MATH' CIRCUS

Jeux mathématiques

Martin Gardner

Bibliothèque **POUR LA SCIENCE** Diffusion Belin

Les nombres cycliques 11

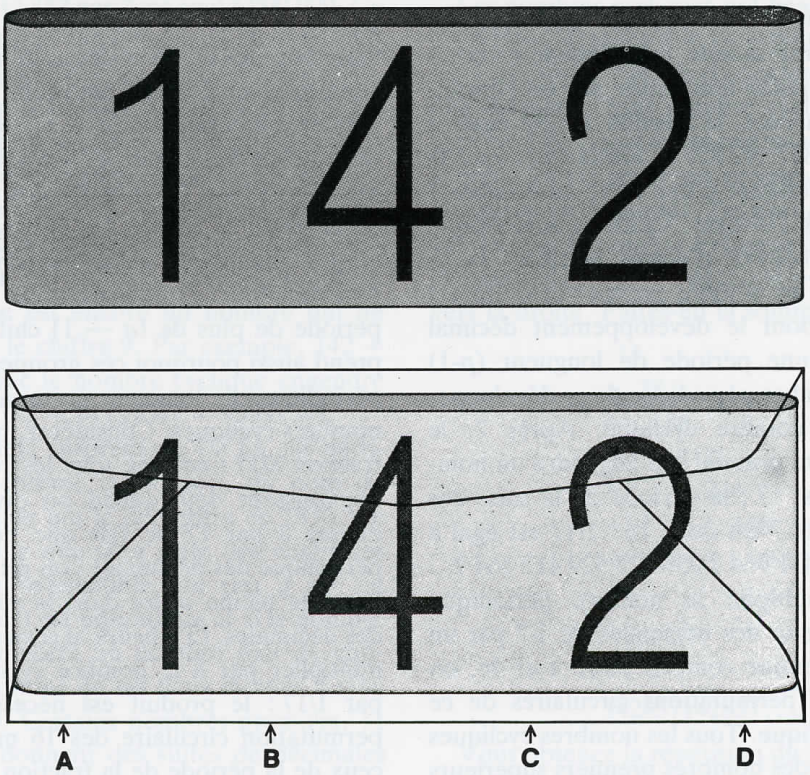
Le nombre 142 857 est l'un des nombres entiers les plus remarquables : c'est le plus petit des « nombres cycliques » supérieurs à 1. Ces nombres entiers à *n* chiffres ont la propriété suivante : lorsqu'on les multiplie par un nombre quelconque compris entre 1 et *n*, le produit contient les mêmes *n* chiffres que le nombre original et dans le même ordre. Imaginez que le nombre 142 857 soit écrit sur un ruban circulaire, c'est-à-dire que le chiffre 1 vienne après le chiffre 7 : on pourrait couper cette chaîne en six endroits, pour former six nombres de six chiffres, les six permutations circulaires du nombre d'origine :

$$1 \times 142\,857 = 142\,857$$
$$2 \times 142\,857 = 285\,714$$
$$3 \times 142\,857 = 428\,571$$
$$4 \times 142\,857 = 571\,428$$
$$5 \times 142\,857 = 714\,285$$
$$6 \times 142\,857 = 857\,142$$

La nature cyclique des six produits intrigue les magiciens depuis longtemps et on a utilisé ces nombres dans de nombreux tours de magie. En voici un : préparez un jeu de cartes en enlevant tous les piques, de l'as au neuf, et en les plaçant au-dessous du jeu dans l'ordre 1, 4, 2, 8, 5, 7, de bas en haut, les autres piques suivant en ordre quelconque. Préparez votre prévision à l'avance dans une enveloppe : mettez-y une bande de papier d'une longueur double de celle de l'enveloppe, collée aux extrémités pour la rendre circulaire et marquée à l'extérieur de six grands chiffres formant le nombre 142 857. Introduisez la bande dans l'enveloppe sans plier les extrémités *(voir la figure 1)*.

Gardez en mémoire le nombre 142 857 et rappelez-vous que les trois premiers chiffres sont du côté du rabat et les trois autres de l'autre côté. Par la suite, vous pourrez couper l'enveloppe en A, B, C ou D. Aux extrémités A et D, vous couperez l'enveloppe et la bande sur une double épaisseur : en retirant la bande de l'enveloppe, vous obtiendrez un ruban portant 142 857 ou 857 142. Vous obtiendrez deux autres permutations en coupant l'enveloppe en B ou en C ; attention : dans ce cas, ne coupez l'enveloppe que sur un centimètre, puis veillez à ne couper la bande qu'une fois. En retournant l'enveloppe, vous obtiendrez de la même manière un ruban avec les deux dernières permutations.

Au début du tour, confiez l'enveloppe fermée contenant votre « prédiction » à un spectateur et donnez le jeu de cartes préparé à une autre personne en lui demandant de le battre deux fois en mitraillette (pour battre un jeu en mitraillette, faites deux tas à peu près égaux, soulevez les coins et libérez les cartes progressivement). Ces deux mélanges répartissent les neuf piques à travers le jeu sans changer leur ordre. Placez alors les cartes face visible et annoncez que, pour obtenir un nombre de six chiffres au hasard, vous allez ôter du jeu les six premiers piques portant un chiffre. Si vous ne vous êtes pas trompé, les chiffres seront, 1, 4, 2, 8, 5, 7. Disposez les six cartes en rang sur la table et demandez à un spectateur de lancer un dé (ou de choisir un chiffre entre 1 et 6). Multipliez 142 857 par ce nombre et coupez l'enveloppe de sorte que la bande porte le nombre désiré (pour



1. Le ruban circulaire pour un tour de magie avec des nombres cycliques.

déterminer après quel chiffre il faut couper la bande, il suffit de multiplier le nombre résultant du lancer par 7 : vous aurez ainsi le dernier chiffre du produit). Par « magie », le nombre qui apparaît sur la bande est bien le nombre prédit.

Le nombre 142 857 apparaît dans beaucoup d'autres tours de magie mathématique mais tous ces tours ont un défaut : les spectateurs peuvent remarquer que ce sont toujours les mêmes chiffres 1, 4, 2, 8, 5, 7, qui reviennent dans les prédictions ; en outre, le nombre 142857 commence à être connu. Pour éviter cette difficulté, on peut remplacer 142 857 par le quotient obtenu en divisant ce nombre par l'un de ses diviseurs (3, 9, 11, 13, 27, 33, 37, 39, 111, ...). Par exemple, avec 3 : 142 857/3 = 47 619. Au lieu de multiplier ce nombre par 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, vous le multiplierez alors par l'un des six premiers multiples de 3 pour obtenir une permutation circulaire de 142 857. Avec 9, vous utiliserez 142 857/9 = 15 873 et vous le multiplierez ensuite par 9, 18, 27, 36, 45, 54.

Dès que les mathématiciens découvrirent le caractère cyclique de 142 857, ils cherchèrent des nombres plus grands ayant cette curieuse propriété. Dans le premier volume de son *Histoire de la théorie des nombres*, Leonard Eugene Dickson résume les premières tentatives. Depuis la parution de l'ouvrage, en 1919, des dizaines d'articles ont été écrits à ce sujet. Tous les nombres cycliques sont des nombres périodiques constitués par les suites des chiffres décimaux des inverses de certains nombres premiers. L'inverse de 7, soit 1/7, est une fraction

rationnelle ; or toute suite des décimales de toute fraction rationnelle, soit possède un nombre fini de décimales non nulles, soit est périodique. En l'occurence, la fraction 1/7 est égale à 0,142 857 142 857 142 857... Remarquez que la période est inférieure d'une unité au nombre 7 dont on a pris l'inverse. Cette caractéristique permet de découvrir d'autres nombres cycliques : si p est un nombre premier et si $1/p$ est une fraction dont le développement décimal périodique a une période de longueur (p-1) chiffres, le nombre périodique de ce développement est un nombre cyclique. Après 7, le premier nombre premier qui engendre un nombre cyclique est 17 ; la période de la suite des décimales de 1/17 est donc 16 : 1/17 est égal à 0,058 823 529 411 764 7 058 823 529 411 764 7... Quand on multiplie le nombre périodique extrait de la suite des décimales de 1/7 par un nombre quelconque compris entre 1 et 16, on obtient les 16 permutations circulaires de ce nombre périodique. Tous les nombres cycliques engendrés par des nombres premiers supérieurs à 7 commencent nécessairement par un ou plusieurs zéros ; si vous utilisez ces nombres pour des tours de magie, vous pouvez laisser tomber momentanément les zéros, à condition bien sûr d'en tenir compte lorsque vous exprimerez le résultat final.

Neuf nombres premiers inférieurs à 100 engendrent des nombres cycliques ; ce sont 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97. Au XIXe siècle, on découvrit de nombreux nombres cycliques plus grands et William Shanks, plus connu pour son calcul (faux) de π jusqu'à la 707e décimale, découvrit le nombre cyclique engendré par 1/17 389 et calcula exactement les 17 388 chiffres de la période.

Aucune fraction de dénominateur q ne peut présenter une période supérieure à (q — 1). Comme la période n'a cette longueur maximale que lorsque q est un nombre premier, les nombres cycliques sont aussi les nombres périodiques de suites de décimales de période maximale pour les inverses des nombres entiers. On comprend facilement pourquoi la période ne peut être supérieure à (q — 1) : lorsqu'on divise un nombre entier par q, il n'y a que (q — 1) restes possibles. Dans la division de 1 par q, dès qu'un reste se répète, les autres restes reviennent évidemment aussi : aucune fraction de dénominateur q ne peut donc présenter une période de plus de (q — 1) chiffres. On comprend aussi pourquoi ces groupes de décimales périodiques de longueur maximale forment des nombres cycliques. Considérez, par exemple, la fraction 8/17 : comme tous les restes possibles apparaissent déjà quand on divise 1 par 17, diviser 8 par 17 ne fait que décaler la suite périodique des décimales ; on retrouve de toute façon le même ordre dans la suite périodique des décimales. D'ailleurs, il revient au même de multiplier par 8 le nombre cyclique engendré par 1/17 : le produit est nécessairement une permutation circulaire des 16 mêmes chiffres, ceux de la période de la fraction 1/17.

On ne connaît aucune formule non récursive pour trouver automatiquement tous les nombres premiers dont les inverses présentent une période maximale (ceci afin d'engendrer tous les nombres cycliques), mais plusieurs algorithmes simplifient l'identification de ces nombres premiers et la mise au point de programmes d'ordinateur pour cette recherche. On ignore encore s'il existe une infinité de tels nombres premiers, mais c'est très vraisemblable. Samuel Yates a calculé la longueur des périodes des décimales de tous les nombres premiers jusqu'à 1 370 471 : environ trois nombres premiers sur huit donnent des nombres cycliques. La proportion reste assez constante sur toute la liste et on peut supposer qu'il en est ainsi pour l'ensemble de tous les nombres premiers.

Lorsqu'on multiplie un nombre cyclique par le nombre premier qui l'a engendré, on obtient toujours un nombre composé de 9. Par exemple,

le produit de 142 857 par 7 est égal à 999 999. Ce résultat fournit une autre façon de chercher des nombres cycliques : divisez 9, puis 99, puis 999, etc. par le nombre premier p jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de reste ; si le quotient comporte $(p - 1)$ chiffres, c'est un nombre cyclique. Le résultat suivant est plus inattendu : tout nombre cyclique (ou l'une quelconque de ses permutations circulaires) coupé en son milieu donne deux nombres dont la somme est encore un nombre qui ne s'écrit qu'avec le chiffre 9. Par exemple, 142 + 857 = 999 ; avec le nombre cyclique engendré par 17 : 05882352 + 94117647 = 99999999.

Cette propriété surprenante est un cas particulier du « théorème de Midy », du nom du Français E. Midy qui le démontra en 1836. Ce théorème stipule que si la suite des décimales d'une fraction irréductible p/q (où q est un nombre premier) est périodique et si le nombre périodique comporte un nombre pair de chiffres, alors la somme de ses deux moitiés donne une série de 9. Certains nombres premiers, 11 par exemple, donnent des suites de décimales périodiques dont les nombres périodiques ont un nombre pair de chiffres mais qui ne sont pas des nombres cycliques ; elles ont cependant la propriété mentionnée précédemment ; d'autres nombres premiers, comme 3 et 31, engendrent des fractions dont les périodes sont impaires ; pour tous les nombres cycliques, la période est paire puisqu'elle est égale à $(q - 1)$, où le nombre q est premier, donc impair. Le théorème de Midy s'applique donc aux nombres cycliques. Il est bon de connaître ce résultat quand vous faites une division pour obtenir un nombre cyclique : vous pouvez vous arrêter à mi-chemin et obtenir les autres chiffres en soustrayant d'une suite de 9 le nombre déjà trouvé. Le théorème de Midy a un corollaire immédiat : tous les nombres cycliques sont des multiples de 9 ; en effet, tous les nombres dont la somme des chiffres est un multiple de 9 sont également des multiples de 9.

Les nombres cycliques ont beaucoup d'autres propriétés étranges que vous pouvez vous amuser à découvrir ; je me contenterai d'en donner une dernière : tout nombre cyclique peut être engendré de plusieurs manières au moyen de la somme des termes d'une progression arithmétique écrite en diagonale. Par exemple, à partir de 14, doublez le nombre à chaque étape et écrivez chaque nombre en le décalant de deux chiffres vers la droite. Faites-en la somme :

$$\begin{array}{r}
14 \\
+\ 28 \\
+\ 56 \\
+\ 112 \\
+\ 224 \\
+\ 448 \\
+\ 896 \\
+\ \cdot \\
+\ \cdot \\
+\ \cdot \\
\hline
142857142857\ldots
\end{array}$$

Vous obtenez la répétition du plus petit nombre cyclique différent de 1. Vous obtiendrez également ce résultat en partant de 7 et en multipliant par 5 à chaque étape : écrivez les résultats en diagonale vers la gauche, en décalant d'un chiffre à chaque nombre :

$$\begin{array}{r}
+\ 7 \\
+\ 35 \\
+\ 175 \\
+\ 875 \\
+\ 4375 \\
+\ \cdot \\
+\ \cdot \\
+\ \cdot \\
\hline
\ldots 142857
\end{array}$$

En procédant de manière semblable, mais en commençant avec 1 et en doublant (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) vous obtiendrez le troisième nombre cyclique avec la période de la suite décimale de 1/19 : 052 631 578 947 368 421. En triplant à

chaque étape à partir de 1 (1, 3, 9, 27, 81, ...) et en décalant à chaque étape de deux chiffres vers la droite, vous aurez une série dont la somme donne la suite décimale de 1/97, qui fournit le plus grand nombre cyclique engendré par un nombre inférieur à 100.

Je vous propose de chercher les propriétés cycliques du nombre périodique de la suite des décimales de la fraction 1/13. Ce nombre (076 926) n'est pas un vrai nombre cyclique mais on pourrait dire que c'est un nombre cyclique de deuxième espèce ; la propriété que vous découvrirez est très liée à celles des nombres cycliques de première espèce que nous venons d'examiner.

John Ward a attiré mon attention sur le carré magique de la figure 2 découvert par W. Andrews en 1917. Le carré magique est fondé sur le nombre cyclique issu de 1/19. La somme des chiffres dans chaque ligne, colonne, ou diagonale principale est égale à 81. On voit facilement comment former un carré semi-magique pour les lignes et les colonnes avec n'importe quel nombre cyclique, mais J. Ward a trouvé que celui-ci a la propriété unique d'inclure aussi les diagonales. « Il n'est pas facile de comprendre, écrit W. Andrew, pourquoi chacune des deux diagonales de ce carré donne la somme 81 ; de plus, on s'aperçoit en ajoutant par paires les chiffres de même rang dans les deux nombres qui forment les diagonales, qu'on obtient chaque fois 9 ». J. Ward a également montré que tous les carrés semi-magiques construits à partir d'autres nombres cycliques sont tels que la somme des deux diagonales est égale au double de la constante magique (cette constante est le nombre égal à la somme de n'importe quelle ligne ou colonne).

Qu'arrive-t-il lorsqu'on multiplie un nombre cyclique de première espèce par un nombre supérieur au nombre n de chiffres du nombre cylique. Dans tous les cas, le produit se ramène soit à un nombre obtenu par permutation circulaire du nombre cyclique, soit à un nombre composé d'une suite de n chiffres 9. Examinons ce résultat avec 142 857 et nous verrons comment généraliser cette propriété dans le cas d'autres nombres cycliques.

Considérons d'abord tous les nombres supérieurs à n qui ne sont pas multiples de $(n + 1)$. Par exemple, 142 857 × 123 = 17 571 411. Ajoutez au nombre formé des six derniers chiffres le nombre formé des chiffres qui restent (les deux premiers) :

$$\begin{array}{r} 571\,411 \\ +\quad 17 \\ \hline 571\,428 \end{array}$$

La somme est une permutation circulaire de 142 857.

Voici un autre exemple :

142 857 ² = 20 408 122 449

$$\begin{array}{r} 122\,449 \\ +\ 20\,408 \\ \hline 142\,857 \end{array}$$

Si le multiplicateur est très grand, découpons le nombre en nombres de six chiffres à partir de la droite. Par exemple, 142 857 × 4 501 348 = 6 430 514 712 336 :

$$\begin{array}{r} 712\,336 \\ +\ 430\,514 \\ +\qquad 6 \\ \hline 1\,142\,856 \end{array}$$

Comme la somme a plus de six chiffres, on recommence l'opération :

$$\begin{array}{r} 142\,856 \\ +\qquad 1 \\ \hline 142\,857 \end{array}$$

Si le multiplicateur d'un nombre cyclique est un multiple de $(n + 1)$ (n étant le nombre de chiffres du nombre cyclique), l'opération décrite ci-dessus produira une rangée de 9. Par exemple, 142 857 × 84 = 11 999 988 :

$$\begin{array}{r} 999\,988 \\ +\quad 11 \\ \hline 999\,999 \end{array}$$

1/19 =	0, 0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
2/19 =	0, 1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2
3/19 =	0, 1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3
4/19 =	0, 2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
5/19 =	0, 2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
6/19 =	0, 3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6
7/19 =	0, 3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7
8/19 =	0, 4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8
9/19 =	0, 4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9
10/19 =	0,5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0
11/19 =	0,5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1
12/19 =	0, 6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2
13/19 =	0, 6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3
14/19 =	0, 7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4
15/19 =	0, 7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5
16/19 =	0, 8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	6	3
17/19 =	0, 8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7
18/19 =	0, 9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8

2. Le seul carré magique engendré par un nombre cyclique.

Le lecteur découvrira facilement par lui-même comment l'opération s'applique aussi aux nombres cycliques d'espèces supérieures. *Ratner's Star*, un roman de Don De Lillo (Knopf, 1976) contient de nombreuses références au nombre 142 857 et à ses étranges propriétés. Le héros du roman est un mathématicien prodige du Bronx ; il a 14 ans et s'appelle Billy Twillig. Engagé en 1979 par le gouvernement pour un projet ultrasecret, Billy Twillig doit déterminer pourquoi une étoile lointaine de la Voie Lactée envoie en code vers la Terre la suite 14 - 28 - 57. Billy Twillig découvre finalement que... mais je vous laisse lire le roman !

RÉPONSES

Le nombre périodique de la suite des chiffres décimaux de 1/13 (076 923) n'est pas un vrai nombre cyclique ; il est cependant cyclique d'une certaine manière : quand on le multiplie par les nombres entiers compris entre 1 et 12, on obtient six permutations circulaires de 076 923 et six permutations circulaires de 153 846. En outre, en coupant chacun de ces deux nombres au milieu et en ajoutant les deux moitiés, on obtient 999. Si on les coupe en trois et qu'on ajoute les trois nombres, on obtient 99 (07 + 69 + 23 = 99 ; 15 + 38 + 46 = 99).

Un nombre cyclique de deuxième espèce est un nombre entier de n chiffres qui, multiplié par un nombre entier compris entre 1 et $2n$, donne des nombres obtenus par permutations circulaires de l'un ou l'autre de deux nombres à n chiffres. Hormis le cas trivial engendré par 1/3, le plus petit des nombres premiers qui engendre un nombre cyclique de deuxième espèce est 13. Les autres nombres premiers inférieurs à 100 qui engendrent des nombres cycliques de deuxième espèce sont : 31, 43, 67, 71, 83 et 89.

On peut s'amuser à définir des nombres cycliques d'espèces supérieures. Le plus petit nombre cyclique de troisième espèce est 103 : le nombre périodique de la suite des décimales de 1/103, multiplié par n'importe quel nombre entier compris entre 1 et 102, donne trois ensembles de produits ; chacun de ces ensembles contient 34 permutations circulaires d'un nombre de 34 chiffres.

Le plus petit nombre premier qui engendre un nombre cyclique de quatrième espèce est 53. En général, si la suite des décimales de l'inverse d'un nombre premier p présente une période dont le nombre de chiffres est égal à $(p - 1)/n$, le nombre périodique est un nombre cyclique d'ordre n. Par exemple, 1/37 engendre le nombre périodique de trois chiffres 027. Puisque 36/3 est égal à 12, 027 est un nombre cyclique de 12e espèce. Les plus petits des nombres premiers engendrant des nombres cyliques de 5e, 6e, 7e..., 15e espèces sont respectivement 11, 79, 211, 41, 73, 281, 353, 37, 2 393, 449, 3 061. Remarquez que les dix produits du premier nombre cyclique de cinquième espèce (09, la période de 1/11) sont les dix premiers multiples de neuf.

Il existe une curieuse relation entre les nombres de Fibonacci et le nombre cyclique de deuxième espèce engendré par 89. En partant de zéro, écrivez la suite de Fibonacci en diagonale, en écrivant les nombres les uns au-dessous des autres, décalés d'un chiffre à chaque ligne :

```
    0
+   1
+   1
+    2
+     3
+      5
+       8
+       13
+        21
+         34
+          55
+           89
+            144
+             233
+              377
-------------------
  0112359550561...
```

La somme est la suite décimale de l'inverse de 89. Les problèmes à propos des nombres cycliques d'espèces supérieures sont nombreux et les résultats obtenus mériteraient d'être rassemblés. La même remarque s'applique aux nombres cycliques dans des systèmes numériques d'une base différente de 10 car, quelle que soit la base, on découvre des nombres cycliques. Par exemple, dans le système binaire, la séquence des nombres cycliques de première espèce (traduite en écriture décimale) est : 3, 5, 11, 13, 19, 29, ...

Tables tournantes en tous genres 15

1. La table tournante

À Paris, en 1969, après dix semaines de marchandages, les négociateurs de la paix au Vietnam arrivèrent enfin à un premier accord : ils décidèrent que la table de conférence serait ronde et que 24 personnes régulièrement espacées y prendraient place. Il était prévu que 24 cartes posées sur la table porteraient les noms des participants mais la confusion des débats fut telle que les 24 négociateurs se retrouvèrent assis au hasard. Ils découvrirent alors qu'aucun d'eux n'était assis à la place prévue au départ. Était-il possible de tourner la table jusqu'à ce que deux personnes au moins soient assises à la place qui leur était désignée ?

La question est beaucoup plus difficile si l'on suppose qu'une seule personne est à sa place. Est-il toujours possible de tourner la table pour qu'au moins deux personnes soient correctement placées ?

2. Échec donc Mat

En juin 1916, une revue britannique d'échecs publia une invention d'un amateur américain, Frank Hopkins, sous le nom de l'« Échec unique » ou d'« Un échec gagne ». Dans cette variante du jeu d'échecs, toutes les règles étaient conservées, mais la victoire allait au premier joueur qui mettait en échec (sans mat) le Roi adverse. Le magazine signalait que les Blancs avaient certainement une stratégie gagnante car le grand maître américain Frank Marshall avait affirmé avoir démoli le nouveau jeu. L'inventeur ne fut convaincu que lorsqu'il constata que Marshall obtenait la victoire en ne déplaçant que ses deux Cavaliers blancs. En dehors du coup d'ouverture, on ne connaît ni la stratégie de Marshall, ni le nombre de coups avant l'échec fatal.

Depuis 1916, la variante de l'« Échec unique » a intéressé plusieurs joueurs. Solomon Golomb connaissait cette variante sous le nom d'« Échec presto » donné par David Silverman, qui avait appris le jeu par un réinventeur, en 1965. Peu avant 1950, le jeu avait déjà été réinventé par un groupe d'étudiants en mathématiques de l'Université Princeton. L'un d'eux, William Mills, a découvert ce qui fut sans doute la stratégie de Marshall : Blanc, grâce à ses deux Cavaliers, gagne en cinq coups au maximum. En 1969, W. Mills et George Soules trouvèrent ensemble d'autres parties en cinq coups, utilisant des pièces différentes des Cavaliers. Pouvez-vous refaire la prouesse de Marshall et résoudre le problème de la figure 1 ? Vous êtes Blanc, et votre jeu est dépourvu des pièces « inutiles » ; en cinq coups blancs au maximum, vous pouvez faire échec au Roi noir.

On a essayé de rendre le jeu plus équitable

avec de nouvelles règles ; Hopkins lui-même suggéra de commencer la partie avec les pions des deux camps sur la troisième rangée, et non sur la deuxième. Sidney Sackson, à qui je dois la référence de 1916, propose une autre variante dans laquelle on ne gagne qu'après plusieurs « échecs » (par exemple, entre 5 et 10 échecs, suivant la longueur souhaitée pour la partie). Ces propositions suffisent-elles à détruire l'avantage des Blancs ? Je ne puis l'affirmer.

3. Jeu de devinettes

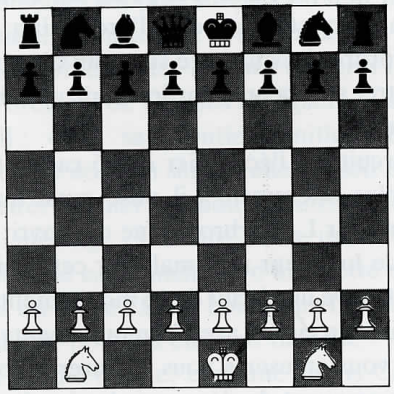
Vers 1965, Anatol Holt, un mathématicien amateur de jeux, proposa le nouveau jeu de devinette suivant. Deux personnes s'accordent sur un nombre de lettres donné et pensent chacune à un mot avec ce nombre de lettres. Pour les néophytes, il est conseillé de commencer avec des mots de trois lettres et d'augmenter la longueur des mots au fur et à mesure de leurs progrès. À tour de rôle, les joueurs citent un « mot d'essai » de la même longueur que les mots choisis et l'adversaire doit répondre en signalant si le nombre de « coups au but » (le nombre de lettres à la bonne place) est pair ou impair. Le premier qui découvre le mot de l'adversaire est le vainqueur. Pour montrer qu'une analyse logique suffit pour trouver le mot, A. Holt donne un exemple de déduction fondée sur six mots d'essai.

Pair	*Impair*
FOI	MOI
ROI	DUR
OUI	SEL

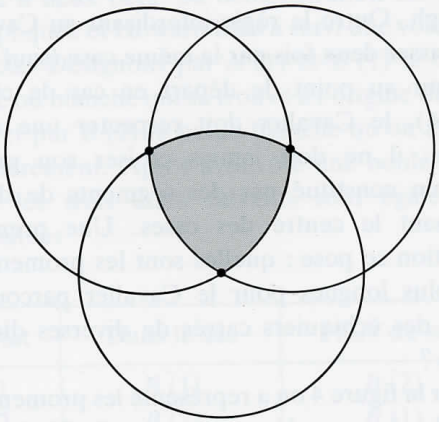
Comparé lettre par lettre avec le mot inconnu, chaque mot de la liste *Pair* a un nombre pair de lettres bien placées (zéro est considéré comme un nombre pair) ; ce nombre est impair dans la liste *Impair*. Quel est, à votre avis, le mot inconnu ?

4. Les ronds de bière

Un consommateur a posé trois fois son verre de bière sur le bar : quand le serveur a enlevé le verre, le bar était taché *(voir la figure 2)*. Quelle surprise ! Chaque cercle passait par le centre des deux autres. Le patron pense que la surface de recouvrement *(en grisé)* est inférieure au quart de la surface d'un cercle, mais le serveur dit qu'elle est supérieure. Qui a raison ? Si vous ne craignez pas les calculs, vous pouvez trouver la



1. Un échec au Roi en cinq coups pour Blanc.



2. Quelle est l'aire de la surface en gris ?

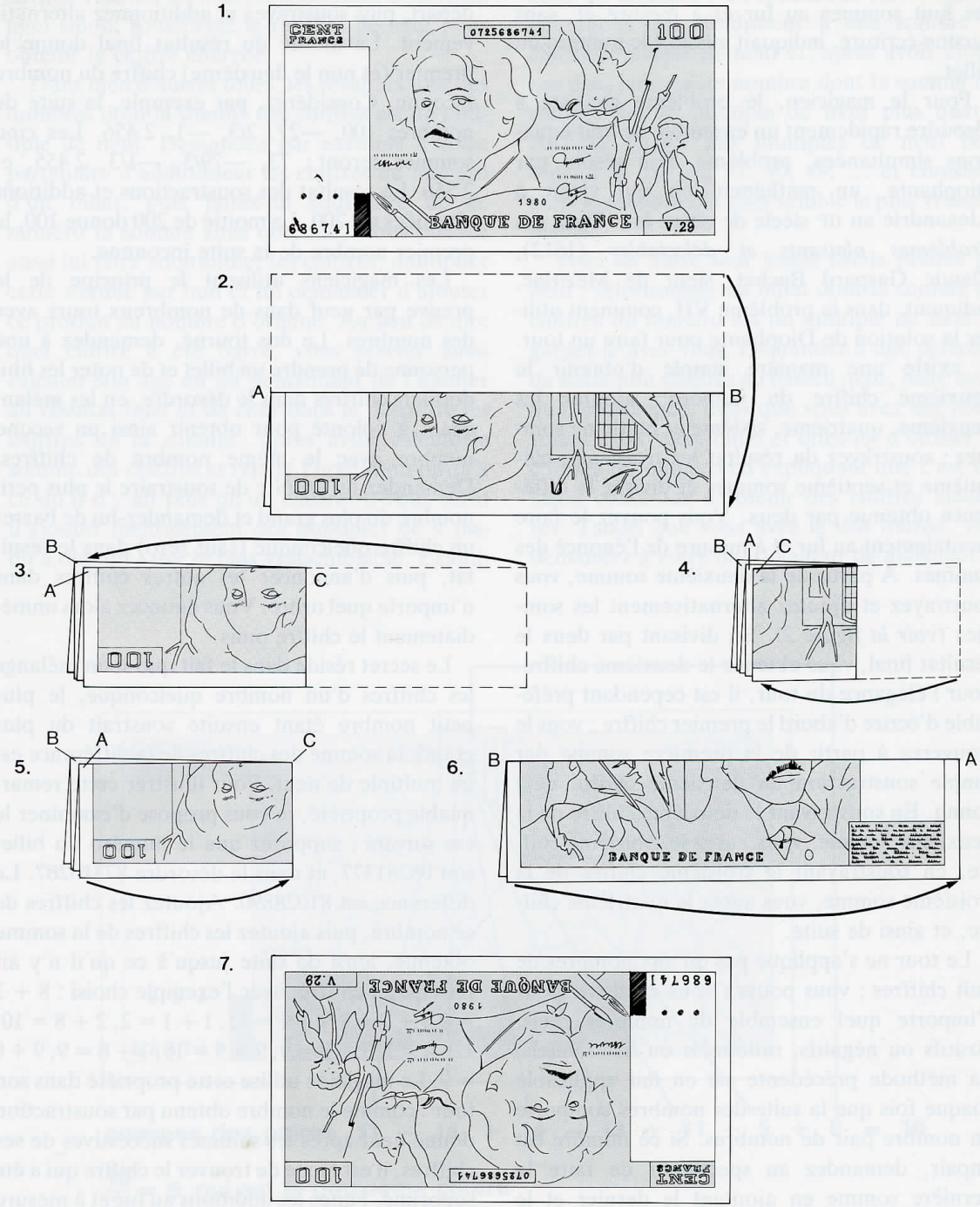
Du bon usage d'un billet 17

Les menus objets de la vie courante donnent souvent matière à casse-tête mathématiques. Oublions un instant la valeur de l'argent pour en étudier les aspects bizarres. Voici un curieux tour de pliage, bien connu des magiciens, fondé sur des opérations de symétrie. Le magicien tient le billet vertical, le portrait à l'endroit *(voir la figure 1)*. Il plie le billet en deux dans le sens de la longueur, en rabattant la moitié supérieure, puis il le plie deux fois de suite au milieu vers la gauche. Ensuite, il déplie le billet, en inversant apparemment les trois étapes précédentes, mais le portrait se retrouve à l'envers ! En revanche, lorsqu'un spectateur essaie d'imiter le magicien, le visage s'obstine à rester à l'endroit.

Le truc est dans le deuxième pli : on fait ce pli en amenant la moitié droite derrière la moitié gauche, alors qu'on fait le troisième pli de la manière inverse. Au contraire, lorsqu'on défait les deux plis, on déplie le billet deux fois vers l'avant, ce qui fait tourner le billet de 180 degrés autour d'un axe vertical (comparez les étapes 2 et 6). Pourtant, le résultat final est toujours surprenant si le magicien s'est bien entraîné et s'il réalise les trois plis du pliage rapidement et sans à-coup. Le dépliage doit au contraire être lent et circonspect et, pendant la manipulation, le magicien affirme avec la plus grande assurance qu'il refait exactement les trois mêmes étapes à l'envers.

Connaissez-vous le poker-billet ? Chacun des deux joueurs sort un billet de sa poche et, à tour de rôle, il annonce, comme au poker, en utilisant les chiffres du numéro comme si c'étaient des cartes. L'annonce consiste seulement à annoncer que tel chiffre se trouve au moins tel nombre de fois et on peut bien entendu dépasser le carré. À chaque tour, un joueur doit surenchérir sur l'annonce de l'adversaire ou appeler ; le bluff est conseillé. Après un appel, on dévoile les numéros et, à la différence du poker normal, le joueur qui a fait la dernière annonce peut tenir compte des numéros des deux billets pour satisfaire son annonce. Par exemple, s'il a dit « six 3 » et s'il y en a deux sur son billet et quatre ou davantage sur le billet de son adversaire, il empoche ce billet ; dans le cas contraire, il perd le sien. N'oubliez cependant pas les beaux théorèmes démontrés dans le chapitre 3 !

Royal Heath, agent de change à New York et magicien amateur, avait un tour favori : il demandait d'abord à un spectateur de sortir un billet de sa poche et de ne considérer que les huit derniers numéros. Il lui demandait ensuite d'annoncer la somme du premier et du deuxième chiffre, puis la somme du deuxième et du troisième chiffre, ensuite la somme du troisième et du quatrième chiffre, et ainsi de suite jusqu'au bout. Le spectateur devait calculer la huitième et dernière somme en ajoutant le dernier et le deuxième chiffre. R. Heath notait



1. Le retournement du billet.

ces huit sommes au fur et à mesure et, sans aucune écriture, indiquait aussitôt le numéro du billet.

Pour le magicien, le problème consiste à résoudre rapidement un ensemble de huit équations simultanées, problème déjà résolu par Diophante, un mathématicien qui vivait à Alexandrie au IIIe siècle de notre ère. Dans ses *Problèmes plaisants et délectables* (1612), Claude Gaspard Bachet, sieur de Méziriac, indiquait, dans le problème VII, comment utiliser la solution de Diophante pour faire un tour. Il existe une manière simple d'obtenir le deuxième chiffre du numéro : ajoutez les deuxième, quatrième, sixième et huitième sommes ; soustrayez du résultat les troisième, cinquième et septième sommes et divisez la différence obtenue par deux. Vous pouvez le faire mentalement au fur et à mesure de l'énoncé des sommes. À partir de la deuxième somme, vous soustrayez et ajoutez alternativement les sommes *(voir la figure 2)*. En divisant par deux le résultat final, vous obtenez le deuxième chiffre. Pour l'élégance du tour, il est cependant préférable d'écrire d'abord le premier chiffre : vous le trouverez à partir de la première somme par simple soustraction du deuxième chiffre déjà connu. En soustrayant le deuxième chiffre de la deuxième somme, vous aurez le troisième chiffre, en soustrayant le troisième chiffre de la troisième somme, vous aurez le quatrième chiffre, et ainsi de suite.

Le tour ne s'applique pas qu'aux nombres de huit chiffres : vous pouvez vous en servir pour n'importe quel ensemble de nombres réels, positifs ou négatifs, rationnels ou irrationnels. La méthode précédente est en fait applicable chaque fois que la suite des nombres comporte un nombre pair de nombres. Si ce nombre est impair, demandez au spectateur de faire la dernière somme en ajoutant le dernier et le premier nombre et, au lieu de laisser tomber la première somme, prenez-la comme point de départ, puis soustrayez et additionnez alternativement. La moitié du résultat final donne le premier (et non le deuxième) chiffre du nombre inconnu. Considérez, par exemple, la suite de nombres 100, —27, 2/3, —1, 2 456. Les cinq sommes seront : 73, —79/3, —1/3, 2 455, et 2 556. Le résultat des soustractions et additions alternées est 200. La moitié de 200 donne 100, le premier nombre de la suite inconnue.

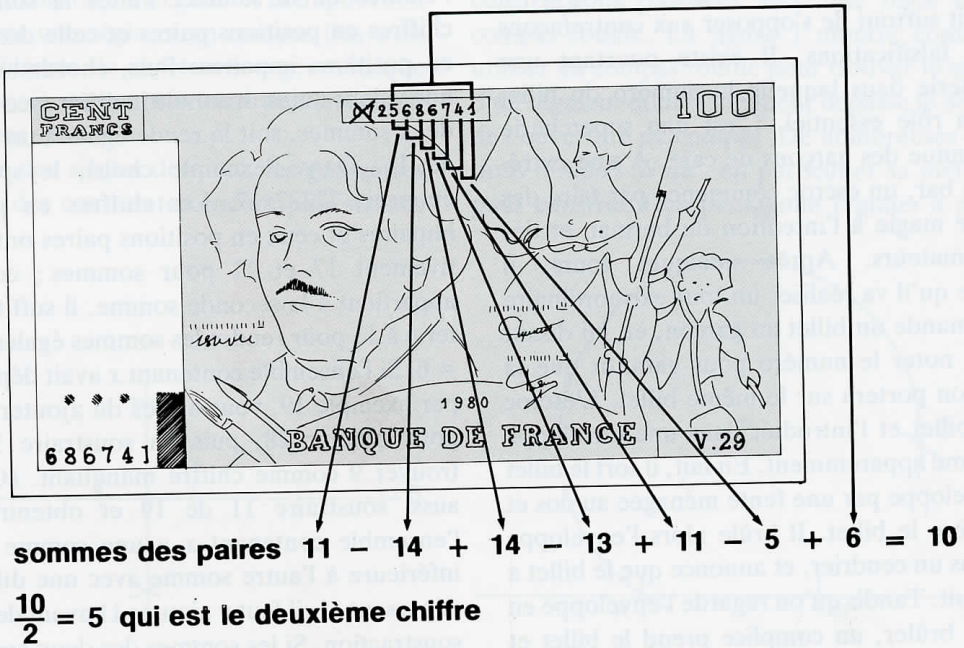
Les magiciens utilisent le principe de la preuve par neuf dans de nombreux tours avec des nombres. Le dos tourné, demandez à une personne de prendre un billet et de noter les huit derniers chiffres dans le désordre, en les mélangeant à volonté pour obtenir ainsi un second nombre avec le même nombre de chiffres. Demandez-lui ensuite de soustraire le plus petit nombre du plus grand et demandez-lui de barrer un chiffre quelconque (sauf zéro) dans le résultat, puis d'annoncer les autres chiffres dans n'importe quel ordre. Vous énoncez alors immédiatement le chiffre omis.

Le secret réside dans le fait que si on mélange les chiffres d'un nombre quelconque, le plus petit nombre étant ensuite soustrait du plus grand, la somme des chiffres de la différence est un multiple de neuf. Pour illustrer cette remarquable propriété, je vous propose d'examiner le cas suivant : supposez que le numéro du billet soit 06281377, et dans le désordre 87310267. La différence est 81028890. Ajoutez les chiffres de ce nombre, puis ajoutez les chiffres de la somme obtenue, ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un chiffre, avec l'exemple choisi : $8 + 1 = 9, 9 + 0 = 9, 9 + 2 = 11, 1 + 1 = 2, 2 + 8 = 10, 1 + 0 = 1, 1 + 8 = 9, 9 + 9 = 18, 1 + 8 = 9, 9 + 0 = 9$. Le magicien utilise cette propriété dans son tour : comme le nombre obtenu par soustraction donne neuf après les sommes successives de ses chiffres, il est facile de trouver le chiffre qui a été supprimé. Faites les additions au fur et à mesure que le spectateur annonce les chiffres, en retranchant neuf chaque fois que vous le pouvez. Si le

dernier résultat est neuf, le spectateur a barré un neuf sinon, soustrayez le résultat de neuf pour obtenir le chiffre cherché.

Dans bien d'autres tours, les résultats sont des nombres dont la somme des chiffres est un multiple de neuf. Demandez par exemple à votre partenaire d'additionner les chiffres du numéro d'un billet, puis faites-lui soustraire de ce numéro la somme ainsi obtenue. Vous pouvez aussi lui faire additionner les chiffres, multiplier cette somme par huit et lui demander d'ajouter ce produit au nombre d'origine. Au lieu de dire quel chiffre a été barré, vous pouvez aussi calculer son âge en lui demandant de l'ajouter au résultat final et de citer dans le désordre les chiffres de la somme : après avoir calculé la somme des chiffres et répété l'opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un chiffre, il vous suffit d'ajouter mentalement des multiples de 9 jusqu'à obtenir l'âge le plus vraisemblable. Examinons un exemple : un spectateur fait toutes les opérations qui conduisent à une somme de chiffres multiple de neuf et, après avoir ajouté son âge, indique un nombre dont la somme des chiffres est un multiple de neuf plus quatre. Ajoutez quatre aux multiples de neuf pour obtenir 4, 13, 22, 31, 40, 49, ... et choisissez alors le nombre qui vous semble le plus vraisemblable.

Voici un autre tour fondé sur la preuve par neuf : sélectionnez un billet dont la somme des chiffres du numéro est un multiple de neuf, et gardez-le avec vous. Demandez à une personne de noter huit chiffres au hasard mais, juste avant qu'il commence, dites que vous avez une idée ; sortez alors votre billet et dites-lui d'utiliser les chiffres du numéro en expliquant que c'est une façon commode d'obtenir des chiffres aléatoires. Tandis que vous avez le dos tourné, vous demandez à votre interlocuteur de mélanger les



2. La résolution d'un système de huit équations.

chiffres du numéro et vous lui demandez d'ajouter les deux nombres de huit chiffres. Vous pouvez alors réaliser l'un quelconque des tours précédents. Il peut même réaliser autant de combinaisons dans le désordre qu'il le souhaite, leur somme sera toujours neuf ; il peut en outre multiplier le résultat par n'importe quel nombre. S'il se méfie de votre billet et insiste pour utiliser l'un des siens, rabattez-vous sur les tours décrits précédemment.

Le tour arithmétique suivant est un peu plus difficile à réaliser. Une personne écrit le numéro de son propre billet, le renverse et ajoute les deux nombres ; dans le résultat, elle barre un chiffre et lit les autres à haute voix, en remplaçant le chiffre barré par x. Supposons que le numéro du billet soit 30956714 ; la personne y ajoute 41765903 et dit ainsi la somme obtenue : 72722x17. Pouvez-vous découvrir le chiffre manquant sans avoir recours aux données initiales ?

Les numéros des billets n'ont bien sûr pas été conçus pour les tours de magie ; au départ, il s'agissait surtout de s'opposer aux contrefaçons et aux falsifications. Il existe pourtant une escroquerie dans laquelle le numéro du billet joue un rôle essentiel. C'est une supercherie bien connue des garçons de café. À une extrémité du bar, un escroc commence par faire des tours de magie à l'intention du barman et des consommateurs. Après quelques tours, il annonce qu'il va réaliser un tour extraordinaire et il demande un billet au garçon, en lui disant de bien noter le numéro pour garantir que la restitution portera sur le même billet. L'escroc plie le billet et l'introduit dans une enveloppe qu'il ferme apparemment. En fait, il sort le billet de l'enveloppe par une fente ménagée au dos et il récupère le billet. Il brûle alors l'enveloppe vide dans un cendrier, et annonce que le billet a été détruit. Tandis qu'on regarde l'enveloppe en train de brûler, un complice prend le billet et commande une consommation à un autre garçon, à l'autre extrémité du bar. Lorsque l'enveloppe est consumée, le magicien annonce que le billet est dans la caisse du bar et qu'il suffit d'en vérifier le numéro. Les consommateurs sont stupéfaits et les deux escrocs empochent la monnaie.

RÉPONSES

Le problème posé concernait le chiffre remplacé par x dans la somme d'un numéro et de l'inverse de ce numéro. Lorsqu'un nombre ayant un nombre pair de chiffres et son inverse sont ajoutés, la somme est toujours un multiple de 11. Or, tous les multiples de 11 ont la propriété suivante : ou bien la somme des chiffres en positions impaires est égale à la somme des chiffres en positions paires, ou bien les sommes diffèrent d'un multiple de 11. On peut donc retrouver facilement le chiffre x omis dans l'énoncé de la somme. Faites la somme des chiffres en positions paires et celle des chiffres en positions impaires. Puis, choisissez pour x une valeur qui, soit annule la différence entre les deux sommes, soit la rende égale à un multiple de 11. Dans l'exemple choisi, le spectateur énonçait 72722x17. Les chiffres en positions impaires et ceux en positions paires ont respectivement 17 et 11 pour sommes ; comme x appartient à la seconde somme, il suffit d'ajouter 6 à 11 pour rendre les sommes égales, d'où $x = 6$. Si l'ensemble contenant x avait dépassé 17, par exemple 19, vous auriez dû ajouter 11 à 17 pour obtenir 28, puis en soustraire 19 pour trouver 9 comme chiffre manquant. (On peut aussi soustraire 11 de 19 et obtenir 9.) Si l'ensemble contenant x a une somme qui est inférieure à l'autre somme avec une différence dépassant 11, il faut y ajouter 11 avant de faire la soustraction. Si les sommes des deux ensembles sont égales, le chiffre manquant est 0.