221. Die in **220** erwähnten vier Formeln gelten für eine beliebige rationale ganze Funktion $F(z)$ (in diesem Falle brechen natürlich die Reihen ab).

222. Die in **220** erwähnten Formeln 1. 2. sind auch für eine beliebige rationale gebrochene Funktion $F(z)$ gültig, wenn der Realteil von z die Realteile aller im Endlichen gelegenen Pole von $F(z)$ übertrifft, Formel 1. allerdings mit der Einschränkung, daß $F(z)$ für $z=0, 1, 2, 3, \cdots$ regulär ist. — Sind auch die Formeln 3. 4. für gebrochene Funktionen gültig?

Im folgenden (**223—226**) ist

$$\Delta^n a_k = a_{k+n} - \binom{n}{1} a_{k+n-1} + \binom{n}{2} a_{k+n-2} - \cdots + (-1)^n a_k$$

gesetzt.

223. Unter a_k, $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, beliebige Konstanten verstanden, gilt

$$(1-z)^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta^n a_k z^{n+k}.$$

224. $F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$ gesetzt, besteht

$$\frac{1}{1+t} F\left(\frac{t}{1+t}\right) = a_0 + \Delta a_0 t + \Delta^2 a_0 t^2 + \cdots + \Delta^n a_0 t^n + \cdots .$$

225. $F(z) = a_0 + 2a_1 z + 2a_2 z^2 + \cdots + 2a_n z^n + \cdots, \qquad a_{-n} = a_n$ gesetzt, besteht

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t}} F\left(\frac{1+2t-\sqrt{1+4t}}{2t}\right) = a_0 + \Delta^2 a_{-1} t + \Delta^4 a_{-2} t^2 + \cdots + \Delta^{2n} a_{-n} t^n + \cdots.$$

226.

$$F(z) = 2a_1 z + 2a_2 z^2 + 2a_3 z^3 + \cdots + 2a_n z^n + \cdots, \qquad a_{-n} = -a_n$$

gesetzt, besteht

$$\frac{1}{t} F\left(\frac{1+2t-\sqrt{1+4t}}{2t}\right) = a_1 - a_{-1} + (\Delta^2 a_0 - \Delta^2 a_{-2}) t + (\Delta^4 a_{-1} - \Delta^4 a_{-3}) t^2 + \cdots + (\Delta^{2n} a_{-n+1} - \Delta^{2n} a_{-n-1}) t^n + \cdots .$$

227. $$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi z (1-z)} .$$

228. $\sin \pi z$ ist eine eindeutige Funktion von $w = z(1-z)$. Entwickelt man $\sin \pi z$ nach den Potenzen von w, dann sind sämtliche Koeffizienten dieser Entwicklung (abgesehen vom absoluten Glied) positiv [**227**].