Raisonnement par récurrence

I Introduction

On considère que le raisonnement par récurrence apparaît la première fois de manière explicite chez Blaise Pascal, dans le Traité du triangle arithmétique publié en 1665.

On trouve cependant des formes de tels raisonnements chez l'indien Baskara II (XII^e), Euclide (-300), le persan Al-Karaji (953-1029),...

II La récurrence simple ou faible.

Théorème **1.** *On considère une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendante de $n \in \mathbb{N}$.*
Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ pour $n \geqslant 0$ alors on peut affirmer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 6.

☞ On raisonne par récurrence. Mais il faut être plus précis que cela : on devra toujours préciser ce que l'on démontre par récurrence, et pour cela on précise la proposition dépendante de l'entier n : soit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « 6 divise $n^3 - n$ » pour tout n entier naturel.
$\mathcal{P}(0)$ est trivialement vraie.
On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n. Alors 6 divise $n^3 - n$, c'est l' *hypothèse de récurrence*.
Alors vérifions que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que l'on vérifie l'hérédité de la proposition $\mathcal{P}(n)$.
On s'intéresse alors au rang $n+1$: on a

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3n(n+1)$$

Or par hypothèse de récurrence 6 divise $n^3 - n$. De plus comme n ou $n+1$ est pair, $n(n+1)$ aussi et donc divisible par 2 et ainsi $3n(n+1)$ est divisible par 6 d'où 6 divise $(n+1)^3 - (n+1)$.
$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie et donc la propriété est *héréditaire* et comme la propriété est vraie au rang zéro, elle est vraie pour tout entier naturel.

$$0$$

$$0 \curvearrowright 1 \curvearrowright 2 \curvearrowright 3 \curvearrowright \dots$$

Schématisation de la récurrence simple

L'initialisation au rang 0 n'est qu'un cas particulier : on a l'adaptation suivante :

Théorème **2.** *On considère une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendante de $n \geqslant n_0$.*
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ pour $n \geqslant n_0$ alors on peut affirmer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n tel que $n \geqslant n_0$.

III Récurrence double ou d'ordre deux.

Théorème 3. *On considère une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendante de $n \geqslant 0$.*
Si $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies et si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+2)$ pour $n \geqslant 0$ alors on peut affirmer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n tel que $n \geqslant 0$.

$$\overbrace{0\quad 1}^{0\quad 1}\quad 2\quad \cdots\quad \overbrace{n\quad n+1}\quad n+2$$

Schématisation de la récurrence double

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$, $U_1 = 3$ et $U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$.
Montrer que pour tout entier n : $U_n = 1 + 2^n$.

☞ Il s'agit de s'adapter à la situation. Ici, on sent bien qu'un résultat sur U_{n+2} ne peut aboutir qu'à partir du résultat sur U_n et U_{n+1}. On pose alors pour tout entier n

$$\mathcal{P}(n) : « \ U_n = 1 + 2^n »$$

On a bien $U_0 = 2 = 1 + 2^0$ et $U_1 = 3 = 1 + 2^1$ et ainsi $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies pour un certain n. On a alors

$$U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n = 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) = 1 + (6 - 2)2^n = 1 + 2^{n+2}$$

et ainsi on a vérifié que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

En fait, on peut voir la récurrence double comme une récurrence simple si l'on considère la propriété : $\mathcal{Q}(n)$: « $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ » : une récurrence simple sur $\mathcal{Q}(n)$ est en fait une récurrence double sur $\mathcal{P}(n)$.

IV La récurrence forte ou totale.

Théorème 4. *On considère une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendante de $n \geqslant 0$.*
Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ pour $n \geqslant 0$ alors on peut affirmer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n tel que $n \geqslant 0$.

$$\overbrace{0\quad 1}^{0\quad 1}\quad 2$$

$$\vdots$$

$$\overbrace{0\quad 1\quad 2 \cdots n}\quad n+1$$

Schématisation de la récurrence totale

Un exemple classique : montrer que tout entier $n \geqslant 2$ peut s'écrire comme le produit de nombres premiers. On rappelle qu'un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui même.

THÉORÈME **5.** *Tout entier supérieur à 2 est le produit de nombres premiers.*

Preuve :
On considère la propriété définie pour tout entier naturel n supérieur à deux : $\mathcal{P}(n)$: « n est le produit de nombres premiers ».
$\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque 2 est premier.
On suppose que $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$,...,$\mathcal{P}(n)$ sont vraies (ou encore on suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie (du rang 2) jusqu'au rang n). Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On considère donc l'entier $n+1$:
– si $n+1$ est un nombre premier, $n+1$ est bien alors le produit de nombres premiers.
– sinon, $n+1$ admet un diviseur d avec $2 \leqslant d \leqslant n$ (un diviseur autre que 1 et $n+1$). On écrit alors $n+1 = dq$, avec aussi $2 \leqslant q \leqslant n$. Or par hypothèse de récurrence forte, d et q sont des produits de nombres premiers, et ainsi $dq = n+1$ aussi. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui achève la récurrence. ★

En fait on peut aussi voir la récurrence forte comme une récurrence simple. Il suffit de considérer la propriété $\mathcal{Q}(n)$: « $\forall k \leqslant n$, $\mathcal{P}(k)$ vraie ». Une récurrence simple sur $\mathcal{Q}(n)$ est équivalente à une récurrence forte sur $\mathcal{P}(n)$.

V L'oublie de l'initialisation ou initialisation incomplète.

L'hérédité n'est pas suffisante. Si l'initialisation est omise ou incomplète, on peut aboutir à des résultats absurdes.

A Des crayons sont toujours tous de la même couleur.

On va montrer qu'une boîte de crayons de couleurs quelconques a forcément des crayons d'une seule couleur. On fait le raisonnement par récurrence suivant :

On considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: « toute boîte de n crayons a des crayons d'une seule couleur », pour $n \geqslant 1$.
– $\mathcal{P}(1)$ est évident.
– On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \geqslant 1$.
Soit alors une boîte de $n+1$ crayons que l'on note $c_1, \ldots, c_{n+1}$.
La boîte constituée des crayons $c_1, \ldots, c_n$ est une boîte de n crayons, d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont tous de la même couleur.
La boîte constituée des crayons $c_2, \ldots, c_{n+1}$ est aussi une boîte de n crayons, ils sont tous de la même couleur.
Or les crayons $c_2, \ldots, c_n$ sont communs à ces deux boîtes, et par conséquent tous les crayons sont de la même couleur, ce qui achève la récurrence.

Où est l'erreur ?

Et bien en fait l'hérédité est fausse si $n = 1$. Dans ce cas, il n'a a pas de crayons communs. L'hérédité est cependant valide pour tout $n \geqslant 2$. C'est donc l'initialisation qui pose problème ici : elle est incomplète (on peut aussi voir les choses différemment en disant que c'est l'hérédité qui est incomplète ! mais du début)

B Une propriété toujours fausse mais héréditaire.

Montrer que la propriété $3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7 est héréditaire. Montrer pourtant que $3^{2n+4} - 2^n$ n'est jamais un multiple de 7 (utiliser le modulo 7 compatible avec la somme et le produit et le fait qu'un entier s'écrit de manière unique comme le produit de facteurs premiers).

☞ On considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7 ».
Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors on peut écrire $3^{2n+4} - 2^n = 7k$ avec k entier. On a alors :

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1} &= 3^{2n+4} \times 3^2 - 2^{n+1} \\ &= (7k + 2^n) \times 9 - 2^{n+1} = 7k \times 9 + 9.2^n - 2^{n+1} = 7k \times 9 + 2^n(9-2) = 7\underbrace{(9k + 2^n)}_{\text{entier}} \end{aligned}$$

et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. La propriété est bien héréditaire.

Pourtant, en travaillant modulo 7,

$$3^{2n+4} - 2^n \equiv 9^n.3^4 - 2^n \equiv 2^n.9^2 - 2^n \equiv 2^n.4 - 2^2 \equiv 3.2^n$$

Si $3^{2n+4} - 2^n$ était divisible par 7, on aurait $3.2^n = 7k$, ce qui est absurde d'après l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers.

VI un clin d'œil : un principe de récurrence alternatif.

Emil Artin a proposé[1] un principe de récurrence bien original (Cauchy a dû l'utiliser aussi avant) :

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$:
– si $\mathcal{P}(1)$ est vraie
– si pour tout n, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(2n)$
– et si pour tout n, $\mathcal{P}(n+1) \Longrightarrow \mathcal{P}(n)$
alors, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Voir l'exemple donné dans le dernier exercice de recherche (preuve de Artin).

VII La méthode de la descente infinie.

La méthode de la descente infinie[2] est basée sur le fait suivant : il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.

Si, en partant d'hypothèses, on peut construire une telle suite, on en déduit que les hypothèses sont fausses.

On peut montrer que la méthode de la descente infinie et le principe de récurrence totale sont équivalents.

1. dans son livre sur la fonction Gamma 1931 : Einführung in die Theorie der Gammafunktion
2. de Fermat de manière explicite, mais aussi chez Euclide

Donnons un exemple un peu artificiel d'une descente (pas vraiment infinie ici) :

Montrer par descente (infinie) que pour tout entier naturel n non nul on a

$$2(n+2) < 2^{n+2}$$

☞ Sinon, il existerait un entier $n \geqslant 1$ de sorte que $2(n+2) \geqslant 2^{n+2}$. On constate que $n \neq 1$. On cherche alors à construire un entier p strictement plus petit que n possédant la même propriété, c'est à dire tel que $2(p+2) \geqslant 2^{p+2}$. On le tente avec $n-1 \geqslant 1$: on a

$$2(n+1) = 2(n+2) - 2 \geqslant 2^{n+2} - 2 = 2^{n+1} + \underbrace{2^{n+1} - 2}_{\geqslant 0} \geqslant 2^{n+1}$$

et ainsi en itérant on aurait $2(n+1) \geqslant 2^{n+2}$ pour $n-2$, $n-3$, ..., 3,2,1, ce qui est absurde.
Donc pour tout entier n, on a $2(n+2) < 2^{n+2}$.

Références

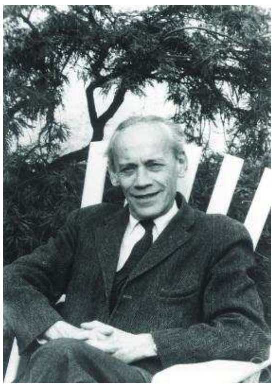
[1] Jacques Pichon – *Théorie des ensembles. Logique. Les entiers.* – Ellipse

[2] IREM – *Histoire de problèmes – Histoire des mathématiques* – Ellipse

[3] Wikipédia

(a) Pascal

(b) Euclide



(c) Artin

(d) Cauchy

VIII Exercices de base.

1. Soit (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Montrer que pour tout n, $u_n = u_0 + nr$ (suite arithmétique).
2. Soit (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Montrer que pour tout n, $u_n = u_0 q^n$ (suite géométrique).
3. Soit q un réel positif et (u_n) une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant qu_n$. Montrer que pour tout n, $u_n \leqslant q^n u_0$ (majoration géométrique).
4. Montrer par récurrence que pour tout $q \neq 1$ complexe et n entier, on a
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
5. Montrer que pour tout entier n, $3^{2n+6} - 2^n$ est un multiple de 7.
6. $2^n \geqslant n^2$ est-il vrai pour tout entier n ? Préciser.
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant n! \leqslant n^n$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11.
9. Montrer par récurrence sur n que $\forall (a,n) \in \mathbb{N}^2$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.
10. Montrer que $1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)!$ pour $n \geqslant 1$.
11. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
12. On considère la suite de Fibonacci (Φ_n) définie par $\Phi_0 = 0$ et $\Phi_1 = 1$ et
$$\Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n$$
a) Montrer (récurrence simple) que pour tout entier n, $\Phi_{n+1}^2 - \Phi_{n+2}\Phi_n = (-1)^n$.
b) Montrer que pour tout n, $\Phi_n \geqslant n$. En déduire la limite de la suite (Φ_n).
c) Montrer que pour tout entier n, $\Phi_0 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_{2n} = \Phi_{2n+1} - 1$.
d) Montrer que pour tout entier n, $\Phi_0 + \Phi_1 + \cdots + \Phi_n = \Phi_{n+2} - 1$.
13. On considère la suite de Fibonacci (Φ_n) définie par $\Phi_0 = 0$ et $\Phi_1 = 1$ et
$$\Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n$$
Montrer (récurrence double) que pour tout entier n,
$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$
On notera $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
14. On pose C_n la somme des n premiers nombres impairs. C_n est appelé le $n^{ième}$ nombre carré, pourquoi ?
15. Montrer que la somme des cubes de trois entiers naturels consécutifs est toujours divisible par 9.
16. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$. Montrer par récurrence sur n que :
a) $S_{n,1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$
b) $S_{n,2} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
c) $S_{n,3} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = S_{n,1}^2$. Donner une interprétation géométrique.

17. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
18. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $2!4!\cdots(2n)! \geqslant (n+1)!^n$.
19. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $3^n \geqslant n^3$
20. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.
21. Montrer que pour tout entier $n > 2$, $(n!)! > n\left[(n-1)!\right]^{n!}$.
22. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $2\cos\dfrac{\pi}{2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.
23. Démontrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

IX Exercice de recherche.

1. Démontrer par récurrence sur $n \geqslant 2$ que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est le quotient d'un nombre impair et d'un nombre pair.

   En déduire que $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est jamais entier pour $n \geqslant 2$.
2. Soit n un entier non nul et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs, on a

$$(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$$

   On devra étudier la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,,\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

   Montrer par récurrence sur n, façon Cauchy – Emil Artin, que

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,,\ f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

X Exercices corrigés.