A propos d'une identité de Ramanujan

$$\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{19}\right) = \sqrt{2(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{7^2})(1-\frac{1}{11^2})(1-\frac{1}{19^2})}$$

(source : ***villemin****.gerard.free.fr/Esprit/Ramanuja.htm)*

Cette identité concerne les trois entiers 7, 11 et 19.
Existe-t-il d'autres triplets de nombres entiers vérifiant une telle identité ?

Cette identité peut s'écrire aussi :

$$(1+\frac{1}{7})^2(1+\frac{1}{11})^2(1+\frac{1}{19})^2 = 2(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{7^2})(1-\frac{1}{11^2})(1-\frac{1}{19^2})$$

ou bien, puisque $(1 - 1/n^2) = (1 + 1/n)(1 - 1/n)$ :

$$\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{19}\right)/(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{19}) = 2(1-\frac{1}{3^2})$$

ou encore $\quad (7+1)(11+1)(19+1)/(7-1)(11-1)(19-1) = 2(1-\frac{1}{3^2})$

On remarque que le triplet (7, 11, 19) est de la forme ($n = 2k+1$, $p = 3k+2$, $q = 6k+1$) avec $k = 3$.

Or, l'égalité suivante est valide pour tout nombre k réel si n, p et q sont tels que définis ci-dessus :

$$\frac{(n+1)(p+1)(q+1)}{(n-1)(p-1)(q-1)} = \frac{(2k+2)(3k+3)(6k+2)}{(2k)(3k+1)(6k)} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{k}\right)^2$$

$$= \frac{(k+1)^2(k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{(k^2-1)(k+1)}{k^2(k-1)} = \left(1-\frac{1}{k^2}\right).\frac{k+1}{k-1}$$

On retrouve effectivement l'identité de Ramanujan, car pour k = 3, on a bien $(k+1)/(k-1) = 2$. Il n'y a d'ailleurs que deux valeurs entières naturelles de k pour lesquelles $(k+1)/(k-1)$ est un entier :
avec k = 3 : $(1+1/k)^2 = 2(1-1/k^2)$ ou $(k+1)/(k-1) = 2$
avec k = 2 : $(1+1/k)^2 = 3(1-1/k^2)$ ou $(k+1)/(k-1) = 3$

Donc pour tout entier naturel k, il existe un triplet T(k) correspondant de nombres (n = 2k+1, p = 3k+2, q = 6k+1) qui vérifient une égalité du type de celle de Ramanujan.

On peut classer ces triplets selon le nombre de nombres premiers qu'ils comportent et selon la parité de k : quand k est impair, un triplet est de la classe $T^0$ s'il comporte deux nombres premiers, cas le plus fréquent, du moins pour k assez petit ; quand k est pair, p = 3k + 2 l'est aussi, et un triplet est de la classe $T^0$ s'il comporte un seul nombre premier, cas le plus fréquent, du moins pour k assez petit ; et l'exposant de la classe donne, à partir de cette valeur d'origine, 2 ou 1 selon que k est impair ou pair, le nombre de nombres premiers du triplet, soit 0, 1, 2 ou 3.
Dans la table suivante, les nombres premiers sont soulignés.

| | Classe (k impair) | Classe (k pair) |
|---|---|---|
| pour k = 1, le triplet ($\underline{3}$, $\underline{5}$, $\underline{7}$) | $T^{0+1}$ | |
| pour k = 2, le triplet ($\underline{5}$, 8, $\underline{13}$) | | $T^{0+1}$ |
| pour k = 3, le triplet ($\underline{7}$, $\underline{11}$, $\underline{19}$) | $T^{0+1}$ | |
| pour k = 4, le triplet (9, 14, 25) | | $T^{0-1}$ |
| pour k = 5, le triplet ($\underline{11}$, $\underline{17}$, $\underline{31}$) | $T^{0+1}$ | |
| pour k = 6, le triplet ($\underline{13}$, 20, $\underline{37}$) | | $T^{0+1}$ |
| pour k = 7, le triplet (15, $\underline{23}$, $\underline{43}$) | $T^0$ | |
| pour k = 8, le triplet ($\underline{17}$, 26, 49) | | $T^0$ |
| pour k = 9, le triplet ($\underline{19}$, $\underline{29}$, 55) | $T^0$ | |
| pour k = 10, le triplet (21, 32, $\underline{61}$) | | $T^0$ |
| pour k = 11, le triplet ($\underline{23}$, 35, $\underline{67}$) | $T^0$ | |
| pour k = 12, le triplet (25, 38, $\underline{73}$) | | $T^0$ |
| pour k = 13, le triplet (27, $\underline{41}$, $\underline{79}$) | $T^0$ | |
| pour k = 14, le triplet ($\underline{29}$, 44, 85) | | $T^0$ |
| pour k = 15, le triplet ($\underline{31}$, $\underline{47}$, 91) | $T^0$ | |
| pour k = 16, le triplet (33, 50, $\underline{97}$) | | $T^0$ |
| pour k = 17, le triplet (35, $\underline{53}$, $\underline{103}$) | $T^0$ | |
| pour k = 18, le triplet ($\underline{37}$, 56, $\underline{109}$) | | $T^{0+1}$ |
| pour k = 19, le triplet (39, $\underline{59}$, 115) | $T^{0-1}$ | |
| pour k = 20, le triplet ($\underline{41}$, 62, 121) | | $T^0$ |
| pour k = 21, le triplet ($\underline{43}$, 65, $\underline{127}$) | $T^0$ | |
| pour k = 22, le triplet (45, 68, 133) | | $T^{0-1}$ |

| | | |
|---|---|---|
| pour k = 23, le triplet ($\underline{47}$, $\underline{71}$, $\underline{139}$) | $T^{0+1}$ | |
| pour k = 24, le triplet (49, 64, 145) | | $T^{0-1}$ |
| pour k = 25, le triplet (51, 77, $\underline{151}$) | $T^{0-1}$ | |
| pour k = 26, le triplet ($\underline{53}$, 80, $\underline{157}$) | | $T^{0+1}$ |
| pour k = 27, le triplet (55, $\underline{83}$, $\underline{163}$) | $T^{0}$ | |
| pour k = 28, le triplet (57, 86, 169) | | $T^{0-1}$ |
| pour k = 29, le triplet ($\underline{59}$, $\underline{89}$, 175) | $T^{0}$ | |
| pour k = 30, le triplet ($\underline{61}$, 92, $\underline{181}$) | | $T^{0+1}$ |
| pour k = 31, le triplet (63, 95, 187) | $T^{0-2}$ | |
| pour k = 32, le triplet (65, 98, $\underline{193}$) | | $T^{0}$ |
| pour k = 33, le triplet ($\underline{67}$, $\underline{101}$, $\underline{199}$) | $T^{0+1}$ | |
| pour k = 34, le triplet (69, 104, 205) | | $T^{0-1}$ |
| pour k = 35, le triplet ($\underline{71}$, $\underline{107}$, $\underline{211}$) | $T^{0+1}$ | |
| pour k = 36, le triplet ($\underline{73}$, 110, 217) | | $T^{0}$ |
| pour k = 37, le triplet (75, $\underline{113}$, $\underline{223}$) | $T^{0}$ | |
| pour k = 38, le triplet (77, 116, $\underline{229}$) | | $T^{0}$ |
| pour k = 39, le triplet ($\underline{79}$, 119, 235) | $T^{0-1}$ | |
| pour k = 40, le triplet (81, 122, $\underline{241}$) | | $T^{0}$ |
| pour k = 41, le triplet ($\underline{83}$, 125, 247) | $T^{0-1}$ | |
| pour k = 42, le triplet (85, 128, 253) | | $T^{0-1}$ |
| pour k = 43, le triplet (87, $\underline{131}$, 259) | $T^{0-1}$ | |
| pour k = 44, le triplet ($\underline{89}$, 134, 265) | | $T^{0}$ |
| pour k = 45, le triplet (91, $\underline{137}$, $\underline{271}$) | $T^{0}$ | |
| pour k = 46, le triplet (93, 140, $\underline{277}$) | | $T^{0}$ |
| pour k = 47, le triplet (95, 143, $\underline{283}$) | $T^{0-1}$ | |
| pour k = 48, le triplet ($\underline{97}$, 146, 289) | | $T^{0}$ |
| pour k = 49, le triplet (99, $\underline{149}$, 295) | $T^{0-1}$ | |
| pour k = 50, le triplet ($\underline{101}$, 152, 301) | | $T^{0}$ |
| pour k = 51, le triplet ($\underline{103}$, 155, $\underline{307}$) | $T^{0}$ | |
| pour k = 52, le triplet (105, 158, $\underline{313}$) | | $T^{0}$ |
| pour k = 53, le triplet ($\underline{107}$, 161, 319) | $T^{0-1}$ | |
| pour k = 54, le triplet ($\underline{109}$, 164, 325) | | $T^{0}$ |

On remarque que ces triplets sont ainsi constitués :
Les nombres n sont l'ensemble complet des impairs, les nombres p sont alternativement pairs et impairs, et les nombres q sont tous impairs, mais les deux ensembles des nombres p et q sont disjoints. En effet, la relation $6k + 1 = 3k' + 2$ nécessite $k' = 2k - 1/3$, ce qui est impossible puisque k et k′,

par définition, sont des nombre entiers. Donc, aucun des éléments de l'ensemble des nombres p ne figure dans l'ensemble des nombres q et réciproquement.

On remarque que, pour k inférieur ou égal à 54, il y a, pour k impair :
- six triplets de trois nombres premiers (classe $T^{0+1}$) : T(1), T(3), T(5), T(23), T(33) et T(35),
- douze triplets comportant deux nombres premiers (classe $T^{0}$),
- huit triplets comportant un seul premier (classe $T^{0-1}$) : T(19), T(25), T(39), T(41), T(43), T(47), T(49) et T(53),
- et un seul triplet, T(31), sans nombre premier (classe $T^{0-2}$) ;

et pour k pair :
- cinq triplets comportant deux nombres premiers (classe $T^{0+1}$) : T(2), T(6), (T18), T(26), et T(30),
- seize triplets comportant deux nombres premiers (classe $T^{0}$),
- et six triplets sans nombre premier (classe $T^{0-1}$) : T(4), T(22), T(24), T(28), T(34) et T(42).

Il y a ainsi 28 triplets ordinaires ($T^{0}$), soit à peu près la moitié : 16 avec k pair et 12 avec k impair.

La réunion des ensembles disjoints de nombres p et q contient tous les nombres premiers (sauf 2 et 3, bien entendu), puisque tous les nombres premiers sont de forme 6k+1 ou 6k–1, cette dernière étant équivalente à 3k+2 car tout nombre congru à 5 (c'est-à-dire à –1) modulo 6 est congru à 2 modulo 3.
On en déduit que tout nombre premier (sauf 2 et 3) fait partie de deux triplets : dans l'un, c'est un nombre n, et dans l'autre, c'est un nombre p ou q.

Mais tout ceci a-t-il un tant soit peu d'intérêt ?

On peut présenter les choses autrement, et cela mène un peu loin …

Puisque l'ensemble des nombres n coïncide avec celui des entiers impairs, on peut associer à tout entier n impair le doublet de nombres (p, q) défini comme suit :
n = 2k+1 => k = (n – 1)/2, d'où p = 3k + 2 = (3n + 1)/2 et q = 6k + 1 = 3n – 2.

L'égalité générale

$$\frac{(n+1)(p+1)(q+1)}{(n-1)(p-1)(q-1)} = \frac{(2k+2)(3k+3)(6k+2)}{(2k)(3k+1)(6k)} = (1+\frac{1}{k})^2 = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).\frac{k+1}{k-1}$$

devient alors une identité, car

$$\frac{(n+1)(p+1)(q+1)}{(n-1)(p-1)(q-1)} = \frac{(n+1)[(3n+1)+2](3n-1)}{(n-1)[(3n+1)-2](3n-3)} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2$$

et

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2$$

On peut donc écrire l'égalité initiale sous la forme

$$\frac{(p+1)(q+1)}{(p-1)(q-1)} = \frac{n+1}{n-1}$$

et l'on peut ainsi associer, aux entiers n impairs supérieurs à 1, des doublets de nombres, notés D(n), comme suit :
D(3) = (5, 7)  D(5) = (8, 13)  D(7) = (11, 19)  D(9) = (14, 25)
et donc, si D(n) = (p, q), D(n′=n+2) = (p′=p+3, q′=q+6).

La relation entre n, p et q est encore vérifiée pour ces nouvelles valeurs :

$$\frac{(p'+1)(q'+1)}{(p'-1)(q'-1)} = \frac{n'+1}{n'-1}$$

Il vient en effet :

$$\frac{(p+4)(q+7)}{(p+2)(q+5)} = \frac{(3n+1+8)(3n+5)}{(3n+1+4)(3n+3)} = \frac{3n+9}{3n+3} = \frac{n+3}{n+1} = \frac{n+2+1}{n+2-1}$$

En fait, cette relation d'égalité entre les nombres n, p et q est tout à fait générale dès que p et q sont tels que définis plus haut à partir de n : elle est vérifiée pour n'importe quel nombre, de quelque nature que ce soit. Par exemple, avec $n = \sqrt{5}$, $p = (3\sqrt{5} + 1)/2$ et $q = 3\sqrt{5} - 2$, et l'on obtient

$$\frac{(p+1)(q+1)}{(p-1)(q-1)} = \frac{\left(3\sqrt{5}+3\right)\left(3\sqrt{5}-1\right)}{\left(3\sqrt{5}-1\right)\left(3\sqrt{5}-3\right)} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{n+1}{n-1}$$

Donc à tout nombre x, on peut associer $p(x) = (3x + 1)/2$ et $q(x) = 3x - 2$, qui vérifient

$$\frac{(p(x)+1)(q(x)+1)}{(p(x)-1)(q(x)-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

On peut encore généraliser davantage ce résultat, en remplaçant 1 par un nombre quelconque y : à tout couple de nombres (x, y), même complexes, on peut associer $u(x,y) = (3x + y)/2$ et $v(x,y) = 3x - 2y$, et l'on peut écrire

$$\frac{(u(x,y)+y)(v(x,y)+y)}{(u(x,y)-y)(v(x,y)-y)} = \frac{(3x+3y)(3x-y)}{(3x-y)(3x-3y)} = \frac{x+y}{x-y}$$

Mais on peut écrire cette égalité encore autrement, en remarquant que
$u(x,y) = (3x + y)/2 = x + (x + y)/2 = x + s/2$ avec $s = x + y$
$v(x,y) = 3x - 2y = x + 2d$ avec $d = x - y$
On obtient alors l'identité suivante :

$$\frac{(x+s/2+y)(x+2d+y)}{(x+s/2-y)(x+2d-y)} = \frac{(3s/2)(s+2d)}{(d+s/2)(3d)} = \frac{s}{d} = \frac{x+y}{x-y}$$

Ce que l'on peut encore écrire

$$\frac{(x+y+s/2)(x+y+2d)}{(x-y+s/2)(x-y+2d)} = \frac{(s+s/2)(s+2d)}{(d+s/2)(d+2d)} = \frac{s}{d} = \frac{x+y}{x-y}$$

On peut donc dire que pour tout couple de nombres x et y, les quantités s/2 et 2d, leur demi-somme et le double de leur différence, constituent un couple conjugué qui, par addition de chacun d'eux à l'un des deux termes, au numérateur comme au dénominateur, du carré du rapport de leur somme et de leur différence, rend ce carré égal au rapport lui-même. C'est assez curieux, je trouve …

Mais en fait, on peut en dire autant de tout couple (s/k, kd) ou (ks, d/k) où k est un nombre quelconque !

$$\frac{(x+y+s/k)(x+y+kd)}{(x-y+s/k)(x-y+kd)} = \frac{(s+s/k)(s+kd)}{(d+s/k)(d+kd)} = \frac{k(s+s/k)}{(d+kd)} = \frac{s}{d} = \frac{x+y}{x-y}$$

Car si l'on prend les choses à l'envers, autrement dit, si, étant donné deux nombres a et b, on cherche un couple (x, y) tel que

$$\frac{(a+b+x)(a+b+y)}{(a-b+x)(a-b+y)} = \frac{a+b}{a-b}$$

on trouve la condition suivante :

$$[(a+b)^2 + (a+b)(x+y) + xy](a-b) = [(a-b)^2 + (a-b)(x+y) + xy](a+b)$$

Soit, en posant a + b = s et a – b = d :

$$[s^2 + s(x+y) + xy](d) = [d^2 + d(x+y) + xy](s)$$

et donc $ds^2 + dxy = sd^2 + sxy$

soit $ds.(s - d) = xy.(s - d)$

et finalement $xy = sd$

ce qui est vérifié par x = s/k, y = kd, ainsi que par x = ks, y = d/k, et ce, quel que soit k, ou 1/k, dans les deux cas.

Maintenant, toute la question est de savoir à quoi peuvent bien servir tous ces petits jeux d'écriture …