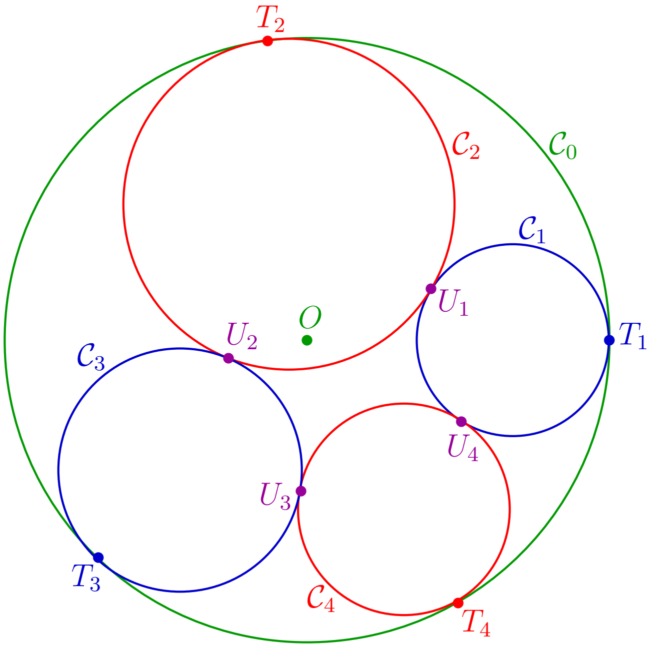

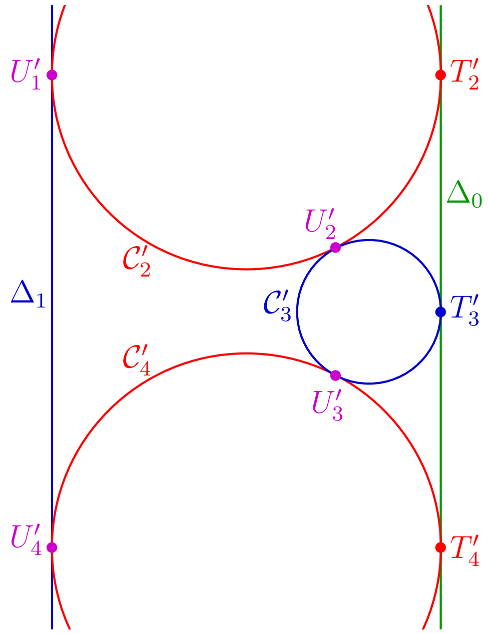

On considère quatre cercle $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ deux à deux tangents et tangents intèrieurement à un cercle $\mathcal{C}_0$. Via une inversion de centre T_1 on obtient le dessin de droite.

Si on se donne au départ T_1, T_2, T_3, T_4 sur $\mathcal{C}_0$, on voit, après inversion que pour qu'on puisse tracer de tels cercles (et la droite correspondant à $\mathcal{C}_1$) il faut que T'_3 soit le milieu de $[T'_2T'_4]$ c'est à dire que le birapport $[T'_1, T'_2, T'_3, T'_4]$ soit égal à $\left[\infty, t_2, \frac{1}{2}(t_2+t_4), t_4\right] = 2$ donc on doit avoir au départ $[T_1, T_2, T_3, T_4] = 2$.
Par contre, si cette condition est remplie, on peut choisir (par exemple) un rayon quelconque pour le cercle $\mathcal{C}_1$ ce qui, après inversion, donnera la position de la droite bleue et il y aura clairement une unique solution pour compléter la figure.

(1) Le point de contact U_1 est sur le cercle orthogonal à $\mathcal{C}_0$ passant par T_1 et T_2.
Cela provient simplement du fait que U'_1 est sur la droite perpendiculaire à Δ_0 passant par T'_2.

(2) Les points T_1, U_1, U_2, T_3 sont cocycliques.
Comme les cercles C'_2 et C'_3 sont tangents en U'_2 il existe une homothétie (de rapport négatif) centrée en U'_2 qui envoie C'_3 sur C'_2. Cette homothétie envoie la droite Δ_0 sur une droite qui lui est parallèle et qui est tangente à C'_2 donc sur Δ_1. L'image du point de tangence T'_3 et donc U'_1 ce qui motre que T'_3, U'_2 et U'_1 sont alignés.

(3) Les points U_1, U_2, U_3, U_4 sont sur un même cercle $\mathcal{C}_5$.
Le cercle C'_5 passant par U'_1, U'_2, U'_3 admet comme axe de symétrie la médiatrice de $[U'_2U'_3]$ qui est un axe de symétrie de la figure donc ce cercle contient aussi le point U'_4.

(4) Le centre Ω de C_5 est sur la droite (OI) où I est l'intersection de (T_1T_3) et (T_2T_4).
Le centre de C'_5 est sur la perpendiculaire à Δ_0 en T'_3 donc C_5 est orthogonal au cercle C_6 passant par T_1, T_3 et orthogonal à $\mathcal{C}_0$. Donc la puissance du centre Ω de C_5 par rapport au cercle C_6 est égale au rayon r du cercle C_5. Pour des raison de symétrie, on a la même relation avec le cercle C_7 passant par T_2, T_4 et orthogonal à $\mathcal{C}_0$ ce qui signifie que Ω est sur l'axe radical Δ_r des deux cercles C_6 et C_7.
Comme le cercle $\mathcal{C}_0$ est lui aussi orthogonal à C_6 et C_7 son centre O est aussi sur Δ_r.
Quand à I, sa puissance par rapport à C_6 est $\overline{IT_1} \times \overline{IT_3}$ et celle par rapport à C_5 est $\overline{IT_2} \times \overline{IT_4}$. Or ces quantités sont égales (à la puissance de I par rapport à C_0) donc I est lui aussi sur Δ_r.

(5) Les deux tangentes à $\mathcal{C}_0$ en T_1 et les trois droites (U_1U_2), (U_3U_4) et (T_2T_3) sont concourantes.
Les tangentes à $\mathcal{C}_0$ en T_2 et T_4 se coupent bien sûr au centre Ω_6 de C_6.
Comme C_0, C_2, C_4 et C_5 sont orthogonaux à C_6, il sont globalement invariants par l'inversion par rapport à S_6 et cette inversion échange $U_1 \leftrightarrow U_2$ $(= \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_5)$ ainsi que $U_3 \leftrightarrow U_4$ $(= \mathcal{C}_4 \cap \mathcal{C}_5)$.
Comme $\mathcal{C}_1$ passe par U_1, U_4 et qu'il est tangent à C_0 son image par l'inversion est un cercle passant par U_1, U_4 et tangent à $\mathcal{C}_0$ c'est donc C_3 et cela prouve que l'inversion échange aussi $T_1 \leftrightarrow T_3$