ÉQUATION FONCTIONNELLE PSEUDO-ARCTAN

• Déterminer toutes les fonctions f définies et continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, telles que :

$f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1-xy})$ pour tous x, y réels avec $xy \neq 1$.

• La fonction : $x \mapsto \tan x$ est définie et continue sur l'ensemble :
$D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbf{Z}\} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} I_k$, où : $I_k =](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}[$.
Si $x \in D$ et si $y \in D$, alors : $x + y \in D \Leftrightarrow \tan x \tan y \neq 1$, et dans ce cas :

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$. Tout ceci est bien connu.

• La fonction : $g(x) = f(\tan x)$ est définie et continue sur D.
Si $x \in D$, si $y \in D$, et si $x + y \in D$, alors : $\tan x \tan y \neq 1$, et :

$$g(x+y) = f(\tan(x+y)) = f(\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y})$$
$$= f(\tan x) + f(\tan y) = g(x) + g(y).$$

• On a : $\mathbf{Q} \subset D$ parce que π est irrationnel.
Si $x \in \mathbf{Q}$ et si $y \in \mathbf{Q}$, alors : $x + y \in \mathbf{Q}$, d'où : $x \in D$, $y \in D$, et $x + y \in D$, et par suite : $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
On en déduit : $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ pour tout $x \in \mathbf{Q}$ et tout $\lambda \in \mathbf{Q}$.

• En conséquence, pour tout $x \in \mathbf{Q}$, on a : $g(x) = g(x \cdot 1) = xg(1) = mx$, avec : $m = g(1) = f(\tan 1)$, constante.

• On a : $I_0 =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset D$, et la fonction g est continue sur I_0. Puisque $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, il en résulte : $g(x) = mx$ pour tout $x \in I_0$.

• Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $\arctan x \in I_0$, d'où il suit :
$f(x) = f(\tan(\arctan x)) = g(\arctan x) = m \arctan x$.

• En faisant $x := \sqrt{3}$ et $y := \sqrt{3}$ dans l'équation fonctionnelle proposée (ce qui est licite puisque : $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \neq 1$), on obtient : $2f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3})$, soit : $2m \arctan \sqrt{3} = -m \arctan \sqrt{3}$, d'où : $m = 0$.

• La seule fonction f répondant à la question est (hélas) la fonction nulle.

RÉFÉRENCE

• Mathématiques et Pédagogie n° 158, 2006, p. 74, avec l'hypothèse « la fonction f est dérivable partout ».
