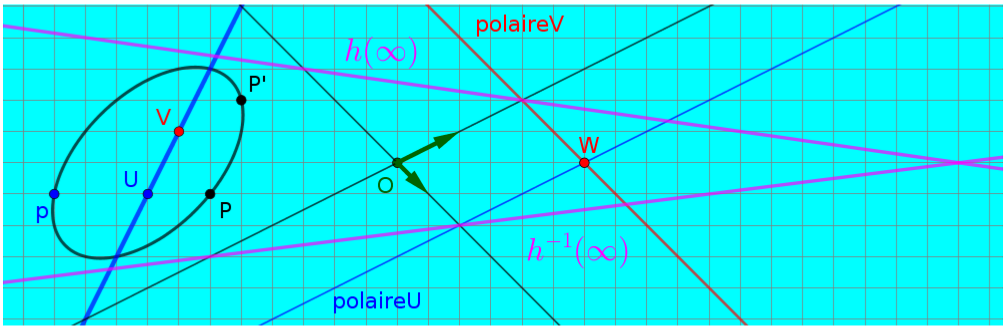
Recherche de formules affines



J'ai décalé l'axe (UV), parce que sa position précédente donnait un pôle de coordonnées non entières, gênantes pour ce que je voulais faire. (Par conséquent, la figure a l'air plus symétrique que je n'aurais voulu. Tant pis.)

1) Questions. Soit une homographie h de l'ellipse ci-dessus, h définie par son axe (bleu) des intersections entre droites (MN') et $(M'N)$, et l'image P' d'un point P.
   a) Décomposer h en un produit $v \circ u$ d'involutions de l'ellipse.
   b) Prolonger h au plan en $\tilde{h}$.
   c) Proposer une « formule affine » pour $\tilde{h}$.
2) Réponses.
   a) On a vu que u et v sont tenues d'avoir leurs centres U et V sur l'axe.
      pappus a explicité le lien de V à U.
   b) Pour l'instant, je ne sais guère répondre qu'en prolongeant les deux involutions.
      i) Grosse impression que u et v, involutions **de l'ellipse** s'appellent aussi « involutions de Frégier » et ont l'hilarante propriété d'être constructibles comme une projection : en un coup de règle (clin d'oeil à Ludwig) depuis leur centre. Ici, u associe P à p, et v associe p à P'.
      ii) Une fois prolongées en $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$, leur tracé se complique un peu évidemment.
      Mais l'intuition que par exemple $\tilde{u}$ est **l'homologie de même centre U, d'axe la polaire de U par rapport à l'ellipse et de birapport harmonique** est assez forte.
   c) Ça paraît peut-être évident à beaucoup, mais pour moi qui m'égare vers les complexes, voire les inversions (complètement hors sujet ici), j'ai eu du mal à tomber sur une formule qui me paraît désormais assez générale des homographies telles que h :

$$\frac{1}{ax+by+c}(rx+sy+t, ux+vy+w)$$

   On est un peu dans Stephen King, pour l'instant. (À part la réputation de maître de l'horreur, je ne connais pas, mais il dit du bien de Jim Thompson, donc mérite d'être métaphorisé !)

Un « meilleur » repère ?

Pour une involution en général, la droite à mi-chemin entre centre et axe (ses deux caractéristiques comme homologie) est envoyée à l'infini (« involution » entraîne birapport harmonique).
L'apparition (du premier membre) de l'équation de cette droite au dénominateur n'est donc (après coup) pas si étonnante (dans des versions cauchemardesques, épargnées à mes éventuels lecteurs).
Cela m'a donné l'envie de prendre ces droites pour constituer mon repère.

Je reprends.
Pour décrire simplement une involution, où mettre l'origine du repère ?

i) En le centre $S(0,\ 0)$? Why not, il me semble en effet qu'en prenant pour deuxième axe du repère la parallèle à l'axe de l'involution, de sorte que celui-ci ait pour équation $x = -2a$, alors on a la formule sympathique

$$(x',\ y') = \frac{-a}{x+a}(x,\ y)$$

ii) Mais comme ici, deux involutions jouent un rôle, je préfère la formule qui met l'origine à mi-chemin entre le centre $S(a, 0)$ et l'axe de l'involution. (C'est peut-être une histoire de carte affine avec origine à l'infini, sans que je m'en rende compte.) Pour $S(a, 0)$ et $x = -a$ concernant l'axe, je trouve la formule également simple

$$(x',\ y') = \frac{-a}{x}(-a,\ y)$$

iii) Je choisis donc comme centre $O(0,\ 0)$ l'intersection des « droites à mi-chemin » (ce seront les axes du repère) entre chaque centre et sa polaire.
Compte tenu de ce changement d'origine, la formule d'une involution se complique légèrement.
L'involution de centre $S(a,\ b)$ et d'axe d'équation $x = -a$ a pour formule (apparition de termes en b qui n'est plus nul)

$$(x',\ y') = \frac{1}{x}\left(a^2,\ bx - ay + ab\right)$$

L'involution de centre $S(a,\ b)$ et d'axe d'équation $y = -b$ a pour formule

$$(x',\ y') = \frac{1}{x}\left(-bx + ay + ab,\ b^2\right)$$

iv) Dans notre cas particulier,

$$u(x,\ y) = \frac{1}{x}(4,\ -3x + 2y + 6)$$

$$v(x,\ y) = \frac{1}{y}(2x - 3y + 6,\ 4)$$

mènent à

$$h(x,\ y) = v \circ u(x,\ y) = \frac{1}{-3x + 2y + 6}(15x - 6y - 10,\ 4x)$$

Contrôle par exemple sur $P\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{7}{3}\right)$ et $m = u(P) = (-3,\ -4)$,
puis $P' = v(m) = h(P) = (-3,\ -1)$.

3) Questions encore.
   a) La droite $h^{-1}(\infty)$ m'intrigue, mais il n'y a pas de quoi.
   Que l'image du faisceau de droites issu de n'importe quel point de cette droite donne une famille de droites parallèles ? Rien d'étonnant, elles sont issues de ... l'infini !
   N'empêche, comment la trouver sans formule ? Je l'ignore.
   Équation réduite très lisible sur le dessin : $y = \frac{3}{2}x - 3$.
   b) Sur le dessin ggb, je lis l'équation $y = \frac{2}{3}x + 2$ de $h(\infty)$ (en ayant envoyé M très loin).
   c) Vu que le premier membre de l'équation de $h^{-1}(\infty)$ est présent dans la formule de u, on n'est pas étonné que le premier membre de l'équation de $h(\infty)$ soit présent dans la formule de v, mais on ne prétend pas piger, d'autant que u et v ne forment pas un couple unique pour h.
   d) **Existe-t-il un repère où la formule de h est plus sympathique ?**
   Bien sûr, $h^{-1}(\infty)$ et $h(\infty)$ se bousculent comme candidats pour les axes...
4) Réponse reportée
   Trop ras le bol des changements de repère pour aujourd'hui, dommage !