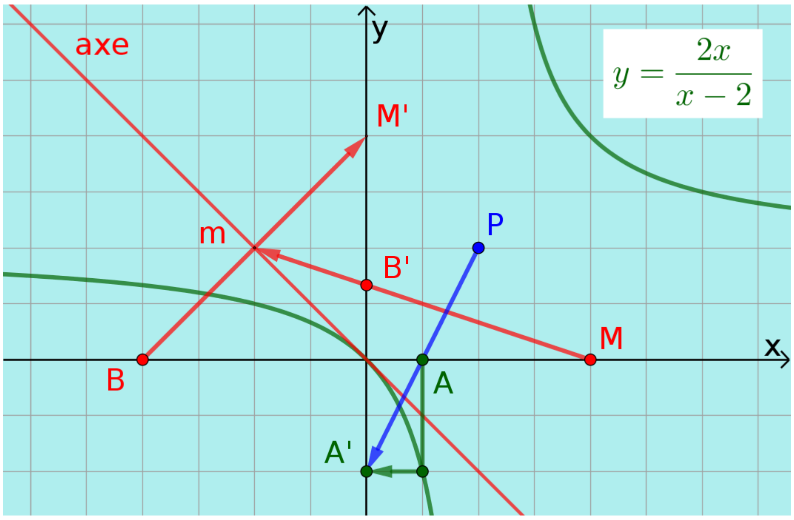
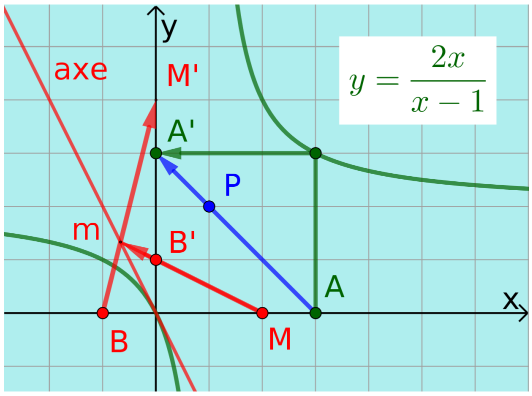
1) Homographie entre droites

a) Perspective

Pour les gens de ma génération, l'homographie était une fonction réelle définie par $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
Avec, de préférence, $c \neq 0$.
Bons petits soldats du repère cartésien, nous n'avions pour but que de construire l'hyperbole verte.
Pour cela, nous nous donnions divers « nombres » $A$, $B$, $M$ de la droite $(Ox)$, et nous **calculions** leurs images $A'$, $B'$, $M'$ (à reporter sur la droite $(Oy)$) à l'aide de la formule de départ.



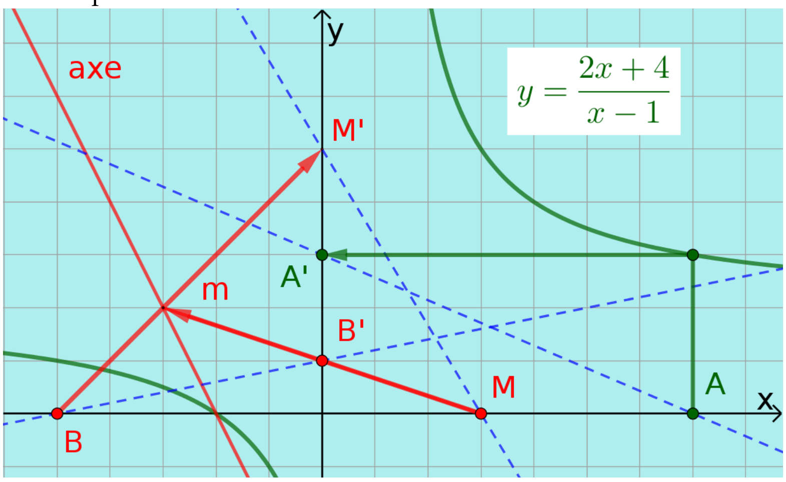




Nous ne nous demandions pas quelles éventuelles propriétés géométriques auraient, aussi bien, donné accès à $A'$, $B'$, $M'$.

Voici déjà l'accès VIP (Very Immédiate Perspective).
Il s'agit de la construction en bleu.
Si les droites $(AA')$, $(BB')$, $(MM')$ sont concourantes en un point $P$, il paraît que ce sera le cas pour tous les autres points de $(Ox)$ et leurs images sur $(Oy)$. Grâce au quadrillage, constatons que $B'$ aurait effectivement pu être obtenu comme intersection de $(PB)$ avec $(Oy)$, de même que $M' \in (PM) \cap (Oy)$.
On dit que ces homographies $f$ sont des **perspectives** (ou **projections centrales**) de centre $P$ qui appliquent la droite $(Ox)$ sur la droite $(Oy)$.

b) Homographie à axe

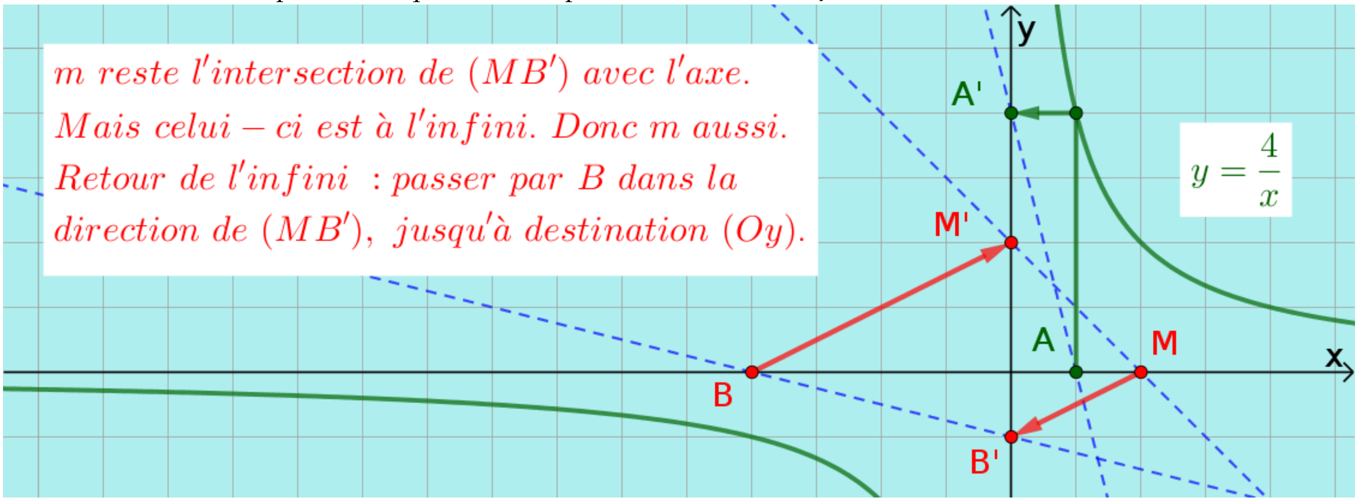
Mais, voyons ci-dessous : $(AA')$, $(BB')$, $(MM')$ peuvent très bien avoir envie de ne pas concourir !
Alors plus de point $P$, et c'est fichu pour le tracé bleu !




Abolition des privilèges : Accès pour tous.
Pas vaincus, nous sortons du chapeau **l'axe de l'homographie**, et travaillons ~~du chapeau~~ dans le rouge.
Nous disons : « Donne-moi un seul, je dis bien un seul point $B$ et son image $B'$ !
Puis demande-moi de te construire, pour n'importe quel point $M$ de ton choix, l'image $M'$ rien qu'avec la règle ! »

Nous traçons la droite $(B'M)$, puis $m$ son intersection avec l'axe, enfin nous coupons $(Bm)$ avec $(Oy)$ : nous voici arrivés en $M'$ sans le moindre calcul.

La propriété est commune à toutes les homographies, comme on peut le constater sur les deux perspectives du début.
Parfois, c'est un peu chaud quand il faut partir à l'infini, mais ça roule.




c) Questions

i) S'il y a ~~Paul~~ **pôle** $P$, alias centre ou sommet de perspective, aka perspector, exprimer ses coordonnées cartésiennes en fonction de $a$, $b$, $c$, $d$.

ii) Trouver une condition nécessaire et suffisante d'existence de $P$, i.e. pour que l'homographie soit une perspective.

iii) Un peu plus tordu : le fameux axe qui semble exister pour **toutes** les homographies, en donner une équation cartésienne en fonction de $a$, $b$, $c$, $d$.

d) Involutions
On appelle ainsi les homographies égales à leur réciproque.

i) Si on dispose de la Green card, on peut regarder si cette hyperbole est symétrique par rapport à la première bissectrice du plan, et dénombrer deux involutions parmi quatre.

ii) Trouver les conditions à remplir par $a$, $b$, $c$, $d$ pour que l'homographie soit involutive.