Analyse de la différence des racines carrées entre deux nombres premiers successifs

Introduction

Soit p_n et p_{n+1} deux nombres premiers successifs. Nous nous intéressons à la différence des racines carrées :

$$\Delta = \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}.$$

Supposons que l'on ait une borne sur l'écart entre ces nombres premiers successifs :

$$p_{n+1} - p_n < \frac{\ln(n) \cdot p_n}{n},$$

pour n grand. Nous allons analyser l'impact de cette borne sur Δ.

Formule générale pour la différence des racines carrées

La différence des racines carrées peut être écrite comme suit :

$$\Delta = \frac{p_{n+1} - p_n}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}}.$$

Substituons la borne pour $p_{n+1} - p_n$:

$$\Delta < \frac{\frac{\ln(n) \cdot p_n}{n}}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}}.$$

Pour de grandes valeurs de p_n, on a l'approximation $\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n} \approx 2\sqrt{p_n}$, ce qui donne :

$$\Delta < \frac{\ln(n) \cdot p_n}{n \cdot 2\sqrt{p_n}} = \frac{\ln(n)}{2n}\sqrt{p_n}.$$

Comportement de Δ pour de grandes valeurs de n

Ainsi, la différence des racines carrées est asymptotiquement bornée par :

$$\Delta < \frac{\ln(n)}{2n}\sqrt{p_n}.$$

Cela montre que la différence entre les racines carrées des nombres premiers successifs décroît comme $\frac{\ln(n)}{n}\sqrt{p_n}$ pour $n \to \infty$, ce qui implique une décroissance rapide à mesure que n augmente.

Conclusion

L'inégalité $p_{n+1} - p_n < \frac{\ln(n) \cdot p_n}{n}$ implique que la différence des racines carrées entre deux nombres premiers successifs décroît rapidement avec n. Ce comportement est compatible avec la conjecture de Cramér, mais avec un taux de décroissance plus rapide, ce qui donne une estimation plus précise des écarts entre les racines carrées des nombres premiers successifs.