Développement : Extremum des déterminants et théorème d'Hadamard

Théorème (Hadamard, 1893) : Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels compris entre -1 et 1. Nous cherchons les extrema du déterminant de A. Nous avons les résultats suivants :

- Les extrema existent, sont opposés et sont forcément atteints pour des matrices entièrement composées de -1 et de 1.
- Majorant du maximum :
  - Le maximum est majoré par $n^{n/2}$.
  - Ce majorant est atteint ssi A est une matrice de Hadamard.
  - Nota : on appelle matrice d'Hadamard une matrice entièrement composée de 1 et -1 et dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux. Leur construction est coûteuse en temps calcul.
  - Condition Nécessaire d'existence d'un matrice de Hadamard : $n = 2$ ou $n \equiv 0 (mod\ 4)$.
- Minorant du maximum (intéressant en dehors des matrices de Hadamard) : le maximum recherché est supérieur à $\sqrt{n!}$ pour tout n.

1. Historique. — *Pour les cas de type $n = 4k$ la question d'existence d'une matrice d'Hadamard s'est révélé extrêmement ardue et demeure une question ouverte. La simple vérification pour quelques entiers de type $4k$ mobilise des moyens de calcul hors norme. En 2014 le record était de à peine 664. Pour les autres cas, on n'a pas produit de meilleur majorant. Les matrices de Hadamard sont utilisées dans les codes correcteurs comme celui de Reed-Muller*

2. Existence du maximum. —

- Il suffit de multiplier par -1 les éléments d'une colonne de A pour avoir un déterminant opposé. On se limitera alors à l'étude du maximum.
- Posons $E = \{A \in M_n(\mathbb{R}); \forall i, j |a_{ij}| \leq 1\}$ et $E1 = \{A \in M_n(\mathbb{R}); \forall i, j\ a_{ij} \in \{-1, 1\}\}$
- E est compact (fermé, borné) et la forme déterminant est continue (en fait C^∞). Ceci assure de l'existence d'un maximum sur E pour le déterminant.
- Comme $I_n \in E$, on peut se limiter aux A inversibles dans notre recherche de maximum.

3. Sous-ensemble d'appartenance de la solution maximum. —

- La fonction det est affine en chaque a_{ij} comme le prouve un développement du déterminant selon la ligne i ou la colonne j.
- Si on considère une matrice $A(\lambda)$ réalisant le maximum pour laquelle un certain a_{ij} ne serait pas 1 ou -1, mais vaudrait λ, nous aurons donc $det(A(\lambda)) = a + \lambda b$.
- Selon le signe de b, on voit bien que remplacer λ par 1 ou -1 permet de dépasser la borne.
- Pro : le maximum est atteint sur l'ensemble $E1 \cap \{A; det(A) > 0\}$

4. Majoration du maximum. —

1. *Passage par la matrice symétrique.* —

- Notations : Pour $A \in E1$ avec $det(A) > 0$ et notons :
  - A_i la colonne i de A
  - $B = {}^t A \cdot A$ (B est diagonalisable dans une base orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral).
  - λ_i les valeurs propres de B
  - D la matrice diagonale $D(\lambda_i)$
  - On a alors $B = (AQ)^T(AQ) = D$ pour une matrice orthogonale Q
  - On note C_i la colonne i de AQ
- On a $|det(A)| = det(A) = \sqrt{B}$ et on est ramenés à maximiser $det(B)$.
- Puisque l'on se limite aux matrices A inversibles, aucun λ_i n'est nul.
- Comme $\lambda_i = \langle C_i, C_i \rangle$, ils sont en fait strictement positifs.

2. *Majoration.* —

- $det(B) = \Pi_1^n \lambda_i$ et $Tr(B) = \sum_1^n \lambda_i$
- Les λ_i étant strictement positifs, on peut alors appliquer la comparaison entre les moyennes géométriques et arithmétiques et obtenir :
- $det(B) = \Pi_1^n \lambda_i \leq (\frac{\sum_1^n \lambda_i}{n})^n = (\frac{Tr(B)}{n})^n$
- Or, en revenant à la définition de $B = {}^t A \cdot A$, b_{ii} est la norme du vecteur colonne A_i uniquement composé de 1 et de -1. Donc $Tr(B) = n^2$
- Ce qui nous donne la majoration d'Hadamard : $det(A) \leq n^{n/2}$

3. *Condition d'atteinte du majorant (ou de son opposé).* —

- Les deux moyennes sont égales si et seulement si tous les termes moyennés sont identiques (notons λ cette valeur).
- On a ainsi $Tr(B) = n\lambda$
- Puisque nous avons vu que en revenant à la définition de B, $Tr(B) = n^2$, on a donc $\lambda = n$
- Ceci revient à $Q^T A^T AQ = nI_n$ et donc aussi $B = A^T A = n(QQ^T) = nI_n$
- Le maximum (ou son opposé) est donc atteint ssi A est une matrice d'Hadamard, ie une matrice composée de 1 et de -1 avec les colonnes deux à deux orthogonales. On aura alors $\langle C_i, C_j \rangle = n\delta_{ij}$

4. *Condition nécessaire d'existence des matrices d'Hadamard.* —

- Si une matrice d'Hadamard existe, nous pouvons en fabriquer d'autres en multipliant une colonne par -1.
- Grâce à ce procédé nous pouvons fabriquer une matrice A dont la première ligne est uniquement composée de 1.
- En considérant les produits scalaires entre la première ligne et les autres, qui doivent être nuls, nous en déduisons que chaque ligne autre que la première doit avoir autant de 1 que de -1. Et donc n est pair.

– Nota : on remarque alors que le procédé pour se ramener d'une matrice de Hadamard à une matrice avec la première ligne faite de 1 respecte la réalisation du maximum (respectivement du minimum).
– Si $n \geq 3$, considérons les lignes 2 et 3 et groupons en 4 paquets les *colonnes* de A, selon que la deuxième et troisième composantes soient (1,1) ou (1,-1) ou (-1,1) ou (-1,-1).
– Par annulation de $\langle r_1, r_2 \rangle$, $\langle r_1, r_3 \rangle$ et $\langle r_3, r_2 \rangle$, on montre que les 4 paquets doivent avoir le même nombre d'éléments et donc que 4 divise n.
– Nota : on ignore si cette condition est suffisante. Jacques Hadamard conjectura implicitement en 1863 que la condition est nécessaire et suffisante. Payley le fit de manière plus explicite en 1933.

5. *Condition suffisante : construction de Sylvester.* —

– $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard.
– Etant donnée une matrice $H_k$de Hadamard, nous pouvons construire une matrice de Hadamard $H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$.
– On peut donc construire par induction une matrice de Hadamard H_{2^m} pour tous les entiers de type $n = 2^m$.

5. Minoration du maximum. —

– Nota : ceci n'est utile qu'en dehors des cas où la matrice d'Hadamard existe.
– L'ensemble $E1$ a 2^{n^2} éléments.
– Considérons D_n la moyenne des carrés de $det(A)$ sur cet ensemble.
– D_n est un minorant du maximum et on a $D_n = \sqrt{\frac{\sum_{A \in E1}(det(A)^2)}{2^{n^2}}}$
– En élevant au carré D_n et en utilisant la définition du déterminant, nous avons

$$(D_n)^2 = \frac{1}{2^{n^2}} \sum_{A \in E1} (\sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)})^2$$

$$(D_n)^2 = \frac{1}{2^{n^2}} \sum_{A \in E1} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\pi)\varepsilon(\sigma) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$(D_n)^2 = \frac{1}{2^{n^2}} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\pi)\varepsilon(\sigma) (\sum_{A \in E1} a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)})$$

– Passer en revue les éléments de $E1$ revient à passer en revue les éléments a_{ij} en leur donnant les valeurs 1 et -1.
– Donc pour π et σ donnés,

$$\sum_{A \in E1} a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{a_{11}=\pm 1} \cdots \sum_{a_{nn}=\pm 1} a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

– S'il existe un indice i pour lequel $k = \sigma(i) \neq \pi(i)$, alors chaque terme de la somme aura a_{ik} une et une seule fois. On peut mettre en facteur a_{ik} et comme $\sum_{a_{ik}=\pm 1} a_{ik} = 0$ seuls resterons les termes pour lesquels $\sigma = \pi$.
– Dans ce cas on aura la paire $a_{i\pi(i)} a_{i\sigma(i)}$ qui vaut 1 et donc

$$\sum_{a_{11}=\pm 1} \cdots \sum_{a_{nn}=\pm 1} a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{a_{11}=\pm 1} \cdots \sum_{a_{nn}=\pm 1} 1 = 2^{n^2}$$

– $(D_n)^2 = \frac{1}{2^{n^2}} \sum_{\pi \in S_n} 2^{n^2} = n!$
– Comme le maximum est supérieur à la moyenne L_2, il existe une matrice A dans $E1$ telle que $det(A) \geq \sqrt{n!}$.
– Nota : pour n grand, ce minorant est "assez proche" du majorant $n^{n/2}$ et en utilisant la formule de Stirling nous avons en effet

$$\sqrt{n!} \sim (2\pi n)^{1/4} (\frac{n}{e})^{n/2}$$

1. *Recasages :* —

– 152 : Déterminant. Exemples et applications.
– 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
– 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

.

Sources : Proofs from THE BOOK

August 15, 2018

Bruno Nitrosso, EPP et candidat libre