**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1972

**EXERCICE 1**

Étudier la fonction numérique, de la variable réelle $x$, définie par

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\text{Log}\left|2\text{e}^x - 1\right|.$$

On pourra écrire

$$2\text{e}^x - 1 = 2\text{e}^x\left(1 - \frac{1}{2}\text{e}^{-x}\right).$$

Construire, dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant les variations de cette fonction (on tracera les asymptotes de cette courbe).

**EXERCICE 2**

À chaque nombre complexe $z = x + \text{i}y$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
Trouver l'équation de l'ensemble, E, des points $M(z)$ tels que les points

$$M(z), \quad M'\left(z^2\right) \quad \text{et } M''\left(z^5\right)$$

soient alignés.
Étudier et dessiner l'ensemble E.

**PROBLÈME**

Le plan affine, $\mathcal{P}$, est rapporté au repère cartésien $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
Le nombre $\lambda$ étant un réel donné, on considère l'application $f_\lambda$ qui au point $m$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ fait correspondre le point $M$ dont les coordonnées $(X\,;\,Y)$ sont

$$X = x + (\lambda - 1)y \quad \text{et} \quad Y = 2x + (\lambda - 2)y.$$

**Partie A**

1. Déterminer les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $f_\lambda$ est bijective.
   Déterminer, quand elle existe, $f_\lambda^{-1}$, application réciproque de $f_\lambda$, en donnant les coordonnées de $m$ en fonction de celles de $M$.
   Existe-t-il des valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $f_\lambda$ est involutive ?
   Déterminer, suivant les valeurs de $\lambda$, l'ensemble des points invariants par $f_\lambda$
2. Quelle est la nature géométrique de $f_1$ ?
3. Dans cette question on étudie $f_0$.
   Déterminer l'ensemble, $(\Delta)$, des points $M$ de $\mathcal{P}$, tels qu'il existe au moins un point $m$ tel que $f_0(m) = M \in (\Delta)$.
   Un point $M$ de $(\Delta)$ étant fixé, déterminer l'ensemble des points $m$ tels que $f_0(m) = M$.
   Montrer que $f_0$ est la composée d'une projection et d'une homothétie, que l'on déterminera .

**Partie B**

On pose $f_\lambda^2 = f_\lambda \circ f_\lambda$ et, pour tout entier $n$ supérieur à 2, $f_\lambda^n = f_\lambda \circ f_\lambda^{n-1}$.

**1.** $k$ étant un nombre réel donné, quel est l'ensemble des transformés par $f_\lambda^n$ des points de la droite $(D_k)$ d'équation $y = x + k$?

**2.** Soit $\mathrm{A}_0$ le point de coordonnées $(1\,;\,0)$. On pose $\mathrm{A}_1 = f_\lambda(\mathrm{A}_0)$ et, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $\mathrm{A}_n = f_\lambda^n(\mathrm{A}_0)$.
Montrer, par récurrence, que les coordonnées $\left(x_n\,;\,y_n\right)$ de $\mathrm{A}_n$ sont, pour tout entier naturel non nul $n$, de la forme

$$x_n = 2u_n(\lambda) + (-1)^n \quad \text{et} \quad y_n = 2u_n(\lambda),$$

$u_n(\lambda)$ étant un polynôme en $\lambda$ de degré $(n-1)$.
Préciser la relation qui existe entre $u_n(\lambda)$ et $u_{n+1}(\lambda)$.
En déduire que, si $\lambda \neq -1$, $u_n(\lambda) = \dfrac{\lambda^n - (-1)^n}{\lambda + 1}$.
Étudier le cas où $\lambda = -1$.