Exercice 2

1ère partie : préliminaires probabilistes

On considère deux variables aléatoires réelles *indépendantes* :

$$U \leadsto \mathcal{N}(0, \sigma^2) \ (\sigma > 0)$$
$$X \leadsto \mathcal{B}(1, p) \text{ [loi de BERNOULLI] } (p \in]0, 1[).$$

a étant un paramètre réel, on définit la variable aléatoire : $Y = aX + U$.

1. Calculer $EY, VY, E(XY), V(XY)$.

2.
   a. Calculer la fonction de répartition de Y [on retient, par convention qu'elle s'écrit : $P\{Y \leq y\}$]. On l'exprimera en fonction de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, notée H.
   b. En déduire la densité de la loi de Y.

3.
   a. Calculer la fonction de répartition de la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
   b. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y \leq y$, puis celle de X sachant $y < Y \leq y + \eta$ $(\eta > 0)$.
   c. On note : $P\{X = x / Y = y\} = \lim_{\eta \to 0^+} P\{X = x / y < Y \leq y + \eta\}$.
   Calculer la loi $P\{X = 1 / Y = y\}$. *On montrera qu'elle s'exprime, dans le cas* $a > 0$, *au moyen de la fonction de répartition d'une loi logistique de la forme :* $\dfrac{1}{1 + Ae^{-By}}$.

4. On pose : $Z = Y(1 - X)$. Calculer la fonction de répartition de Z (exprimée au moyen de la fonction H définie ci-dessus).

5. Lorsqu'on ne peut pas observer la variable aléatoire X, on cherche à en construire une approximation à partir de l'observation de la variable Y. Pour cela, on définit :

$$X^* = \left| \begin{array}{l} 1 \ si \ Y > c \\ 0 \ si \ Y \leq c \end{array} \right., \text{ où } c \text{ est un réel donné. On suppose ici : } \boxed{a > 0}.$$

   Déterminer la valeur de c minimisant l'erreur quadratique de prévision : $E(X - X^*)^2$.

2ème partie : estimation

On considère maintenant une suite de couples de variables aléatoires $(X_i, U_i)_{i=1,\ldots,N}$, indépendants et dont les lois et les constructions sont identiques à celle du couple (X, U) de la première partie.
On pose également : $Y_i = aX_i + U_i$. Les observations disponibles sont les couples $(X_i, Y_i)_{i=1,\ldots,N}$.

6.

   a. Donner l'expression de l'estimateur des moindres carrés ordinaires de a, soit $\hat{a}_N$, en fonction de a et des X_i et des U_i.
   b. Étudier la convergence en probabilité de l'estimateur $\hat{a}_N$ quand $N \to +\infty$.
   c. Étudier la convergence en loi de $\sqrt{N}(\hat{a}_N - a)$ quand $N \to +\infty$.

7. Comment estimeriez-vous les paramètres p et σ^2 ? Étudier la convergence en probabilité des estimateurs proposés.