjecture de Collatz, lorsque k parcourt $\mathbb{N}-\{0,1\}$, les [BLOC(k)] mis bout à bout représentent les entiers naturels vérifiant la conjecture de Collatz sur $\mathbb{N}-\{0,1\}$.
La conjecture de Collatz est donc vérifiée sur $\mathbb{N}-\{0,1\}$.
D'autre part, puisque la conjecture de Collatz est vérifiée pour $(U_0) = 0$, quelque soit n : $(U_n) = 0$ et que pour $(U_0) = 1$ la suite (U_n) donne le cycle 2 - 1, on a montré que la conjecture de Collatz est vérifiée sur $\mathbb{N}$.

La *conjecture de Collatz* est ainsi démontrée pour le cas 1X+1 ■

Théorème :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $(U_0) \in \mathbb{N}$, telle que:

$(U_{n+1}) = 1(U_n) + 1$ si (U_n) est impair.
$(U_{n+1}) = (U_n)/2$ si (U_n) est pair.

Pour $(U_0) = 0$, quelque soit n : $(U_n) = 0$.
Quelque soit l'entier naturel non nul N choisi pour (U_0), il existe un rang j tel que $(U_j) = 1$.

Références :

Est-il possible de démontrer Syracuse avec un système binaire ?
`https://les-mathematiques.net/vanilla/discussion/2334569/est-il-possible-de-demontrer-syracuse-avec-un-systeme-binaire`
Texmaker

binaire10111011010@gmail.com

30 Janvier 2023