

## Transformation itérative de polygones inscrits dans un cercle

C'est un résultat bien connu que dans tout triangle, la bissectrice d'un angle et la médiatrice du côté opposé à cet angle se coupent au milieu de l'arc du cercle circonscrit défini par les deux sommets associés à ce côté. En effet, le milieu de cet arc appartient bien à la médiatrice de ce côté, qui n'est autre que la corde qui sous-tend cet arc, ainsi qu'à la bissectrice de l'angle opposé, qui définit deux angles inscrits égaux, donc deux arcs égaux.

En conséquence, à partir d'un triangle, on peut définir un autre triangle que j'appellerai « transformé » du premier, qui partage avec le premier le même cercle circonscrit et qui est formé par les milieux des trois arcs de cercle délimités par les sommets du premier triangle.

J'ai donc commencé par ce cas particulier du triangle et des milieux des arcs, en raisonnant de manière géométrique, et par la suite, de généralisation en généralisation, et en adoptant un raisonnement plus calculatoire, j'en suis arrivé à démontrer que :

Toute suite de polygones inscrits dans un cercle et transformés successivement les uns des autres avec un rapport  $k$  compris entre 0 et 1 converge vers le polygone régulier de même ordre.

### A. Triangle

Soient un cercle, orienté à partir d'une origine, et un triangle quelconque  $A_1A_2A_3$  inscrit dans ce cercle.

Les sommets  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  ont pour abscisses circulaires  $a_1$ ,  $a_2$ , et  $a_3$  telles que  $0 < a_1 < a_2 < a_3 < 2\pi$ .

Les angles du triangle ont pour mesures, comme angles inscrits dans le cercle :  
 $A_2A_1A_3 = \alpha_1 = (a_3 - a_2)/2$      $A_3A_2A_1 = \alpha_2 = (2\pi + a_1 - a_3)/2 = \pi + (a_1 - a_3)/2$   
 et  $A_1A_3A_2 = \alpha_3 = (a_2 - a_1)/2$     (ce qui vérifie  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ ).

Soit la transformation qui associe au triangle  $A_1A_2A_3$  le triangle  $M_1M_2M_3$  dont les sommets  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  sont les milieux respectifs des trois arcs  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ , et  $A_3A_1$ , qui ont pour abscisses circulaires  $m_1$ ,  $m_2$ , et  $m_3$ , données par les relations :  $m_1 = (a_2 + a_1)/2$      $m_2 = (a_3 + a_2)/2$      $m_3 = (2\pi + a_1 + a_3)/2 = \pi + (a_1 + a_3)/2$

Les angles de ce triangle transformé de premier ordre ont donc pour mesures respectives :

$$\begin{aligned} M_2M_1M_3 = \mu_1 &= (m_3 - m_2)/2 = \frac{1}{2} [\pi + (a_1 + a_3)/2 - (a_3 + a_2)/2] \\ &= \frac{1}{2} [\pi + (a_1 - a_2)/2] = \frac{1}{2} (\pi - \alpha_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3M_2M_1 = \mu_2 &= (2\pi + m_1 - m_3)/2 = \frac{1}{2} [2\pi + (a_2 + a_1)/2 - \pi - (a_1 + a_3)/2] \\ &= \frac{1}{2} [\pi + (a_2 - a_3)/2] = \frac{1}{2} (\pi - \alpha_1) \end{aligned}$$

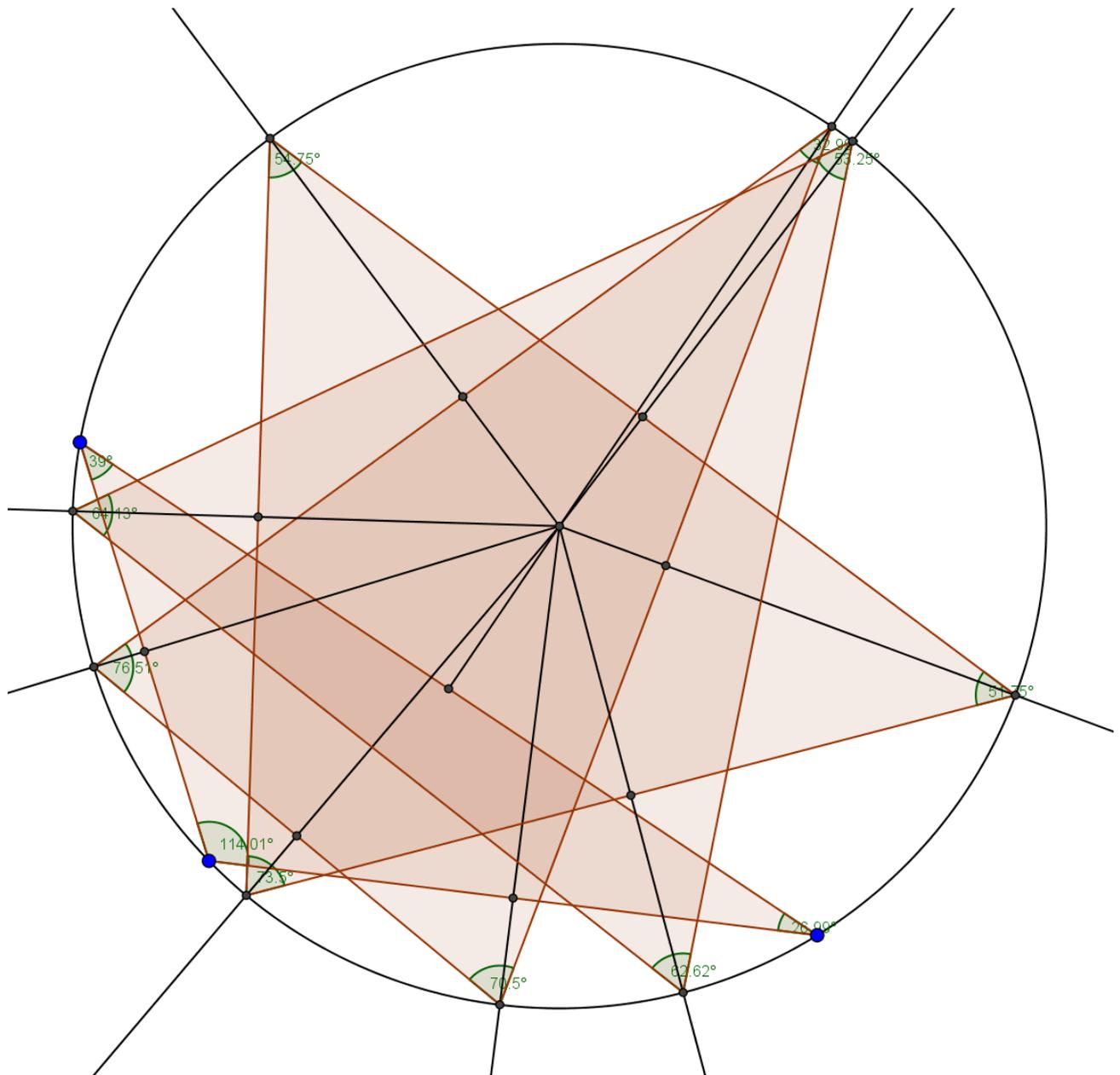
$$\begin{aligned} M_1M_3M_2 = \mu_3 &= (m_2 - m_1)/2 = \frac{1}{2} [(a_3 + a_2)/2 - (a_2 + a_1)/2] = \frac{1}{2} (a_3 - a_1)/2 \\ &= \frac{1}{2} (\pi - \alpha_2) \quad (\text{car } \alpha_2 = \pi + (a_1 - a_3)/2 \text{ donne } (a_3 - a_1)/2 = \pi - \alpha_2) \end{aligned}$$

(ce qui vérifie  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \pi$ ).

Si les angles  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont tels que  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ , alors  $\mu_1 < \mu_3 < \mu_2$ , et  $\mu_2 - \mu_1 = \frac{1}{2} (\alpha_3 - \alpha_1)$  : quand on passe d'un triangle à son transformé, l'écart de mesure EM entre le plus grand et le plus petit des angles est divisé par 2. On retrouve le même résultat quel que soit l'ordre des mesures des trois angles du triangle de départ.

Donc, si l'on réitère l'opération n fois, l'écart de mesure EM est divisé par  $2^n$  et tend donc vers 0, et les triangles successifs tendent de manière asymptotique vers un triangle équilatéral. Plus exactement, on aboutit à une paire de triangles pratiquement équilatéraux disposés tête-bêche, comme dans une étoile à six branches, qui s'échangent l'un en l'autre et réciproquement.

Ce qui m'a mis sur la piste de ce résultat, c'est de considérer un triangle pratiquement réduit à un point du cercle, dont le transformé de premier ordre est un triangle pratiquement réduit au diamètre issu du point, et le transformé de second ordre est le triangle isocèle rectangle dont la base est perpendiculaire à ce diamètre. Le transformé de troisième ordre est alors le triangle isocèle dont les sommets ont pour abscisses angulaires, si l'on prend comme origine le point-triangle initial,  $\pi/4$ ,  $\pi$  et  $7\pi/4$ . En poursuivant les opérations, j'ai constaté que l'on se rapproche de plus en plus d'un triangle équilatéral.



La figure ci-dessus est ce qu'on obtient en partant du triangle obtus (sommets en gros points bleus) d'angles  $114^\circ$ ,  $39^\circ$  et  $27^\circ$ . Les angles des trois premiers triangles transformés successifs ont à peu près les valeurs suivantes :

- le premier,  $76,5^\circ$ ,  $70,5^\circ$  et  $33^\circ$  ;
- le deuxième,  $73,5^\circ$ ,  $54,75^\circ$  et  $51,75^\circ$  ;
- et le troisième,  $64,1^\circ$ ,  $62,6^\circ$  et  $53,3^\circ$ .

Généralisation :

Si on considère, non plus les milieux des arcs, mais des points  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  qui les divisent dans un même rapport, en écrivant, avec  $0 < k < 1$  :

$$b_1 = a_1 + k(a_2 - a_1) \quad b_2 = a_2 + k(a_3 - a_2) \quad b_3 = a_3 + k(2\pi + a_1 - a_3)$$

on obtient pour les angles les expressions suivantes :

$$\beta_1 = (b_3 - b_2)/2 = (a_3 - a_2)/2 + k(2\pi + a_1 - a_3)/2 - k(a_3 - a_2)/2$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \alpha_1 + k(\alpha_2 - \alpha_1), \text{ et de même, } \beta_2 = \alpha_2 + k(\alpha_3 - \alpha_2) \text{ et } \beta_3 = \alpha_3 + k(\alpha_1 - \alpha_3).$$

Or, dans tout triangle non équilatéral, il y a au moins un angle inférieur à  $\pi/3$ , et au moins un angle supérieur à  $\pi/3$ , on a donc toujours  $\alpha_1$  inférieur à  $\pi/3$ , et  $\alpha_3$  supérieur à  $\pi/3$ , et l'on peut donc, quel que soit le triangle donné, choisir le point origine des abscisses circulaires et le sens d'orientation du cercle de telle sorte que l'inégalité  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$  soit vérifiée. Il vient alors :

$$\beta_1 - \alpha_1 = k(\alpha_2 - \alpha_1) > 0,$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = k(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)(k - 1) < 0,$$

$$\Rightarrow \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2$$

On montre de même que  $\alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3$  et  $\alpha_1 < \beta_3 < \alpha_3$ , ce qui permet d'écrire :

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 \quad \text{et} \quad \alpha_1 < \beta_3 < \alpha_3$$

Et l'on voit ainsi que, où que vienne se placer  $\beta_3$  dans le classement des cinq autres angles, la différence la plus grande en valeur absolue parmi  $\beta_2 - \beta_1$ ,  $\beta_3 - \beta_2$  et  $\beta_3 - \beta_1$  sera toujours inférieure à  $\alpha_3 - \alpha_1$ . Donc, quand on passe d'un triangle à son transformé, l'écart de mesure entre le plus grand et le plus petit des angles diminue dans tous les cas de figure, donc le triangle se rapproche d'un triangle équilatéral.

Les expressions de ces écarts sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_2 - \beta_1 &= \alpha_2 + k(\alpha_3 - \alpha_2) - \alpha_1 - k(\alpha_2 - \alpha_1) = \alpha_2 - \alpha_1 + k(\alpha_3 - 2\alpha_2 + \alpha_1) \\ &= \alpha_2 - \alpha_1 + k(\pi - 3\alpha_2) \end{aligned}$$

$$\text{De même, } \beta_3 - \beta_2 = \alpha_3 - \alpha_2 + k(\pi - 3\alpha_3) \text{ et } \beta_3 - \beta_1 = \alpha_3 - \alpha_1 - k(\pi - 3\alpha_1).$$

Donc, selon que  $\alpha_2$  est inférieur ou supérieur à  $\pi/3$ ,  $\beta_2 - \beta_1$  est respectivement supérieur ou inférieur à  $\alpha_2 - \alpha_1$ . Par contre, puisque  $\alpha_3$  est supérieur à  $\pi/3$ ,  $\beta_3 - \beta_2$  est toujours inférieur à  $\alpha_3 - \alpha_2$ , et puisque  $\alpha_1$  est inférieur à  $\pi/3$ ,  $\beta_3 - \beta_1$  est toujours inférieur à  $\alpha_3 - \alpha_1$ .

Voici une autre démonstration (je rappelle que, par hypothèse,  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ) :

$$\beta_1 = \alpha_1 + k (\alpha_2 - \alpha_1) \quad \beta_2 = \alpha_2 + k (\alpha_3 - \alpha_2) \quad \beta_3 = \alpha_3 - k (\alpha_3 - \alpha_1)$$

Ce qu'on peut écrire :

$$\beta_1 = \alpha_1 + k \delta_1 \quad \beta_2 = \alpha_2 + k \delta_2 \quad \beta_3 = \alpha_3 - k (\delta_1 + \delta_2)$$

D'où il vient

$$\beta_2 - \beta_1 = \eta_1 = \delta_1 + k (\delta_2 - \delta_1) = (1 - k) \delta_1 + k \delta_2$$

$$\beta_3 - \beta_2 = \eta_2 = \delta_2 - k (\delta_1 + 2\delta_2) = -k \delta_1 + (1 - 2k) \delta_2$$

$$\beta_3 - \beta_1 = \eta_3 = \eta_1 + \eta_2 = (1 - 2k) \delta_1 + (1 - k) \delta_2$$

Ce qui, puisque  $0 < k < 1$ , permet de montrer que

$$\eta_1 < (\delta_1 + \delta_2), \quad \eta_2 < (\delta_1 + \delta_2), \quad \text{et} \quad \eta_3 < (\delta_1 + \delta_2),$$

autrement dit, toutes les différences entre les valeurs des angles du triangle transformé, et donc la plus grande des trois, sont inférieures à la plus grande de celles du triangle initial,  $(\alpha_3 - \alpha_1)$ , qui est égale à  $(\delta_1 + \delta_2)$ . Ce qui signifie bien que le triangle transformé est plus proche d'un triangle équilatéral que le triangle initial. Par conséquent, au fur et à mesure qu'on répète l'opération, on se rapproche de plus en plus du triangle régulier.

Pour le triangle transformé de deuxième ordre, les angles  $\gamma$  et les écarts entre angles  $\theta$  s'écrivent :

$$\gamma_1 = \beta_1 + k \eta_1 \quad \gamma_2 = \beta_2 + k \eta_2 \quad \gamma_3 = \beta_3 - k (\eta_1 + \eta_2) \quad \text{et finalement :}$$

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \theta_1 = (1 - 2k) \delta_1 + k (2 - 3k) \delta_2$$

$$\gamma_3 - \gamma_2 = \theta_2 = (1 - 2k) \delta_2 - k (2 - 3k) (\delta_1 + \delta_2)$$

$$\gamma_3 - \gamma_1 = \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 = -k (2 - 3k) \delta_1 + (1 - 2k) (\delta_1 + \delta_2)$$

Notons que les relations définissant les abscisses circulaires  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$b_1 - a_1 = k(a_2 - a_1) \quad b_2 - a_2 = k(a_3 - a_2) \quad b_3 - a_3 = k(2\pi + a_1 - a_3)$$

d'où il vient immédiatement :

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3) = k.2\pi$$

Il s'ensuit que, quand on passe au transformé d'ordre supérieur, le triangle, tout en se rapprochant d'un équilatéral, tourne dans le cercle : quand il est devenu quasi équilatéral, les trois différences  $(a_2 - a_1)$ ,  $(a_3 - a_2)$  et  $(2\pi + a_1 - a_3)$  sont devenues quasi égales à  $2\pi/3$ , les trois écarts  $b_n - a_n$  deviennent eux aussi égaux, et par conséquent les trois sommets se décalent, à chaque itération, d'un angle égal, à très peu près, à  $k.2\pi/3$ .

De façon plus générale, les abscisses circulaires  $s_m$  des sommets correspondants de deux triangles transformés d'ordres consécutifs,  $n$  et  $n+1$ , sont toujours liées

par des relations de la forme  $s_{n+1}^m = s_n^m + k(s_n^{m+1} - s_n^m)$ , qu'on peut aussi écrire  $s_{n+1}^m - s_n^m = k(s_n^{m+1} - s_n^m)$ , où  $(s_n^{m+1} - s_n^m)$  est bien l'expression de la valeur de l'arc entre deux sommets du triangle d'ordre  $n$ .

J'ai fait deux applications numériques, avec  $k = 1/3$  et  $1/10$ , pour les valeurs suivantes des abscisses circulaires des trois sommets  $S_1, S_2$  et  $S_3$ , comptées sur le cercle trigonométrique classique :  $30^\circ, 110^\circ$  et  $240^\circ$ , d'où des angles en  $S_1$  de  $(240 - 110)/2 = 65^\circ$ , en  $S_2$  de  $(360 + 30 - 240)/2 = 75^\circ$ , et en  $S_3$  de  $(110 - 30)/2 = 40^\circ$ .

Pour retrouver le cas de figure  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ , soit  $S_3 < S_1 < S_2$ , je choisis pour origine le point opposé, à  $180^\circ$  sur le cercle trigonométrique, et je garde le sens de parcours du cercle, ce qui donne

pour les abscisses circulaires :  $a_1 = 60^\circ, a_2 = 210^\circ$  et  $a_3 = 290^\circ$

et donc pour les angles :  $\alpha_1 = 40^\circ, \alpha_2 = 65^\circ$ , et  $\alpha_3 = 75^\circ$

Pour  $k = 1/3$ , on obtient,

pour la première itération :

$$b_1 = 110, b_2 = 236 \frac{2}{3}, b_3 = 333 \frac{1}{3} ;$$

$$\beta_1 = 48 \frac{1}{3}, \beta_2 = 68 \frac{1}{3}, \beta_3 = 63 \frac{1}{3} ; \quad E_{\max-1} = 20$$

$$b_1 - a_1 = 50, b_2 - a_2 = 26 \frac{2}{3}, b_3 - a_3 = 43 \frac{1}{3} \text{ (somme } 120 = 360.k) ;$$

pour la deuxième itération :

$$c_1 = 152 \frac{2}{9}, c_2 = 268 \frac{8}{9}, c_3 = 378 \frac{8}{9} = 18 \frac{8}{9} ;$$

$$\gamma_1 = 55, \gamma_2 = 66 \frac{2}{3}, \gamma_3 = 58 \frac{1}{3} ; \quad E_{\max-2} = 11 \frac{2}{3}$$

$$c_1 - b_1 = 42 \frac{2}{9}, c_2 - b_2 = 32 \frac{2}{9}, c_3 - b_3 = 45 \frac{5}{9} \text{ (somme } 120) ;$$

pour la troisième itération :

$$d_1 = 191 \frac{1}{9}, d_2 = 305 \frac{5}{9}, d_3 = 63 \frac{1}{3} ;$$

$$\delta_1 = 58 \frac{8}{9}, \delta_2 = 63 \frac{8}{9}, \delta_3 = 57 \frac{2}{9} ; \quad E_{\max-3} = 6 \frac{2}{3}$$

$$d_1 - c_1 = 38 \frac{8}{9}, d_2 - c_2 = 36 \frac{2}{3}, d_3 - c_3 = 44 \frac{4}{9} \text{ (somme } 120).$$

Pour la quatrième itération, je me suis contenté de calculer les angles :

$$\varepsilon_1 = 60 \frac{5}{9}, \varepsilon_2 = 61 \frac{2}{3}, \varepsilon_3 = 57 \frac{7}{9} ; \quad E_{\max-4} = 3 \frac{8}{9}$$

et les décalages des abscisses :

$$e_1 - d_1 = (d_2 - d_1)/3 = 38 \frac{4}{27}, e_2 - d_2 = 39 \frac{7}{27}, e_3 - d_3 = 42 \frac{16}{27},$$

dont la somme est toujours égale à 120.

Pour  $k = 1/10$ , dès le début, j'ai calculé d'abord les décalages des abscisses, puis les abscisses elles-mêmes :

$$b_1 - a_1 = 15, b_2 - a_2 = 8, b_3 - a_3 = 13 \text{ (total } 36), \text{ d'où } b_1 = 75, b_2 = 218, b_3 = 303$$

$$\beta_1 = 42,5, \beta_2 = 66, \beta_3 = 71,5 ; \quad E_{\max-1} = 29$$

$c_1 - b_1 = 14,3$ ,  $c_2 - b_2 = 8,5$ ,  $c_3 - b_3 = 13,2$  (total 36) ; d'où  $c_1 = 89,3$ ,  $c_2 = 226,5$ ,  $c_3 = 316,2$

$\gamma_1 = 44,85$ ,  $\gamma_2 = 66,55$ ,  $\gamma_3 = 68,6$  ;

$E_{\max-2} = 23,55$

$d_1 - c_1 = 13,72$ ,  $d_2 - c_2 = 8,97$ ,  $d_3 - c_3 = 13,31$  (total 36) ; d'où  $d_1 = 103,02$ ,  
 $d_2 = 235,47$ ,  $d_3 = 329,51$

$\delta_1 = 47,02$ ,  $\delta_2 = 66,755$ ,  $\delta_3 = 66,225$  ;

$E_{\max-3} = 19,965$

$e_1 - d_1 = 13,245$ ,  $e_2 - d_2 = 9,404$ ,  $e_3 - d_3 = 13,351$  (total 36) ; d'où  $e_1 = 116,265$ ,  
 $e_2 = 244,874$ ,  $e_3 = 342,861$

$\varepsilon_1 = 48,9935$ ,  $\varepsilon_2 = 66,702$ ,  $\varepsilon_3 = 64,3045$  ;

$E_{\max-4} = 17,7085$

On voit que l'allure avec laquelle le triangle tend à devenir équilatéral est nettement moins rapide dans le deuxième cas. En effet, on peut montrer que c'est pour  $k = 1/2$  que cette allure est la plus rapide, voir plus loin ci-dessous.

## B) Quadrilatère (non croisé) inscrit dans un cercle

Un quadrilatère inscrit dans un cercle a ceci de particulier que chacun de ses angles a pour opposé son supplémentaire, étant donné que chaque angle intercepte un arc qui est le complément à  $2\pi$  de l'arc intercepté par son opposé. Par conséquent, sauf les cas particuliers des carrés et des rectangles, un quadrilatère inscrit possède deux angles aigus et deux angles obtus, disposés comme dans un trapèze, avec les deux angles aigus adjacents l'un à l'autre, de même que les deux angles obtus, et le plus petit des angles aigus est opposé au plus grand des angles obtus. Un parallélogramme, et notamment un losange, ne sont pas inscriptibles dans un cercle : pour eux, il faut une ellipse, en particulier une dont le grand axe soit la grande diagonale du parallélogramme !

Donc, pour les abscisses circulaires des sommets, on peut choisir l'origine et le sens d'orientation du cercle de façon à commencer par le plus petit des angles aigus et à continuer par le deuxième angle aigu.

Les sommets  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  ont alors pour abscisses circulaires  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$  telles que  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 2\pi$ .

Les angles ont pour mesures, comme angles inscrits dans le cercle :

$$A_2A_1A_4 = \alpha_1 = (a_4 - a_2)/2 \quad A_1A_2A_3 = \alpha_2 = (2\pi + a_1 - a_3)/2 = \pi + (a_1 - a_3)/2$$

$$A_2A_3A_4 = \alpha_3 = (2\pi + a_2 - a_4)/2 = \pi + (a_2 - a_4)/2 \quad \text{et} \quad A_3A_4A_1 = \alpha_4 = (a_3 - a_1)/2$$

(ce qui vérifie  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ ).

D'après ce qui est expliqué plus haut, ces angles se rangent dans l'ordre suivant :  $\alpha_1 < \alpha_2 < \pi/2 < \alpha_4 < \alpha_3 < \pi$

Les sommets du quadrilatère transformé d'ordre 1 ont pour abscisses circulaires :

$$b_1 = a_1 + k(a_2 - a_1) \quad b_2 = a_2 + k(a_3 - a_2) \quad b_3 = a_2 + k(a_3 - a_2)$$

et  $b_4 = a_3 + k(2\pi + a_1 - a_4)$

Ses angles ont pour mesures :

$$B_2B_1B_4 = \beta_1 = (b_4 - b_2)/2 \quad B_1B_2B_3 = \beta_2 = (2\pi + b_2 - b_3)/2 = \pi + (b_1 - b_3)/2$$

$$B_2B_3B_4 = \beta_3 = (2\pi + b_2 - b_4)/2 = \pi + (b_2 - b_4)/2 \quad \text{et} \quad B_3B_4B_2 = \beta_4 = (b_3 - b_1)/2$$

Il vient alors  $\beta_1 = \alpha_1 + k(\alpha_2 - \alpha_1)$ ,  $\beta_2 = \alpha_2 + k(\alpha_4 - \alpha_1)$ ,  $\beta_3 = \alpha_3 - k(\alpha_2 - \alpha_1)$  et  $\beta_4 = \alpha_4 - k(\alpha_4 - \alpha_1)$ .

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \beta_2 - \beta_1 &= \alpha_2 - \alpha_1 + k(\alpha_4 - \alpha_2), & \beta_3 - \beta_1 &= \alpha_3 - \alpha_1 - 2k(\alpha_2 - \alpha_1), \\ \beta_4 - \beta_1 &= \alpha_4 - \alpha_1 - k(\alpha_4 - \alpha_2), & \beta_4 - \beta_2 &= \alpha_4 - \alpha_2 - 2k(\alpha_4 - \alpha_1), \\ \beta_4 - \beta_3 &= \alpha_4 - \alpha_3 - k(\alpha_4 - \alpha_2), & \beta_3 - \beta_2 &= \alpha_3 - \alpha_2 + k(\alpha_4 - \alpha_2), \end{aligned}$$

Et l'on voit aisément que  $\beta_2 - \beta_1 > 0$ ,  $\beta_3 - \beta_2 > 0$ ,  $\beta_3 - \beta_4 > 0$ , et (un peu moins aisément) que  $\beta_4 - \beta_1 > 0$ , parce que  $\alpha_4 - \alpha_1 > \alpha_4 - \alpha_2$ . Les angles extrêmes sont donc  $\beta_1$  et  $\beta_3$ , mais comme  $\beta_1 > \alpha_1$  et  $\beta_3 < \alpha_3$ , leurs valeurs sont plus proches l'une de l'autre que celles des angles extrêmes du quadrilatère initial.

On retrouve donc le même résultat que pour le triangle : l'opération de transformation donne un polygone plus régulier ! Et à la limite, au bout d'un assez grand nombre d'opérations, on aura un carré, qui continuera de tourner à chaque itération d'un angle égal à  $k(2\pi/4)$ , soit  $k\pi/2$ . Dans le cas particulier où  $k = 1/2$ , on aboutira à une paire de carrés décalés de  $\pi/4$ , qui s'échangent l'un en l'autre à chaque nouvelle itération.

C) N'importe quel polygone inscrit dans un cercle ou une autre courbe fermée convexe

Dans ce qui suit, j'expose la solution généralisée que j'ai trouvée ultérieurement en réfléchissant aux cas du pentagone et des polygones d'ordre supérieur, que je ne parvenais pas à traiter de la façon précédente.

Je considère un polygone quelconque, même croisé, à  $n$  sommets ou côtés, inscrit dans une courbe fermée convexe (cercle, ellipse, ovale, ... ou même un polygone non croisé), de circonférence ou périmètre  $B$  et dotée d'une origine.

Le polygone est entièrement défini par la suite, non nécessairement croissante, des  $n$  abscisses  $A_i$  de ses sommets sur la courbe.

Soit donc une suite de nombres  $A_1, A_2 \dots A_i \dots A_n$ , « fermée en boucle sur la borne  $B$  », c'est-à-dire telle que  $0 < A_i < B$  pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , et  $A_{n+1} = B + A_1$ ,  $A_{n+2} = B + A_2 \dots B$  représente la mesure du périmètre de la courbe ou du polygone.

Dans ce qui suit, toutes les sommes  $\Sigma$  sont définies de  $i = 1$  à  $i = n$ .

Considérons les différences successives  $(A_{i+1} - A_i)$ , qui représentent les arcs (ou les segments, éventuellement brisés) successifs délimités sur la courbe (ou le polygone), et leur somme :

$$\Sigma (A_{i+1} - A_i) = A_2 - A_1 + A_3 - A_2 + \dots \dots \dots + A_n - A_{n-1} + A_{n+1} - A_n = A_{n+1} - A_1 = B$$

La moyenne de ces différences est donc égale à  $B/n$ , et leur variance  $V$  s'écrit :

$$V(A) = (1/n) \Sigma [(A_{i+1} - A_i) - B/n]^2$$

Soit la transformation qui associe à l'ensemble des points  $A_i$  l'ensemble des points  $C_i$  ainsi définis, à l'aide du nombre réel  $k$  ( $0 < k < 1$ ) :

$$C_1 = A_1 + k.(A_2 - A_1)$$

$$C_i = A_i + k.(A_{i+1} - A_i) = k.A_{i+1} + (1-k).A_i$$

$$C_n = A_n + k.(A_{n+1} - A_n) = k.A_{n+1} + (1-k).A_n$$

$$C_{n+1} = A_{n+1} + k.(A_{n+2} - A_{n+1}) = k.A_{n+2} + (1-k).A_{n+1}$$

La somme des différences successives des abscisses des points transformés s'écrit :

$$\Sigma (C_{i+1} - C_i) = C_2 - C_1 + C_3 - C_2 + \dots \dots + C_n - C_{n-1} + C_{n+1} - C_n = C_{n+1} - C_1 = k.[B + A_2] + (1-k).[B + A_1] - k.A_2 - (1-k).A_1 = k.B + (1-k).B = B$$

La moyenne de ces différences est donc elle aussi égale à  $B/n$ , et leur variance  $V$  s'écrit :

$$V(C) = (1/n) \Sigma \{[C_{i+1} - C_i] - B/n\}^2$$

Le problème initial, le polygone transformé est-il plus régulier que le polygone de départ, autrement dit, la suite transformée est-elle plus « régulière » que la suite initiale, revient à comparer ces deux variances.

Pour simplifier l'écriture, je pose  $A_{i+1} - A_i = D_i$ , et de même,  $C_{i+1} - C_i = E_i$ .

Développons les expressions des variances, il vient, avec une modification évidente des notations des variances :

$$\begin{aligned} V(D) &= (1/n) \sum \{D_i - B/n\}^2 = (1/n) \sum \{D_i^2 - 2(B/n)D_i + (B/n)^2\} \\ &= (1/n) \{\sum D_i^2 - 2(B/n).\sum D_i + n.B^2/n^2\} = (1/n) \{\sum D_i^2 - 2(B/n).B + n.B^2/n^2\} \\ &= (1/n) \{\sum D_i^2 - B^2/n\} \end{aligned}$$

On obtient de même, pour la suite transformée :

$$V(E) = (1/n) \{\sum E_i^2 - B^2/n\}$$

Comparer ces deux variances revient à comparer les sommes  $\sum D_i^2$  et  $\sum E_i^2$ .

$$\begin{aligned} E_i &= [C_{i+1} - C_i] = [k.A_{i+2} + (1-k).A_{i+1} - k.A_{i+1} - (1-k).A_i] \\ &= k.D_{i+1} + (1-k).D_i \text{ et par conséquent} \end{aligned}$$

$$E_i^2 = k^2 D_{i+1}^2 + (1-k)^2 D_i^2 + 2k(1-k)D_{i+1}.D_i$$

$$D'où \sum E_i^2 = k^2 \sum D_{i+1}^2 + (1-k)^2 \sum D_i^2 + 2k(1-k) \sum D_{i+1}.D_i$$

Or par définition,  $D_{n+1} = A_{n+2} - A_{n+1} = A_2 - A_1 = D_1$ , donc

$$\sum D_{i+1}^2 = \sum D_i^2 \text{ et l'on peut écrire}$$

$$\sum E_i^2 = [k^2 + (1-k)^2] \sum D_i^2 + 2k(1-k) \sum D_{i+1}.D_i$$

La différence des deux variances s'écrit par conséquent

$$\begin{aligned} V(E) - V(D) &= (1/n) [\sum E_i^2 - \sum D_i^2] \\ &= (1/n) \{[k^2 + (1-k)^2 - 1] \sum D_i^2 + 2k(1-k) \sum D_{i+1}.D_i\} \\ &= (1/n) 2k(1-k) \{-\sum D_i^2 + \sum D_{i+1}.D_i\} \quad \text{car } k^2 + (1-k)^2 - 1 = -2k(1-k) \end{aligned}$$

Maintenant, considérons les expressions  $[D_{i+1} - D_i]^2$  :

$$[D_2 - D_1]^2 = D_2^2 + D_1^2 - 2D_1.D_2 > 0$$

$$[D_3 - D_2]^2 = D_3^2 + D_2^2 - 2D_2.D_3 > 0$$

.....

$$[D_n - D_{n-1}]^2 = D_n^2 + D_{n-1}^2 - 2D_{n-1}.D_n > 0$$

$$[D_{n+1} - D_n]^2 = D_{n+1}^2 + D_n^2 - 2D_n.D_{n+1} > 0$$

Et comme  $D_{n+1} = D_1$ , en faisant la somme de ces inégalités, on obtient

$$2 \sum D_i^2 - 2 \sum D_{i+1}.D_i > 0, \text{ d'où } -\sum D_i^2 + \sum D_{i+1}.D_i < 0$$

Donc, la différence  $V(E) - V(D)$  est toujours négative (je rappelle que  $k$  est compris entre 0 et 1), autrement dit, la variance des différences entre les nombres de la suite transformée est inférieure à celle des différences entre les nombres de la suite de départ, et la suite transformée est donc plus régulière que la suite de départ, C.Q.F.D. !

Remarquons le facteur  $2k(1-k)$  de la différence des variances : il passe par un maximum pour  $k = 1/2$ , ce qui explique bien que les triangles convergent plus rapidement pour  $k = 1/3$  que pour  $k = 1/10$ .

Application numérique pour un quadrilatère croisé

$$A_1 = 10, A_2 = 40, A_3 = 20, A_4 = 60, \text{ avec } B = 80 \text{ et } k = 1/3$$

$$A_2 - A_1 = 30, A_3 - A_2 = -20, A_4 - A_3 = 40, B + A_1 - A_4 = 30,$$

$$C_1 = 10 + 30/3 = 20, C_2 = 40 - 20/3 = 100/3, C_3 = 20 + 40/3 = 100/3,$$

$$C_4 = 60 + 30/3 = 70$$

$$C_2 - C_1 = 13 \frac{1}{3}, C_3 - C_2 = 0, C_4 - C_3 = 36 \frac{2}{3}, B + C_1 - C_4 = 30$$

dont la somme vaut 80

(Je note que je suis tombé sur un cas particulier, sans le faire exprès : le quadrilatère est devenu un triangle !)

Deuxième itération et suivantes :

$$D_1 = C_1 + 1/3.(C_2 - C_1) = 24 \frac{4}{9} \quad D_2 = C_2 + 1/3.(C_3 - C_2) = 33 \frac{1}{3}$$

$$D_3 = C_3 + 1/3.(C_4 - C_3) = 45 \frac{5}{9} \quad D_4 = C_4 + 1/3.(B + C_1 - C_4) = 80$$

Et le quadrilatère n'est déjà plus croisé ! et le quatrième sommet se confond avec la borne B ! Par conséquent, pour la troisième itération, on peut effectuer une transposition des indices et partir des valeurs suivantes :

$$D_1 = 0, D_2 = 24 \frac{4}{9}, D_3 = 33 \frac{1}{3}, D_4 = 45 \frac{5}{9}$$

$$\text{et } D_2 - D_1 = 24 \frac{4}{9}, D_3 - D_2 = 8 \frac{8}{9}, D_4 - D_3 = 12 \frac{2}{9}, B + D_1 - D_4 = 34 \frac{4}{9}$$

dont la somme vaut 80

$$E_1 = D_1 + 1/3.(D_2 - D_1) = 8 \frac{4}{27} \quad E_2 = D_2 + 1/3.(D_3 - D_2) = 27 \frac{11}{27}$$

$$E_3 = D_3 + 1/3.(D_4 - D_3) = 37 \frac{11}{27} \quad E_4 = D_4 + 1/3.(B + D_1 - D_4) = 57 \frac{1}{27}$$

$$\text{et } E_2 - E_1 = 19 \frac{7}{27}, E_3 - E_2 = 10, E_4 - E_3 = 19 \frac{17}{27}, B + E_1 - E_4 = 33 \frac{1}{9}$$

dont la somme vaut encore 80

$$F_1 = E_1 + 1/3.(E_2 - E_1) = 14 \frac{46}{81} \quad F_2 = E_2 + 1/3.(E_3 - E_2) = 30 \frac{20}{27}$$

$$F_3 = E_3 + 1/3.(E_4 - E_3) = 43 \frac{77}{81} \quad F_4 = E_4 + 1/3.(B + E_1 - E_4) = 68 \frac{2}{27}$$

$$\text{et } F_2 - F_1 = 16 \frac{14}{81}, F_3 - F_2 = 13 \frac{17}{81}, F_4 - F_3 = 24 \frac{10}{81}, B + F_1 - F_4 = 26 \frac{40}{81}$$

dont la somme vaut toujours 80

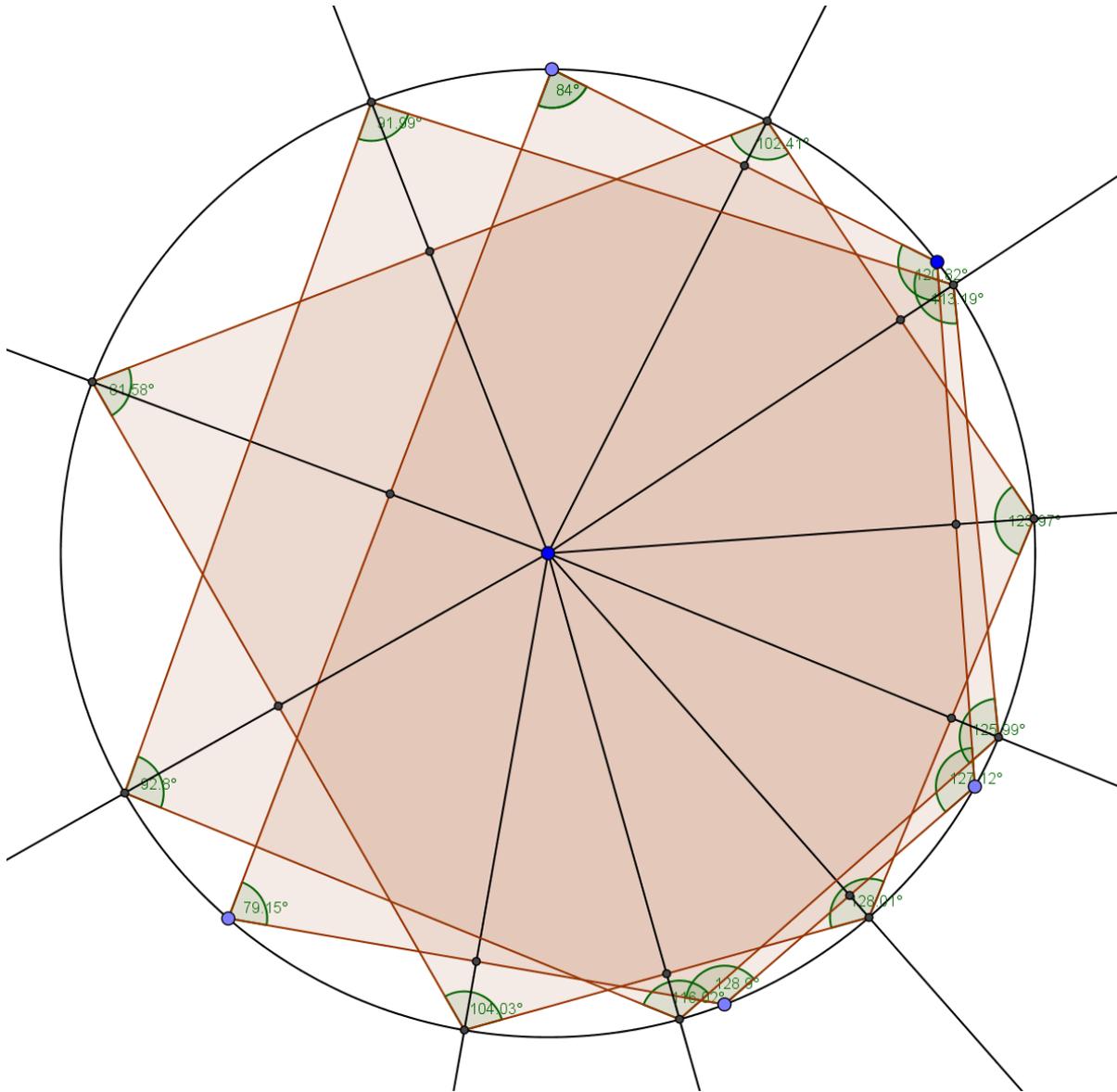
On constate que la valeur du plus grand écart entre deux sommets diminue continuellement et que celle du plus petit écart augmente continuellement :

$$40 > 36 \frac{2}{3} > 34 \frac{4}{9} > 33 \frac{1}{9} > 26 \frac{40}{81}$$

$$-20 < 0 < 8 \frac{8}{9} < 10 < 13 \frac{17}{81}$$

Ce qui confirme que ces écarts tendent à se régulariser au fur et à mesure des itérations donnant les polygones transformés successifs.

Ci-dessous, une figure représentant les deux premiers transformés, pour  $k = 1/2$ , d'un pentagone irrégulier (gros points bleus).



Je reproduis ci-dessous les valeurs des angles (données par Geogebra) pour les rendre plus lisibles :

Pentagone de départ :  $84^\circ$ ,  $79,15^\circ$ ,  $128,9^\circ$ ,  $127,12^\circ$ ,  $120,82^\circ$

Premier transformé :  $81,58^\circ$ ,  $104,03^\circ$ ,  $128,01^\circ$ ,  $123,97^\circ$ ,  $102,41^\circ$

Deuxième transformé :  $91,99^\circ$ ,  $92,8^\circ$ ,  $116,02^\circ$ ,  $125,99^\circ$ ,  $113,19^\circ$

Le plus petit angle augmente, le plus grand diminue, donc l'écart entre ces deux angles diminue ...