Mathématiques en devenir

102. — Patrice Tauvel. *Corps commutatifs et théorie de Galois.* Troisième édition revue et bonifiée

107. — Henri Lombardi & Claude Quitté. *Algèbre commutative. Méthodes constructives.* Nouvelle édition revue et augmentée

109. — Grégory Berhuy. *Modules : théorie, pratique… et un peu d'arithmétique.* Nouvelle édition

112. — Gema-Maria Díaz-Toca, Henri Lombardi & Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs*

114. — Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*

115. — François Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann*

117. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier* (nouveau tirage)

119. — Alain Debreil, Jean-Denis Eiden, Rached Mneimné et Tuong-Huy NGuyen. *Formes quadratiques et géométrie*

120. — Christian Leruste. *Topologie algébrique – Une introduction, et au-delà*

121. — Grégory Berhuy. *Algèbre : le grand combat.* Nouvelle édition

122. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second* (nouveau tirage)

123. — Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson*

124. — Pascal Boyer. *Petit compagnon des nombres et de leurs applications*

128. — Gentiana Danila, Jean-Denis Eiden et Rached Mneimné. *Algèbre éclectique*

130. — Ibrahim Assem. *Introduction au langage catégorique*

131. — Ahmed Lesfari. *Courbes algébriques complexes et/ou Surfaces de Riemann compactes*

132. — François Rouvière. *Les transformations de Radon. Cinq leçons de géométrie intégrale* (à paraître)

133. — Patrice Tauvel. *Algèbre linéaire. Échappée décisive dans un territoire splendide* (à paraître)

Ahmed Lesfari

Courbes algébriques complexes et/ou Surfaces de Riemann compactes

Calvage & Mounet

Ahmed lesfari est docteur d'état de l'université de Louvain et Professeur au département de mathématiques de l'université Chouaïb Doukkali, El Jadida, au Maroc. Ses activités de recherche concernent entre autres l'interaction entre les systèmes intégrables et la géométrie complexe.

lesfariahmed@yahoo.fr

Mathematics Subject Classification (2020):

14-XX Algebraic geometry
- 14H15 Families, moduli of curves (analytic)
- 14H40 Jacobians, Prym varieties
- 14H42 Theta functions and curves ; Schottky problem
- 14H45 Special algebraic curves and curves of low genus
- 14H52 Elliptic curves
- 14H55 Riemann surfaces ; Weierstrass points ; gap sequences
- 14H70 Relationships between algebraic curves and integrable systems

30-XX Functions of a complex variable
- 30FXX Riemann surfaces
  - 30F10 Compact Riemann surfaces and uniformization
  - 30F20 Classification theory of Riemann surfaces
  - 30F30 Differentials on Riemann surfaces

32-XX Several complex variables and analytic spaces
- 32AXX Holomorphic functions of several complex variables
- 32DXX Analytic continuation
  - 32G15 Moduli of Riemann surfaces

ISBN 978-2-493230-06-5

9 782493 230065

∞ Imprimé sur papier permanent

À El Rhalia, Reda, Hicham et Imad

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux étudiants de troisième année de licence de mathématiques ainsi qu'aux étudiants de master et même au-delà. Il a pour but de présenter plusieurs aspects importants concernant les courbes algébriques complexes ou surfaces de Riemann compactes, l'une des plus belles théories en mathématique. Les sujets traités dans ce livre sont des objets d'une extraordinaire richesse du fait de leur implication dans plusieurs recherches anciennes et récentes comme par exemple la théorie moderne des systèmes intégrables. L'étude est faite avec une approche de géométrie complexe, les méthodes utilisées sont analytiques, topologiques, algébriques et géométriques.

Le livre se subdivise en douze chapitres. Le but du chapitre I est de donner quelques résultats sur les fonctions de plusieurs variables complexes ainsi que sur les variétés analytiques complexes. Bien que le livre porte sur les surfaces de Riemann compactes qui sont des variétés de dimension 1 complexe, nous avons jugé bon de rappeler quelques notions sur des variétés de dimension supérieure, à la fois pour leur intérêt propre et parce que cela conduit à clarifier un certain nombre de résultats obtenus dans cet ouvrage. Il est préférable de les passer en première lecture et de se borner à les consulter au moment de l'usage. Dans le chapitre II, on étudie les courbes algébriques (projectives lisses) ou surfaces de Riemann compactes X. Ce sont des variétés analytiques de dimension 1 complexe (2 réelle) munies d'atlas dont les changements de cartes sont holomorphes. On montre que X est homéomorphe à un tore à g trous (ou sphère à g anses) pour un certain entier $g \geqslant 0$. Le nombre g est le genre de X. Ce chapitre consiste à faire une étude géométrique et topologique des surfaces de Riemann compactes. Un cas particulier important est représenté par les courbes hyperelliptiques de genre g ainsi que les courbes elliptiques ($g = 1$). Nous construisons le plus intuitivement possible la surface de Riemann dans le cas elliptique et hyperelliptique. On aborde, dans le chapitre III, l'étude des différentielles abéliennes, les relations bilinéaires de Riemann ainsi que la matrice des périodes. De nombreux résultats importants concernant ces thèmes seront démontrés, comme par exemple le fait que le genre de X est le nombre des intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe X, linéairement indépendants. Le chapitre IV sera consacré à l'étude des diviseurs et des fonctions méromorphes sur les surfaces de Riemann compactes. Dans le chapitre V, on étudie un théorème central : le théorème de Riemann-Roch. Il permet de définir le genre d'une surface de Riemann, qui en est un invariant fondamental. Il s'agit d'un théorème d'existence efficace qui permet, entre autres, de déterminer le nombre de fonctions méromorphes linéairement indépendantes ayant certaines restrictions sur leurs pôles. Le but ici est de donner une preuve élémentaire constructive bien qu'un peu technique et nous mentionnons aussi quelques conséquences de ce théorème. Le but du chapitre VI est de donner une preuve analytique de la formule de Riemann-Hurwitz. Cette dernière exprime le genre d'une surface de Riemann à l'aide du nombre de ses points de ramification et du nombre de ses feuillets. On montre que cette formule fournit un moyen efficace pour déterminer le genre d'une surface de Riemann donnée. Dans le chapitre VII, deux théorèmes importants de nature transcendante sont étudiés en détail. Le premier, dû à Abel, classifie les diviseurs par leurs images dans la variété jacobienne (tore complexe algébrique) tandis que le second dû à Jacobi (problème d'inversion de Jacobi) porte sur l'existence d'un diviseur qui soit l'image inverse d'un point arbitraire sur la variété jacobienne. On aborde, dans le chapitre VIII, l'étude des fonctions et intégrales elliptiques. On étudie la fonction $\wp$ de Weierstrass ; c'est une fonction elliptique d'ordre 2 qui admet un pôle double à l'origine en tout point du parallélogramme fondamental. On introduit aussi les deux autres fonctions de Weierstrass : la fonction ζ et la fonction σ. Contrairement à la fonction $\wp$, la fonction ζ est une fonction méromorphe avec un pôle simple dans le parallélogramme fondamental tandis que la fonction σ est une fonction holomorphe partout. Les fonctions de Weierstrass interviennent souvent lors de la résolution de problèmes théoriques. On étudie ensuite les fonctions de Jacobi. Ce sont des fonctions elliptiques du second ordre qui ont deux pôles simples dans le parallélogramme des périodes. Ces fonctions interviennent souvent lors de la résolution de problèmes pratiques et on les appliquera à titre d'exemple à l'étude du pendule simple ainsi que la résolution des équations d'Euler du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Le chapitre IX est consacré à l'étude des fonctions thêta sur les surfaces de Riemann X de genre g. On montre comment exprimer les fonctions méromorphes en termes de fonctions thêta sur le tore complexe de dimension 1, c'est-à-dire sur les courbes elliptiques. En outre, on aborde l'étude des fonctions méromorphes et leurs relations avec les fonctions thêta dans le cas des surfaces de Riemann de genre $g > 1$. Les zéros d'une fonction thêta sur $\mathbb{C}^g$ forment une sous-variété de $\mathrm{Jac}(X)$ de dimension $g-1$ appelée diviseur thêta. Elle est invariante par un nombre fini de translations et peut être singulière. Lorsque l'on plonge la surface de Riemann X dans sa variété jacobienne Jac(X) via l'application d'Abel, alors soit son image est entièrement incluse dans le diviseur thêta, soit elle la rencontre en exactement g points. Certaines fonctions singulières sur la surface de Riemann X de genre g, possédant g pôles et des singularités essentielles, jouent un rôle important dans l'étude des systèmes intégrables, notamment les équations de Korteweg-de Vries, Kadomtsev-Petviashvili, etc., dont les solutions exactes sont des solitons. On exprime ces fonctions connues sous le nom de fonctions de Baker-Akhiezer en termes de fonctions thêta et en même temps on prouve leur existence. Il est bien connu que les solutions de nombreux systèmes intégrables sont données en termes de fonctions thêta associées à des surfaces de Riemann compactes. Nous verrons dans ce chapitre de nombreux exemples et exercices d'applications. L'objectif du chapitre X est d'étudier quelques notions sur l'espace des modules des surfaces de Riemann et le problème de Schottky. Soit $\mathcal{M}_g$ l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre g, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isomorphie de surfaces de Riemann compactes de genre g. On montre que la sphère est la seule surface de Riemann de genre 0. En revanche, pour $g \geqslant 1$, l'espace $\mathcal{M}_g$ est indénombrable et sa dimension est égale à $3g-3$ pour $g \geqslant 2$. Autrement dit, ces surfaces dépendent de $3g-3$ paramètres complexes pour $g \geqslant 2$ et d'un seul paramètre pour $g = 1$. Pour $g \geqslant 4$, il existe des relations non triviales satisfaites par les matrices des périodes de surfaces de Riemann. Le problème de Schottky consiste à expliciter ces relations. Grosso modo, il s'agit de trouver des critères pour qu'une matrice des périodes appartenant au demi-espace de Siegel soit la matrice des périodes d'une surface de Riemann. Géométriquement, le problème de Schottky consiste à caractériser les jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes principalement polarisées. Le chapitre XI est consacré à la caractérisation des variétés de Prym. Celles-ci apparaissent comme sous-variétés de certaines variétés jacobiennes et rentrent dans une classe générale de variétés abéliennes, c'est-à-dire qui se plongent de façon holomorphe dans un espace projectif. On considère deux courbes algébriques complexes lisses $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ et une involution σ sur $\mathcal{C}$ échangeant les feuillets d'un revêtement $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ double ramifié le long de $\mathcal{C}_0$ et tel que φ identifie $\mathcal{C}_0$ au quotient $\mathcal{C}/\sigma$. L'involution σ induit une involution sur la variété jacobienne Jac($\mathcal{C}$) et l'on montre que modulo un sous-groupe discret, la variété Jac($\mathcal{C}$) se décompose en deux parties : une partie paire qui est Jac($\mathcal{C}_0$) et une partie impaire qui n'est autre que la variété de Prym donnée par Prym($\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$). Nous déterminons explicitement les matrices des périodes associées à Jac($\mathcal{C}_0$), Jac($\mathcal{C}$), Prym($\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$), ainsi qu'au dual Prym*($\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$). La théorie des variétés de Prym joue un rôle crucial dans plusieurs recherches actuelles (problème de Schottky, systèmes intégrables,...) ; leur géométrie se révèle très riche et un des intérêts d'avoir une description explicite de ces variétés est la possibilité de les appliquer à la théorie moderne des systèmes dynamiques algébriquement intégrables.

Comme exemple d'application, nous montrons que le système différentiel de Hénon-Heiles se linéarise sur la duale d'une variété de Prym associée à une courbe hyperelliptique de genre 3. Nous verrons aussi sous forme d'exercices d'autres exemples importants où les variétés de Prym interviennent de manière explicite lors de l'étude de ces problèmes. Le chapitre 12, présente sous forme d'appendices les propriétés des résultants et discriminants, les formes différentielles ainsi que quelques notions sur les variétés algébriques complexes.

De nombreux exemples se trouvent disséminés dans le texte. En outre, des exercices de difficulté variée sont proposés, avec éventuellement des réponses ou des indications. À la fin, j'ai inclus une bibliographie, comportant quelques ouvrages fondamentaux, et un index détaillé.

J'aimerais remercier les éditions Calvage et Mounet pour la qualité de leur travail, leur sérieux et leur professionnalisme. Je suis particulièrement reconnaissant à Rached Mneimné pour sa relecture attentive et précieuse de l'ensemble de l'ouvrage. Mes remerciements vont également à Alain Debreil pour toutes les améliorations concernant les dessins. Enfin, je remercie ma femme et mes enfants pour leur soutien indéniable.

Ahmed Lesfari,
janvier 2023