Le seul groupe d'ordre 48 contenant $\mathfrak{S}_4$ est $\mathfrak{S}_4 \times C_2$[†]

par Alain Debreil

alain.debreil@les-mathematiques.net

RÉSUMÉ. *Nous montrons qu'un groupe d'ordre* 48 *contenant un sous-groupe isomorphe à* $\mathfrak{S}_4$*, le groupe symétrique de quatre objets, est nécessairement isomorphe au produit direct de* $\mathfrak{S}_4$ *par le groupe* C_2 *à deux éléments.*

ABSTRACT. The only group of order 48 having $\mathfrak{S}_4$ as a subgroup is isomorphic to $\mathfrak{S}_4 \times C_2$.
We prove that a group having a subgroup of index 2 *isomorphic to the symmetric* $\mathfrak{S}_4$ *over four elements, is necessarily isomorphic to the direct product of* $\mathfrak{S}_4$ *by the cyclic group* C_2 *of order* 2.

MOTS-CLÉS : *groupe symétrique, groupe alterné,* $\mathfrak{S}_4$*, groupe du cube, groupes d'ordre petit* .

1. Introduction

On notera C_n le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre n, pour tout entier naturel $n > 1$. Nous montrons qu'un groupe d'ordre 48 contenant un sous-groupe d'indice 2 isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ est forcément isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_4 \times C_2$. Autrement dit, il n'y a qu'une seule extension, à isomorphisme près, de C_2 par $\mathfrak{S}_4$:

$$\mathfrak{S}_4 \hookrightarrow G \twoheadrightarrow C_2 \qquad \Longrightarrow \quad G \simeq \mathfrak{S}_4 \times C_2.$$

Un résultat intermédiaire intéressant en soi exprime qu'un groupe d'ordre 24 ayant un sous-groupe isomorphe au groupe allterné $\mathfrak{A}_4$ est, quant à lui, nécessairement isomorphe soit à $\mathfrak{S}_4$, soit à $\mathfrak{A}_4 \times C_2$:

$$\mathfrak{A}_4 \hookrightarrow G \twoheadrightarrow C_2 \qquad \Longrightarrow \quad G \simeq \mathfrak{S}_4 \quad \text{ou} \quad G \simeq \mathfrak{A}_4 \times C_2.$$

On aura besoin d'une connaissance fine des groupes d'ordre 8, 12, 24 et de l'emploi du théorème du treillis-quotient, le tout pouvant être trouvé dans [1].

[†] 2010 Mathematics Subject Classification : 20B30, 20B35

2. Cas du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$

Rappelons que le groupe $\mathfrak{A}_4$ contient un seul 2-Sylow, le sous-groupe de Klein $\mathfrak{V}_4 \simeq C_2 \times C_2$, ainsi que quatre 3-Sylow isomorphes à C_3.

Pour simplifier nos écritures, nous supposerons que $G \supset \mathfrak{A}_4$ et $\operatorname{card} G = 24$.

Comme $\mathfrak{A}_4$ est d'indice 2 dans G, il y est distingué, et il en est donc de même de son sous-groupe caractéristique $\mathfrak{V}_4$, soit $\mathfrak{V}_4 \lhd G$.

Le quotient $G/\mathfrak{V}_4$ est d'ordre 6, et ne peut donc être isomorphe qu'au groupe cyclique C_6 ou au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

- ▷ Si $G/\mathfrak{V}_4 \simeq \mathfrak{S}_3$, les trois 2-Sylow de $G/\mathfrak{V}_4$ se remontent en trois 2-Sylow. Par ailleurs, G possède déjà les quatre 3-Sylow, à savoir ceux de $\mathfrak{A}_4$. N'ayant ni 2-Sylow ni 3-Sylow distingués et étant d'ordre 24, le groupe G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ (voir [2], page 134, proposition 1.1).

- ▷ Si $G/\mathfrak{V}_4 \simeq C_6$, il est clair que G ne peut être isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ (dont les éléments sont d'ordre au plus 4). Montrons que dans ce cas, $G \simeq \mathfrak{A}_4 \times C_2$.

  — Si G possédait un élément central d'ordre 2, cet élément ne pourrait être dans $\mathfrak{A}_4$ (dont le centre est trivial) et engendrerait donc un complément de $\mathfrak{A}_4$. Ainsi, G serait isomorphe à $\mathfrak{A}_4 \times C_2$.

  — Le relèvement S dans G du 2-Sylow (distingué) de $G/\mathfrak{V}_4 \simeq C_6$ est un 2-Sylow distingué de G. Le sous-groupe S est donc l'unique 2-Sylow, donc distingué dans G.

  — Si S $(\lhd G)$ possédait un sous-groupe caractéristique d'ordre 2, celui-ci serait distingué dans G, son élément générateur serait alors central d'ordre 2 dans G.

  — Mais S est d'ordre 8, or tout groupe d'ordre 8 est isomorphe à l'un des cinq groupes :

  $$C_8, \quad C_4 \times C_2, \quad C_2^3, \quad \mathcal{D}_4, \quad \mathbb{H}_8,$$

  et chacun d'eux possède un sous-groupe caractéristique d'ordre 2, à l'exception de C_2^3.

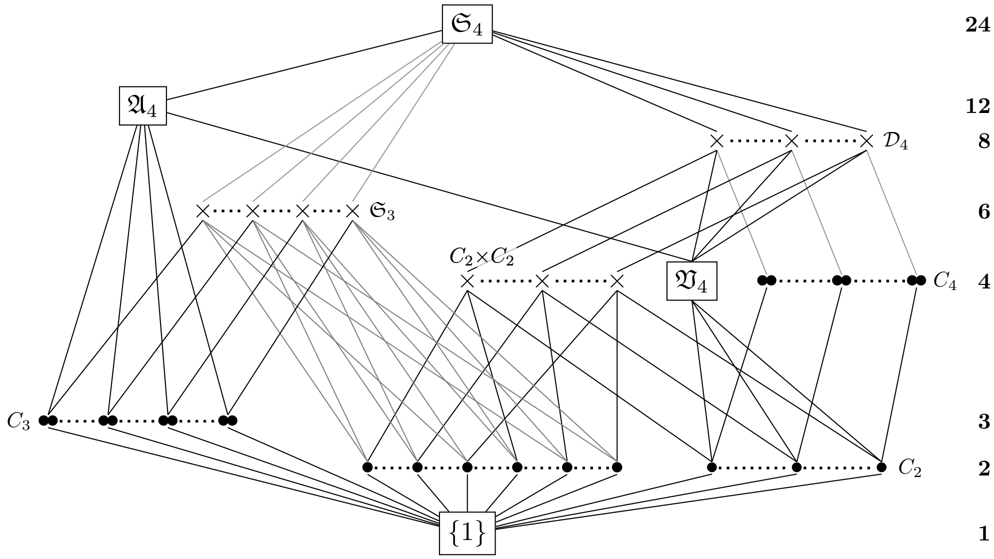
  — Reste donc le cas où $C_2^3 \simeq S \lhd G$.

  Quand G opère par conjugaison sur ses sous-groupes d'ordre 2, le normalisateur de l'un quelconque d'entre eux contient S qui est commutatif et d'indice 3, si bien que les classes de conjugaison sont de cardinal 3 ou 1. Comme il y a sept sous-groupes d'ordre 2, l'un au moins est dans une classe-singleton, donc distingué dans G, et l'on a ainsi trouvé un élément central d'ordre 2 dans G. ***cqfd***

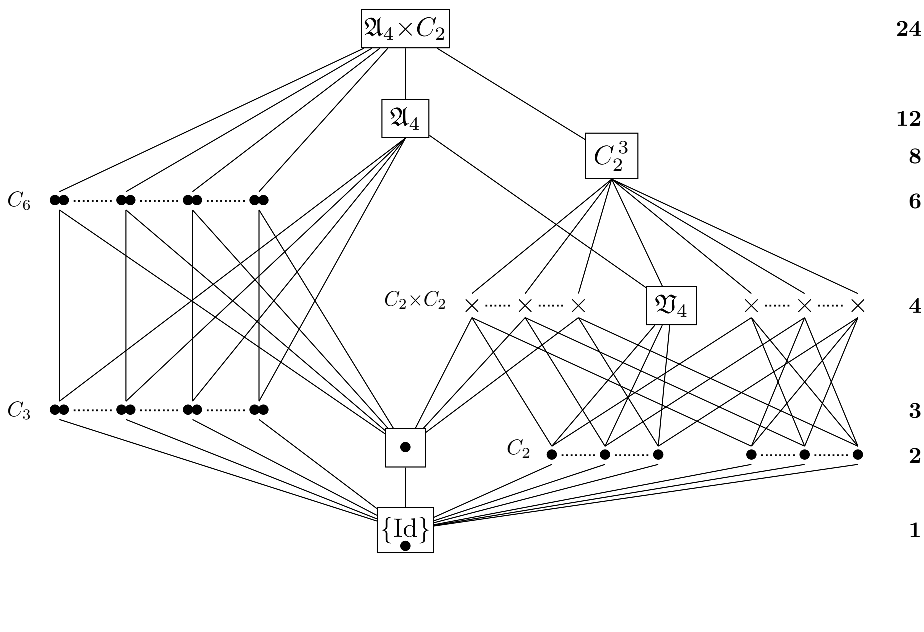
3. Les treillis de $\mathfrak{S}_4$ et de $\mathfrak{A}_4 \times C_2$

Nous donnons pour la satisfaction du lecteur les treillis des deux groupes $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4 \times C_2$ obtenus précédemment, que l'on peut trouver aussi dans [2] ou dans [1]. Rappelons que les sous-groupes distingués sont encadrés, alors que les classes de conjugaison de sous-groupes sont matérialisées par des pointillés horizontaux.

La structure de $\mathfrak{S}_4$ est bien connue.



Voyons maintenant plus précisément la structure de $\mathfrak{A}_4 \times C_2$.

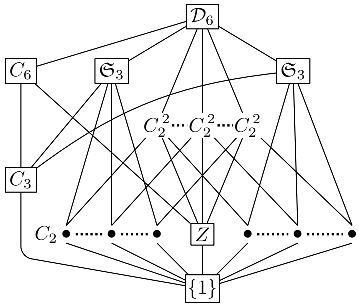


4. Cas du groupe $\mathfrak{S}_4$

Nous partons maintenant avec un groupe G d'ordre cette fois 48 contenant une copie de $\mathfrak{S}_4$, distinguée dans G car d'indice 2. Le sous-groupe de Klein, que nous noterons encore $\mathfrak{V}_4$, est caractéristique dans $\mathfrak{S}_4$, donc distingué dans G. Le quotient $G/\mathfrak{V}_4$ est un groupe d'ordre 12, et contient le quotient $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{V}_4 \simeq \mathfrak{S}_3$. Une rapide inspection des cinq groupes d'ordre 12 (à isomorphisme près), dont seulement trois sont non commutatifs, à savoir

$$\mathfrak{A}_4, \quad \mathcal{D}_6, \quad \widetilde{\mathfrak{S}_3} = C_3 \rtimes C_4,$$

nous indique que le groupe diédral $\mathcal{D}_6$ est le seul à contenir une copie de $\mathfrak{S}_3$. Nous en déduisons donc que $G/\mathfrak{V}_4 \simeq \mathcal{D}_6$.



Le groupe $\mathcal{D}_6$ contient trois sous-groupes maximaux distingués d'ordre 6. Remontés dans G, ils forment trois sous-groupes maximaux d'ordre $6 \times 4 = 24$ contenant $\mathfrak{V}_4$. L'un d'eux est le $\mathfrak{S}_4$ de l'énoncé.

Le sous-groupe du quotient $G/\mathfrak{V}_4$ isomorphe à C_3 est distingué. Il se remonte dans G en un sous-groupe d'ordre $3 \times 4 = 12$ distingué dans G et coincé entre $\mathfrak{V}_4$ et $\mathfrak{S}_4$.

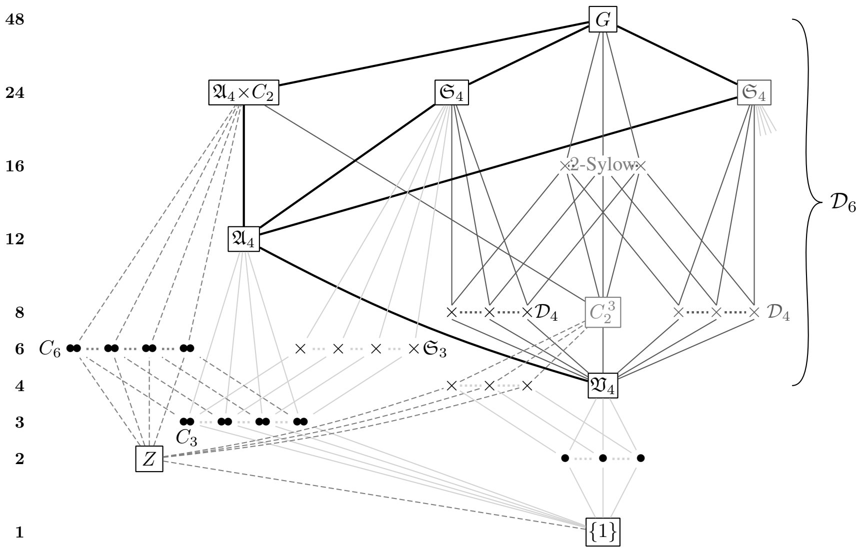
C'est donc un $\mathfrak{A}_4$, et comme le C_3 est l'intersection de trois sous-groupes maximaux du quotient, le $\mathfrak{A}_4$ est contenu dans trois sous-groupes maximaux de G contenant $\mathfrak{V}_4$. Compte tenu du résultat de la section précédente, ces trois sous-groupes maximaux (d'ordre 24) contenant $\mathfrak{A}_4$ sont donc de type ou bien $\mathfrak{S}_4$, ou bien $\mathfrak{A}_4 \times C_2$.

Le sous-groupe maximal de G dont l'image dans le quotient $G/\mathfrak{V}_4$ est cyclique d'ordre 6 contient forcément un élément d'ordre 6 ; il ne peut donc être de type $\mathfrak{S}_4$ (dont les éléments sont d'ordre au plus 4), et est dès lors isomorphe à $\mathfrak{A}_4 \times C_2$.

Mais $\mathfrak{A}_4 \times C_2$ possède un centre Z isomorphe à C_2, et comme $Z \sqsubset \mathfrak{A}_4 \times C_2 \lhd G$, ce Z est distingué dans G et d'ordre 2, donc dans le centre de G. Or, $\mathfrak{S}_4$ n'ayant pas de sous-groupe distingué d'ordre 2, ce Z distingué n'est pas contenu dans le $\mathfrak{S}_4$ de l'énoncé, et alors $Z \cdot \mathfrak{S}_4 \simeq \mathfrak{S}_4 \times C_2$, qui est donc G par cardinalité. ***cqfd***

Remarquons que le troisième sous-groupe maximal de G au-dessus de $\mathfrak{A}_4$ possède trois 2-Sylow, contrairement à $\mathfrak{A}_4 \times C_2$: c'est donc un $\mathfrak{S}_4$.

Nous donnons ci-après un treillis partiel du groupe $G = \mathfrak{S}_4 \times C_2$, qui permettra au lecteur de mieux visualiser les arguments précédents. Le treillis complet de G pourra être trouvé à la page 644 de [1] ou à la page 102 de [2].



Dans ce treillis (partiel) des sous-groupes de $G \simeq \mathfrak{S}_4 \times C_2$, le sous-treillis (partiel) $\mathscr{L}(\mathfrak{S}_4)$ du $\mathfrak{S}_4$ de l'énoncé est représenté en grisé pâle. Le sous-treillis (complet) $\mathscr{L}(G \supset \mathfrak{V}_4)$ des sous-groupes de G contenant $\mathfrak{V}_4$, isomorphe au treillis du quotient $G/\mathfrak{V}_4 \simeq \mathcal{D}_6$, est représenté en grisé, les inclusions utilisées dans la première partie de la démonstration sont, quant à elles, tracées en traits noirs épais. Le treillis (partiel) du groupe $\mathfrak{A}_4 \times C_2 \simeq \mathfrak{A}_4 \times Z$ est tracé en tiretés courts, et le sous-groupe distingué central Z y est représenté.

Références

[1] Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*. Mathématiques en devenir. Calvage & Mounet, Paris, 2016

[2] Alain Debreil, Rached Mneimné. *Le groupe symétrique* $\mathfrak{S}_4$ *et ses métamorphoses*. Collection Nano. Calvage & Mounet, Paris, 2020