

Un peu d'histoire ...

La trigonométrie est à l'origine affiliée à l'astronomie et est aussi ancienne que la géométrie, soit 4000 ans en arrière. Mais la trigonométrie comme exposée dans ce chapitre, rangée dans le domaine des mathématiques qu'est l'«  $\sin$  », trouve son origine avec l'astronome et géomètre grec HIPPARQUE (II<sup>e</sup> siècle av. J.C.) dans un traité dont on a que des témoignages indirects.

Dans ce traité on y aurait trouvé une table liant des  $\sin$  et des  $\cos$ , dans un cercle de rayon 3436. Les angles varient de 7°30' à 180° par pas de 3°45'.

La valeur de  $\sin$  de 3436 laisse penser que l'approximation de  $\sin$  est  $\sin \approx \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{009\text{E}}{35} \times \cos^2 \approx 0.9 \times \cos^2$

On a des traces plus tangibles d'un même type de table de l'astronome et géomètre grec qui est à l'origine du système héliocentrique, PTOLÉMÉE (II<sup>e</sup> siècle ap. J.C.). Le rayon de base est de 60 plus propice aux calculs en sexagésimal et les angles varient de 0°30' à 180° par pas de 30'.

Ci-dessous la couverture et des extraits de tables d'un livre de 1813 en français et en grec, qu'on espère proche de *L'almageste* original de Ptolémée. On y trouve la méthode d'obtention de ces tables. Les bases théoriques sont les livres d'Euclide, une approximation d'un côté de pentagone régulier et un théorème inédit, maintenant appelé théorème de Ptolémée.

La réciproque pour prouver la cyclicité de quatre points est vraie.

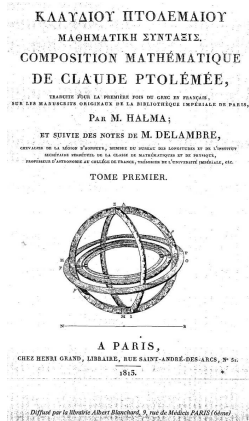
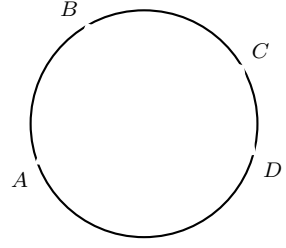
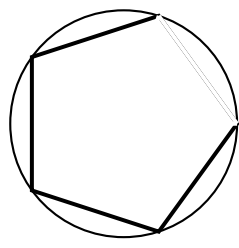


TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

ARCS.		CORDES.		TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.				
Degrés	Min.	Part. du Diam.	Prim.	Secon.	Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
...								
60	30	60	27	11	0	0	54	12
61	0	60	54	17	0	0	54	4
61	30	61	21	19	0	0	55	56
...								
179	0	118	39	44	0	0	0	25
179	30	119	39	56	0	0	0	9
180	0	120	0	0	0	0	0	0



= × = × + ×

On doit aux savants indiens d'Inde, au V<sup>e</sup> siècle ap. J.C, l'invention du  $\sin$ . Ils avaient par ailleurs connaissance des travaux d'Hipparque et le lien entre corde et sinus est le suivant :

$$\frac{\text{corde}(\alpha)}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

La confection de tables était d'inspirations géométriques auxquelles s'ajoutaient des procédés de calcul très perfectionnés.

Enfin la civilisation arabo-musulmane mêlent les points de vue en tabulant les sinus des angles sur la base d'un rayon 60.

Autour de l'an 1000, toutes les lignes trigonométriques utilisées de nos jours sont définies et ce sont les algorithmes de calculs qui vont être perfectionnés pour augmenter la précision des tables de calcul.

À ce jour, les calculatrices intègrent l'algorithme «  $\sin$  » pour ordonnancement géométrique. Elles intègrent des astuces pour que les calculs faits soient proches de l'architecture de la machine mais se fondent sur des formules trigonométriques dérivées de  $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$  dont l'ancêtre est ... le théorème de Ptolémée!

*Contenus et capacités attendues :*

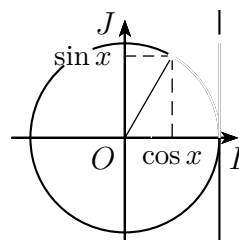
- Fonctions circulaires sinus et cosinus : périodicité, variations, parité.
  - Fonctions  $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$  et  $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$ , amplitude, périodicité, phase à l'origine, courbes représentatives.
  - Calcul de la fonction dérivée :
    - des fonctions cosinus et sinus,
    - de  $x \mapsto f(ax + b)$ ,
    - de  $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$  et  $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$ .
- 
- Connaître et utiliser les relations entre sinus et cosinus des angles associés :  $x$ ,  $-x$ ,  $\pi - x$ ,  $\pi + x$ ,  $\frac{\pi}{2} - x$ ,  $\frac{\pi}{2} + x$ .
  - Utiliser ces relations pour justifier les propriétés de symétrie des courbes des fonctions circulaires.
  - Calculer une fonction dérivée faisant intervenir les fonctions cosinus et sinus.
  - Calculer une primitive faisant intervenir les fonctions cosinus et sinus.

# I)

## 1)

### a)

Soit  $(O, I, J)$  un repère orthonormé. Le point  $M$ , image d'un réel  $x$  sur le cercle trigonométrique de centre  $O$ , a pour coordonnées  $(\cos x ; \sin x)$  où  $\cos x$  est le cosinus de  $x$  et  $\sin x$  est le sinus de  $x$ .



$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

### b) Définitions

- La fonction cosinus, notée  $\cos$ , est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\cos : x \mapsto \cos x$ .
- La fonction sinus, notée  $\sin$ , est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\sin : x \mapsto \sin x$ .

## 2) Fonction périodique

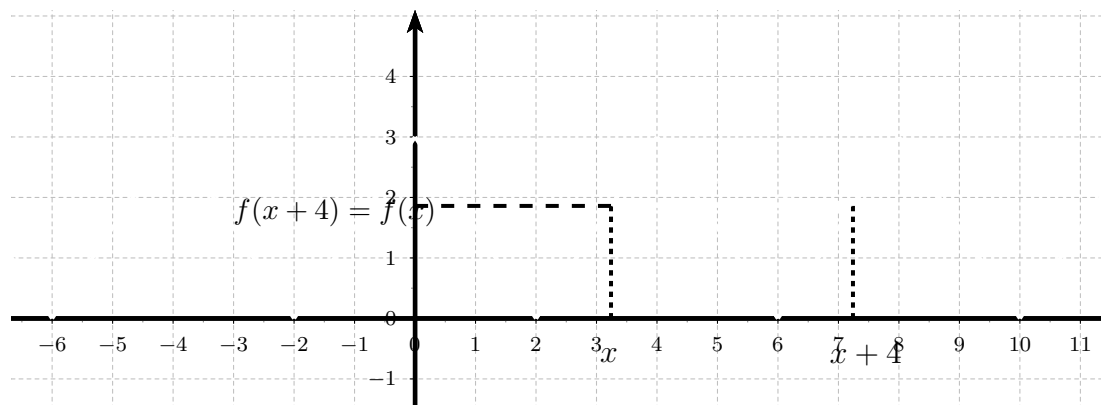
### a) Définition

Soient  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et un réel  $T$ .

$$x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x), \quad f \text{ est dite}$$

ou

### b) Illustration



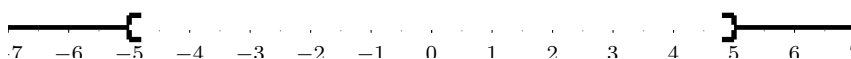
## 3) Fonction paire, impaire

### a) Définition

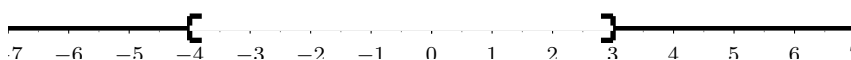
Un ensemble de  $\mathbb{R}$  est dit symétrique par rapport à 0 lorsque, pour tout nombre de l'ensemble, son opposé appartient à l'ensemble.

### b) Exemple et contre-exemple

- L'intervalle  $[-5; 5]$  symétrique par rapport à 0.



- L'intervalle  $[-4; 3]$  symétrique par rapport à 0.



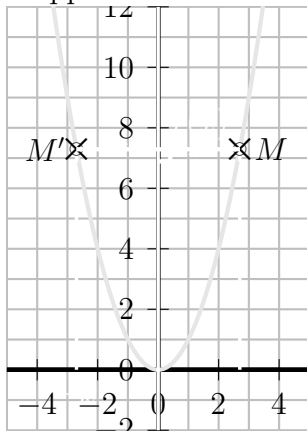
c)

Une fonction  $f$  définie sur ensemble de définition  $D$  symétrique par rapport à 0 est dite :

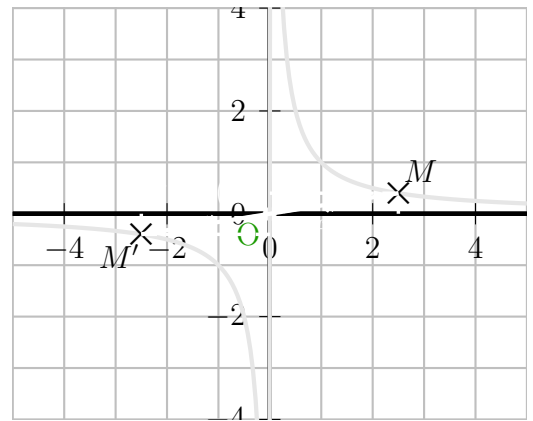
lorsque	$x \in D$
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$

d)

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



## II)

1)

a)

- Les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  sont  $2\pi$ -périodiques.
- La fonction  $\cos$  est paire et la fonction  $\sin$  est impaire.

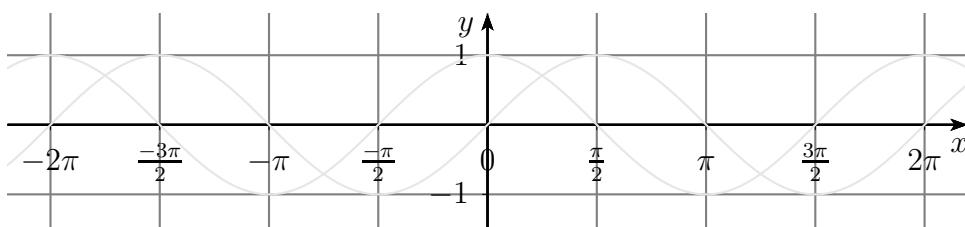
b)

- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  et  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$   
car enrouler de  $2\pi$  radian revient au même point du cercle trigonométrique.
- $\cos(-x) = \cos x$  et  $\sin(-x) = -\sin x$   
car les images des réels  $x$  et  $-x$  par l'enroulement sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2)

a)

Les courbes représentatives de  $\cos$  et  $\sin$  sont appelées des



b)

- Les courbes représentatives de  $\cos$  et  $\sin$  « se répètent » tous les  $2\pi$ .
- La courbe représentative de  $\cos$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de  $\sin$  est symétrique par rapport à l'origine.

3)

a)

nombre  $x$

- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin'(x) = \cos(x)$

b)

Les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  ont respectivement pour primitive, à l'addition d'une constante près, les fonctions  $\sin$  et  $-\cos$ .

III)

1)

a)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  et  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  tel que, pour tout nombre  $x$  de  $I$ ,  $g(x)$  appartient à  $J$ .

La fonction composée de  $g$  suivie de  $f$  est la fonction  $h$  définie sur  $I$  par  $h(x) = f(g(x))$ .

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \xrightarrow{g} & g(x) = X & \xrightarrow{f} & f(X) \\ x & \xrightarrow{h} & & & f(g(x)) \end{array}$$



Dans l'écriture «  $f(g(x))$  » l'ordre des calculs se fait de la droite vers la gauche.

b)

Avec :

- $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$  et
- $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x - 5$ ,

la fonction  $h$ , composée de  $f$  suivie de  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . Et on a pour tout nombre  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  
 $h(x) = f(g(x)) = f(2x - 5) = (2x - 5)^3$

2)

a)

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $J$  et  $g$  une fonction affine définie sur un intervalle  $I$  par  $g(x) = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres tels que, pour tout nombre  $x$  de l'intervalle  $I$ ,  $g(x)$  appartient à l'intervalle  $J$ .

La fonction  $h$  composée de  $g$  suivie de  $f$  est dérivable sur  $I$ , et pour tout nombre  $x$  de  $I$ ,

$$h'(x) = a \times f'(ax + b)$$

b)

Avec la fonction  $h$  de l'exemple précédent,

$h$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = (2x - 5)^3$

Les fonctions  $f : x \mapsto x^3$  et  $g : x \mapsto 2x - 5$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ ,

donc  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $h'(x) = 2 \times f'(2x - 5) = 2 \times 3(2x - 5)^2 = 6(2x - 5)^2$ .

3)

a)

Une fonction est dite  $\cos$ , est une fonction de la forme

$$t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$$

ou

$$t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$$

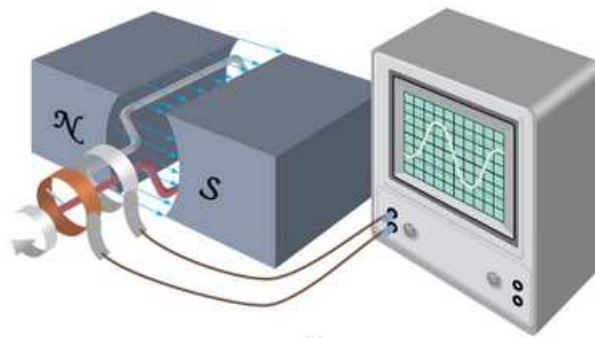
où  $T$ ,  $\phi$ , sont des

et la

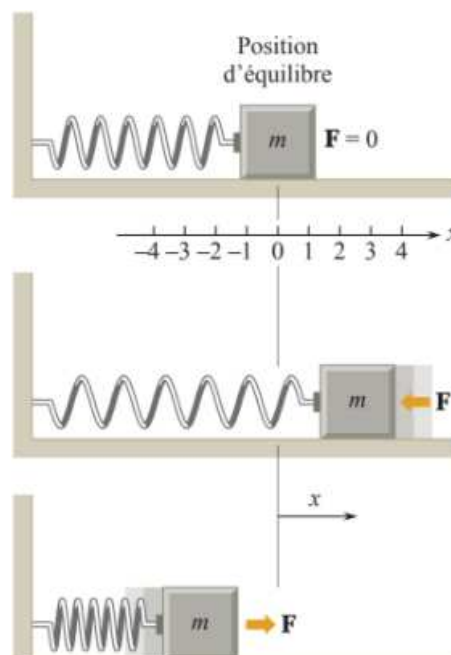
b)

Des grandeurs physiques, variant avec le temps  $t$ , peuvent être modélisées (écrites par les mathématiques dans un contexte idéalisé) par des fonctions du type  $f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$ , où  $A$ ,  $T$  et  $\phi$  sont des nombres qui s'interprètent respectivement par une amplitude, une période et une phase.

- En Électricité, pour la description d'un courant alternatif.



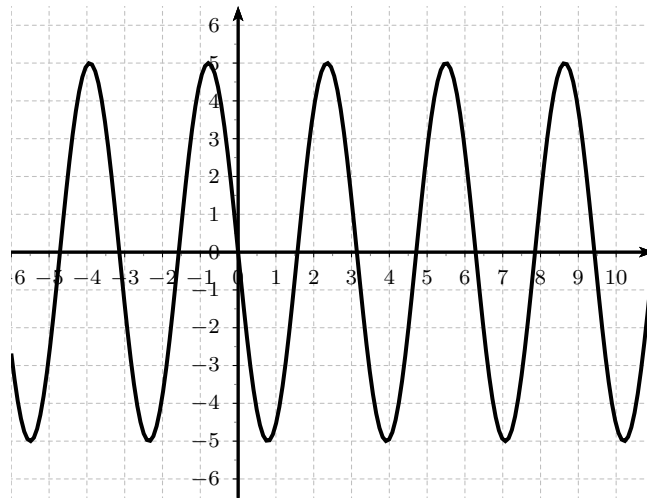
- en Mécanique, pour la description du mouvement d'une masse reliée à ressort lorsqu'on l'écarte de la position d'équilibre.



c)

La même fonction sinusoidale peut être écrite par plusieurs expressions.

Par exemple,  $t \mapsto 5 \sin(2t + 5\pi)$ ,  $t \mapsto -5 \sin(2t)$ ,  $t \mapsto 5 \sin(-2t)$  et  $t \mapsto 5 \cos(2t + \frac{\pi}{2})$  ont la même représentation graphique ci-dessous :



L'écriture retenue passe par l'usage de la trigonométrie, d'outils de calcul et de l'analyse physique du phénomène étudié.

d)

Soient  $A$ ,  $\omega$  et  $\varphi$  des nombres réels :

Pour tout nombre  $t \in \mathbb{R}$  :

- $(A \cos(\omega t + \varphi))' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$
- $(A \sin(\omega t + \varphi))' = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$

e)

Soient  $A$ ,  $\omega$  et  $\varphi$  des nombres réels :

Sur  $\mathbb{R}$  :

- $t \mapsto \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$  est une primitive de  $A \cos(\omega t + \varphi)$  ;
- $t \mapsto -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$  est une primitive de  $A \sin(\omega t + \varphi)$ .

Toutes les autres primitives sur  $\mathbb{R}$  s'obtiennent en ajoutant une constante réelle  $k$ .

