60.21M

SESSION 2006

Filière MP

MATHÉMATIQUES MPI 1

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 6 heures

L'usage de calculatrice est interdit

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Soit G un groupe et soit S une partie de G. On appelle sous-groupe de G engendré par S l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent S. On dit que S *engendre* G si le sous-groupe de G engendré par S est G.

Un élément g de G est *d'ordre fini* si le sous-groupe de G engendré par $\{g\}$ est fini. On appelle alors *ordre* de g le cardinal de ce sous-groupe. Si G est fini, le cardinal de tout sous-groupe de G divise le cardinal de G ; en particulier, tout élément de G est d'ordre fini et son ordre divise le cardinal de G.

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul. Soit $\mathbf{k}$ un corps ; on note

- $\mathscr{M}_n(\mathbf{k})$ la $\mathbf{k}$-algèbre des matrices carrées à n lignes à coefficients dans $\mathbf{k}$;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{k})$;
- I_n l'élément neutre de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$, c'est-à-dire la matrice identité de taille n ;
- $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ formé des matrices de déterminant 1 ;
- $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q})$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

Pour tous éléments distincts i et j de $\{1,\dots,n\}$, on note $E_{i,j}$ l'élément de $\mathscr{M}_n(\mathbf{Q})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ième ligne et de la j-ième colonne, qui vaut 1. On pose $M_{i,j} = I_n + E_{i,j}$; c'est un élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q})$ (on pourra utiliser l'expression de l'inverse d'une matrice en fonction de sa comatrice).

2. Pour tous entiers distincts i et j dans $\{1,\dots,n\}$ et tout entier *relatif* m, calculer $(M_{i,j})^m$.

3. Soit M une matrice à n colonnes, non nécessairement carrée, à coefficients dans $\mathbf{Z}$. On appelle *opération élémentaire restreinte sur les colonnes de M* la multiplication à droite de M par une matrice $(M_{i,j})^m$, où $m \in \mathbf{Z}$ et où i et j sont des éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$. Comment s'expriment les colonnes de la matrice $M(M_{i,j})^m$ en fonction de celles de M ?

4. On suppose $n \geqslant 2$. Soient $a_1,\dots,a_n$ des entiers relatifs. Montrer que l'on peut, par des opérations élémentaires restreintes sur ses colonnes, transformer la matrice ligne

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

en la matrice ligne

$$\begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où d est le pgcd positif de $a_1, a_2, \dots, a_n$.

5. Montrer que l'ensemble des matrices $M_{i,j}$, pour i et j distincts dans $\{1,\dots,n\}$, engendre le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$.

6. Soit p un nombre premier, de sorte que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps.

a) Montrer que la réduction modulo p des coefficients d'une matrice permet de définir un morphisme de groupes

$$\varphi_{n,p} : \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

b) Montrer que $\varphi_{n,p}$ est surjectif (on pourra utiliser la question 4 et raisonner par récurrence sur n).

Sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$

7. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

a) Montrer que tout élément M de G est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ et que

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M^{-1}) \qquad\qquad |\,\mathrm{Tr}(M)| \leqslant n$$

Quels sont les éléments de G de trace n ? Quels sont ceux de trace $-n$?

b) Montrer que la matrice

$$U = \sum_{M \in G} {}^t M M$$

est symétrique définie positive.

c) On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire de matrice U dans la base canonique. Montrer que les endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est un élément de G sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

8. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

a) Montrer que le groupe G est cyclique (on pourra utiliser la question 7.c)).

b) Montrer que le cardinal de G est 1, 2, 3, 4 ou 6.

c) Déterminer tous les éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ d'ordre 2.

d) Caractériser les éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ d'ordre 3, puis 4, puis 6, à l'aide de leur trace.

e) Pour chaque $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, donner un exemple de sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ de cardinal g.

9. Soit M un élément de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ d'ordre fini. Déterminer les valeurs possibles de sa trace et déterminer l'ordre de M en fonction de celle-ci.

10. Considérons des matrices carrées, à coefficients dans un corps $\mathbf{k}$, dont les lignes et les colonnes sont indexées par un ensemble fini I pas nécessairement ordonné. Si $M = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ et $N = (b_{i,j})_{i,j \in I}$ sont de telles matrices, on définit la trace de M comme $\sum_{i \in I} a_{i,i}$, la somme $M + N$ comme la matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j \in I}$ et le produit MN comme la matrice $(c_{i,j})_{i,j \in I}$, où $c_{i,j} = \sum_{k \in I} a_{i,k} b_{k,j}$. On définit ainsi une $\mathbf{k}$-algèbre ; on notera $\mathscr{M}_I(\mathbf{k})$ cette algèbre et $\mathrm{GL}_I(\mathbf{k})$ le groupe de ses éléments inversibles. Si I est de cardinal n, le choix d'une bijection entre I et $\{1, \ldots, n\}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{k}$-algèbres entre $\mathscr{M}_I(\mathbf{k})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{k})$. On identifiera en particulier $\mathrm{GL}_{\{1,\ldots,n\}}(\mathbf{k})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$.

Soient I et I' des ensembles finis, soit $M = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ un élément de $\mathscr{M}_I(\mathbf{R})$ et soit $M' = (b_{i',j'})_{i',j' \in I'}$ un élément de $\mathscr{M}_{I'}(\mathbf{R})$. On définit un élément $M \star M' = (c_{(i,i'),(j,j')})$ de $\mathscr{M}_{I \times I'}(\mathbf{R})$ en posant

$$c_{(i,i'),(j,j')} = a_{i,j} b_{i',j'}$$

pour tous $i, j \in I$ et $i', j' \in I'$.

Enfin, pour tout entier r strictement positif, on définit un élément $M^{\star r}$ de $\mathscr{M}_{I^r}(\mathbf{R})$ par récurrence sur r en posant $M^{\star 1} = M$ et $M^{\star r} = M^{\star(r-1)} \star M$.

a) Calculer la trace de $M \star M'$ en fonction de celles de M et de M'.

b) Soient N un élément de $\mathscr{M}_I(\mathbf{R})$ et N' un élément de $\mathscr{M}_{I'}(\mathbf{R})$. Exprimer la matrice $(MN) \star (M'N')$ en fonction des matrices $M \star M'$ et $N \star N'$.

c) Soit r un entier strictement positif. Montrer qu'en associant à M la matrice $M^{\star r}$, on définit un morphisme de groupes

$$\psi_r : \mathrm{GL}_I(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_{I^r}(\mathbf{R})$$

11. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de cardinal g. On pose

$$S = \sum_{M \in G} M$$

a) Montrer que la trace de S est un entier divisible par g (on pourra calculer S^2).

b) Soit r un entier strictement positif. Décrire le noyau de la restriction à G du morphisme de groupes

$$\psi_r : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_{\{1,\ldots,n\}^r}(\mathbf{R})$$

défini dans la question 10.c) (on pourra étudier la trace des éléments de ce noyau).

c) Montrer que pour tout entier naturel r, la somme $\sum_{M \in G} \mathrm{Tr}(M)^r$ est un entier divisible par g.

12. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ de cardinal g.

a) Soit $\{t_0, t_1, \ldots, t_s\}$ l'ensemble des traces (distinctes) des éléments de G, avec $t_0 = n = \mathrm{Tr}(I_n)$. Montrer que

$$(n - t_1) \cdots (n - t_s)$$

est un entier divisible par g (on pourra poser $P(X) = (X - t_1) \cdots (X - t_s)$ et considérer la somme $\sum_{M \in G} P\big(\mathrm{Tr}(M)\big)$).

b) En déduire que g divise $(2n)!$ et que si n est impair, g divise $(2n-1)!$.

c) Si $n = 3$, montrer que g divise 24 (on pourra utiliser la question 9).

13. a) Construire pour chaque entier $n \geqslant 2$ un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ de cardinal $2^{n-1}n!$ (si T est l'ensemble des vecteurs colonnes à n lignes dont tous les coefficients sont nuls sauf un qui vaut ± 1, on pourra considérer les matrices qui appliquent l'ensemble T dans lui-même).

b) En déduire le cardinal maximal d'un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$.

14. Soit p un nombre premier et soit M un élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ d'ordre p. On note m le pgcd positif de tous les coefficients de $M - I_n$.

a) Montrer que m divise p (on pourra écrire $M = I_n + mN$ et développer $(I_n + mN)^p$).

b) Montrer que soit $m = 1$, soit $m = p = 2$.

15. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ de cardinal g.

a) Montrer que la restriction à G du morphisme de groupes $\varphi_{n,3} : \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ défini dans la question 6.a) est injective.

b) En déduire que g divise $\frac{1}{2}(3^n - 1)(3^n - 3)\cdots(3^n - 3^{n-1})$.

c) Si $n = 4$, montrer que g divise 5760.

16. Montrer que tout groupe fini de cardinal g est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{SL}_g(\mathbf{Z})$.

Morphismes de groupes et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$

17. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes surjectif

$$\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

(on pourra montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est isomorphe à un groupe de permutations).

18. On suppose dans cette question $n \geqslant 3$.

a) Soient i, j et k des éléments deux à deux distincts de $\{1, \ldots, n\}$. Calculer le produit

$$M_{i,j}M_{j,k}(M_{i,j})^{-1}(M_{j,k})^{-1}$$

b) Soit G un groupe commutatif. Montrer que tout morphisme de groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \to G$ est constant.

19. Soit G un groupe engendré par une partie finie et soit H un groupe fini.

a) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de morphismes de groupes de G dans H.

b) Soit $u : G \to G$ un morphisme de groupes surjectif. Montrer que pour tout morphisme de groupes $v : G \to H$, on a $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

20. En déduire que tout morphisme de groupes surjectif $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ est bijectif.