Agrégation Interne 2017

Épreuve2

Solution proposée par Jean-Etienne Rombaldi

Partie I

1. L'hypothèse $f(x) = \underset{|x|\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ nous dit qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ pour tout réel x tel que $|x| \geq 1$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int_{|x|\geq 1} |f(x)|\, dx < +\infty$ (puisque $\int_{|x|\geq 1} \frac{dx}{x^2} < +\infty$) et en conséquence $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty$, ce qui signifie que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Comme $|f(x)\, e^{-ixy}| = |f(x)|$ pour tout réel y, chaque fonction $x \mapsto f(x)\, e^{-ixy}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $\widehat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2.

   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $|f(x \pm 2n\pi)| = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc chaque série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x \pm 2n\pi)$ est absolument convergente, ce qui nous assure de la définition sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$x \mapsto g(x) = f(x) + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (f(x + 2n\pi) + f(x - 2n\pi))$$

   (b) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} g(x + 2\pi) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x + 2(n+1)\pi) + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(x - 2(n-1)\pi) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}^*} f(x + 2m\pi) + \sum_{p\in\mathbb{N}} f(x - 2p\pi) = g(x) \end{aligned}$$

   ce qui signifie que la fonction g est 2π-périodique.

   (c) Comme f est continue et $f(t) = \underset{|t|\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq \frac{M}{t^2}$ pour tout réel t tel que $|t| \geq 1$.
   Si K est un compact de $\mathbb{R}$, il existe alors un entier $n_0 \geq 1$ tel que $|x \pm 2n\pi| \geq 2n\pi - |x| \geq 1$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in K$.
   En effet, il existe un réel $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$ et pour tout $x \in K$, on a $|x \pm 2n\pi| \geq ||2n\pi - |x|| \geq 2n\pi - |x| \geq 2n\pi - R \geq 1$ dès que $n \geq n_0 = \left[\frac{R+1}{2\pi}\right] + 1$, où $[\cdot]$ est la partie entière.
   Il en résulte que $|f(x \pm 2n\pi)| \leq \frac{M}{|x \pm 2n\pi|^2} \leq \frac{M}{(2n\pi - R)^2}$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in K$, ce qui nous assure de la convergence normale de chaque série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x \pm 2n\pi)$ sur K et en conséquence de la convergence normale de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ sur K.
   La fonction f' étant également continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(t) = \underset{|t|\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, on a aussi la convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u'_n$ sur K.

(d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $R > 0$ les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u'_n$ sont uniformément convergentes sur segment $[-R, R]$, donc la fonction $g = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-R, R]$ de dérivée $g' = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u'_n$. Comme $R > 0$ est quelconque, on en déduit que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g' = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u'_n$.

3. Les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt$$

De la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k$ sur $[0, 2\pi]$, on déduit que pour tout entier relatif n, on a :

$$\begin{aligned}
2\pi c_n(g) &= \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_0^{2\pi} u_k(t) e^{-int} dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_0^{2\pi} f(t + 2k\pi) e^{-int} dt + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \int_0^{2\pi} f(t - 2k\pi) e^{-int} dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x) e^{-in(x-2k\pi)} dx + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \int_{-2k\pi}^{-2(k-1)\pi} f(x) e^{-in(x+2k\pi)} dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x) e^{-inx} dx + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \int_{-2k\pi}^{-2(k-1)\pi} f(x) e^{-inx} dx
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x) e^{-inx} dx &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \lim_{m\to+\infty} \int_0^{2(m+1)\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-inx} dx
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \int_{-2k\pi}^{-2(k-1)\pi} f(x) e^{-inx} dx &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{-2k\pi}^{-2(k-1)\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \lim_{m\to+\infty} \int_{-2(m-1)\pi}^{0} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(x) e^{-inx} dx
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(n)$$

La fonction g étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet nous dit que sa série de Fourier converge normalement vers g sur $\mathbb{R}$, ce qui se traduit par la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

Rappelons que la somme $\sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$ est par définition la limite de la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Pour tout nombre complexe $t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ la fonction h_t est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

   (a) Ses coefficients de Fourier exponentiels sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(h_t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(t-in)x} dx$$

   avec :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{(t-in)x} dx = \left[\frac{e^{(t-in)x}}{t-in}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = (-1)^n \frac{e^{t\pi} - e^{-t\pi}}{t-in} = 2(-1)^n \frac{\operatorname{sh}(\pi t)}{t-in}$$

   soit :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(h_t) = \frac{\operatorname{sh}(\pi t)}{\pi}\frac{(-1)^n}{t-in}$$

(b) et (c) Chaque fonction h_t étant de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet nous dit que sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de h_t, soit en tenant compte de la 2π-périodicité :

$$\forall x \in \left]-\pi, \pi\right[,\ \frac{\operatorname{sh}(\pi t)}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t-in} e^{inx} = h_t(x) = e^{tx}$$

et pour $x = -\pi$:

$$\frac{\operatorname{sh}(\pi t)}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t-in} = \frac{e^{t\pi} + e^{-t\pi}}{2} = \operatorname{ch}(\pi t)$$

avec :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t-in} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{t-ik} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{t+ik}{t^2+k^2}$$

où $\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{t^2+k^2} = \frac{1}{t^2} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t^2+k^2}$ et $\sum_{k=-n}^{n}\frac{k}{t^2+k^2} = 0$, ce qui nous donne :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t-in} = \frac{1}{t} + 2t\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{t^2+n^2} = \pi\frac{\operatorname{ch}(\pi t)}{\operatorname{sh}(\pi t)}$$

(pour $t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$, on a $\operatorname{sh}(\pi t) \neq 0$), ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z},\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^2}{t^2+n^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(\pi t)\frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} - 1\right)$$

5. L'évaluation en $x = 0$ nous donne :

$$\frac{\operatorname{sh}(\pi t)}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t-in} = 1$$

soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k\frac{t+ik}{t^2+k^2} = \frac{\pi}{\operatorname{sh}(\pi t)}$$

avec :

$$\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k\frac{t+ik}{t^2+k^2}=\frac{1}{t}+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{t}{t^2+k^2}$$

donc :

$$\forall t\in\mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z},\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^2}{t^2+n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)}-1\right)$$

Partie II

1.

(a) La suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S'_n=\sum_{k=-n}^{n}|u_k|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ qui est croissante ($S'_{n+1}-S'_n=|u_{n+1}|+|u_{-(n+1)}|\geq 0$) et majorée ($(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable) est convergente vers une limite $S'\in\mathbb{R}^+$.
Pour $m>n\geq 0$, on a :

$$|S_m-S_n|=\left|\sum_{n+1\leq|k|\leq m}u_k\right|\leq\sum_{n+1\leq|k|\leq m}|u_k|=S'_m-S'_n\leq R'_n=S'-S'_n$$

avec $\lim_{n\to+\infty}R'_n=0$. Il en résulte que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

(b) La suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S'_n=\sum_{-n\leq k,\ell\leq n}|u_{k,\ell}|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ qui est croissante et majorée est convergente vers une limite $S'\in\mathbb{R}^+$.
Pour $m>n\geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}|S_m-S_n|&=\left|\sum_{(k,\ell)\in[-m,m]^2\setminus[-n,n]^2}u_{k,\ell}\right|\leq\sum_{(k,\ell)\in[-m,m]^2\setminus[-n,n]^2}|u_{k,\ell}|=S'_m-S'_n\\&\leq R'_n=S'-S'_n\end{aligned}$$

avec $\lim_{n\to+\infty}R'_n=0$. Il en résulte que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

2. Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ une suite double de nombres réels positifs telle que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, la série $\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty}u_{k,\ell}$ soit convergente de somme α_k ainsi que la série à termes positifs $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_k$ de somme α.
Pour tout entier naturel n, on a :

$$S_n=\sum_{-n\leq k,\ell\leq n}u_{k,\ell}=\sum_{k=-n}^{n}\left(\sum_{\ell=-n}^{n}u_{k,\ell}\right)\leq\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\leq\alpha$$

donc la suite double $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable de somme :

$$S=\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}u_{k,\ell}=\lim_{n\to+\infty}S_n\leq\alpha$$

D'autre part, pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k = \sum_{k=-n}^{n} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right) = \sum_{k=-n}^{n} \lim_{m\to+\infty} \sum_{\ell=-m}^{m} u_{k,\ell} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{\ell=-m}^{m} u_{k,\ell}$$
$$= \lim_{m\to+\infty} \sum_{\ell=-m}^{m} \sum_{k=-n}^{n} u_{k,\ell}$$

(somme finie de suites convergentes).
Pour $m \geq n$ (n est fixé), on a :

$$\sum_{\ell=-m}^{m} \left(\sum_{k=-n}^{n} u_{k,\ell} \right) \leq \sum_{\ell=-m}^{m} \left(\sum_{k=-m}^{m} u_{k,\ell} \right) = S_m$$

donc :

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \leq \lim_{m\to+\infty} S_m = S$$

et $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k \right) \leq S$, ce qui nous donne en définitive $S = \alpha$, soit :

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$$

3. Réciproquement soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ une suite double sommable de nombres réels positifs de somme S.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier naturel $n \geq |k|$, on a :

$$\sum_{\ell=-n}^{n} u_{k,\ell} \leq \sum_{-n\leq j,\ell\leq n} u_{j,\ell} \leq S = \sum_{(j,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u_{j,\ell}$$

donc la suite à termes positifs $\left(\sum\limits_{\ell=-n}^{n} u_{k,\ell} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et la suite $(u_{k,\ell})_{\ell\in\mathbb{Z}}$ est sommable de somme $\alpha_k = \sum\limits_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell}$.
Avec :

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k = \lim_{m\to+\infty} \sum_{\ell=-m}^{m} \left(\sum_{k=-n}^{n} u_{k,\ell} \right)$$

et :

$$\forall m \geq n, \ \sum_{\ell=-m}^{m} \left(\sum_{k=-n}^{n} u_{k,\ell} \right) \leq \sum_{\ell=-m}^{m} \left(\sum_{k=-m}^{m} u_{k,\ell} \right) = S_m$$

on déduit comme à la question précédente que $\sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k \leq \lim\limits_{m\to+\infty} S_m = S$, donc la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable et $\alpha = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \leq S$.

À la question précédente, on a vu que l'on a aussi l'autre inégalité $S \leq \alpha$, d'où l'égalité $S = \alpha$.
Comme k et ℓ jouent des rôles symétriques, on a aussi $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} < +\infty$ pour tout ℓ et :

$$\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right) = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u_{k,\ell}$$

4. Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ une suite double de nombres complexe telle que $\alpha_k = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| < +\infty$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k < +\infty$.
Dans ces conditions, la suite double de réels positifs $(|u_{k,\ell}|)_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable de somme :

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} |u_{k,\ell}| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| \right) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| \right)$$

ce qui nous dit que $\beta_\ell = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| < +\infty$ pour tout ℓ et $\beta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_\ell < +\infty$.
Avec les inégalités :

$$\sum_{-n\leq k,\ell\leq n} |u_{k,\ell}| = \sum_{k=-n}^{n} \left(\sum_{\ell=-n}^{n} |u_{k,\ell}| \right) \leq \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \leq \alpha < +\infty$$

on déduit que la suite double $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable.
Avec les inégalités :

$$\sum_{\ell=-n}^{n} |u_{k,\ell}| \leq \alpha_k < +\infty$$

on déduit que chaque suite $(u_{k,\ell})_{\ell\in\mathbb{Z}}$ est sommable et avec :

$$\sum_{k=-n}^{n} \left| \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right| \leq \sum_{k=-n}^{n} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| \right) \leq \alpha$$

on déduit que la suite $\left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
Avec :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{-n\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell} - \sum_{k=-n}^{n} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right) \right| &= \left| \sum_{k=-n}^{n} \left(\sum_{|\ell|\geq n+1} u_{k,\ell} \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=-n}^{n} \left(\sum_{|\ell|\geq n+1} |u_{k,\ell}| \right) \\
&\leq \varepsilon_n = \sum_{-n\leq k,\ell\leq n} |u_{k,\ell}| - \sum_{k=-n}^{n} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| \right)
\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ (puisque $\sum\limits_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} |u_{k,\ell}| = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum\limits_{\ell=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| \right)$), on déduit que :

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$$

Comme k et ℓ jouent des rôles symétriques chaque suite $(u_{k,\ell})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable, la suite $\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ est sommable et on a l'égalité :

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$$

C'est le théorème de Fubini pour les suites doubles sommables.

Partie III

1. On note pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, $v_n(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{n \operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}(n\pi)}$.
   Pour tout réel $x \geq 0$, on a :
   $$|v_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\backsim} ne^{n(x-\pi)}$$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n(x)| = +\infty$ pour $x \geq \pi$ et la série $\sum v_n(x)$ diverge. Pour $0 \leq x < \pi$, on a $ne^{n(x-\pi)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc la série $\sum v_n(x)$ converge absolument.
   Les fonctions v_n étant paires, on en déduit que le domaine de définition de la fonction φ est $]-\pi, \pi[$.
2. Les fonctions v_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$ et pour tout entier $p \geq 0$, tout réel $R \in]0, \pi[$, tout $x \in [-R, R]$, on a :
   $$\begin{aligned} \left|v_n^{(p)}(x)\right| &= \begin{cases} n^{p+1} \dfrac{\operatorname{sh}(n|x|)}{\operatorname{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r+1 \\ n^{p+1} \dfrac{\operatorname{ch}(n|x|)}{\operatorname{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r \end{cases} \\ &\leq \alpha_n = \begin{cases} n^{p+1} \dfrac{\operatorname{sh}(nR)}{\operatorname{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r+1 \\ n^{p+1} \dfrac{\operatorname{ch}(nR)}{\operatorname{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r \end{cases} \end{aligned}$$
   avec :
   $$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} n^{p+1} e^{n(R-\pi)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   donc toutes les série $\sum v_n^{(p)}$ sont uniformément convergentes sur $[-R, R]$ et la somme $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-R, R]$ de dérivées successives $\sum v_n^{(p)}$.
   Comme R est quelconque dans $]0, \pi[$, cela revient à dire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$ de dérivées :
   $$\varphi^{(p)}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^{p+1} \dfrac{\operatorname{sh}(nx)}{\operatorname{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r+1 \\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^{p+1} \dfrac{\operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r \end{cases}$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 < e^{-2n\pi} < 1$ et :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(n\pi)} = \frac{2}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}} = \frac{2e^{-n\pi}}{1 - e^{-2n\pi}}$$
$$= 2e^{-n\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kn\pi} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)n\pi}$$

Il en résulte que pour tout réel $x \in \left]-\pi, \pi\right[$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \frac{\operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}(n\pi)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{\operatorname{sh}(n\pi)} \left(e^{nx} + e^{-nx}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \left(e^{nx} + e^{-nx}\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)n\pi}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \left(e^{nx-(2k+1)n\pi} + e^{-nx-(2k+1)n\pi}\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(x)\right)\end{aligned}$$

en notant, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et x réel, $u_{n,k}(x) = (-1)^{n-1} n \left(e^{nx-(2k+1)n\pi} + e^{-nx-(2k+1)n\pi}\right)$.
Vérifions que la suite $(u_{n,k}(x))_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable.
Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < e^{-2n\pi} < 1$ et :

$$\begin{aligned}\alpha_n(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}(x)| = ne^{n(x-\pi)}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kn\pi} + ne^{-n(x+\pi)}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kn\pi} \\ &= n\left(e^{n(x-\pi)} + e^{-n(x+\pi)}\right)\frac{1}{1 - e^{-2n\pi}} < +\infty\end{aligned}$$

puis, pour $x \in \left]-\pi, \pi\right[$, on a $\alpha_n(x) \underset{n\to+\infty}{\backsim} n\left(e^{n(x-\pi)} + e^{-n(x+\pi)}\right)$ avec $0 < e^{x-\pi}, e^{-(x+\pi)} < 1$, ce qui nous donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(e^{n(x-\pi)} + e^{-n(x+\pi)}\right) = \frac{e^{x-\pi}}{\left(1 - e^{x-\pi}\right)^2} + \frac{e^{-(x+\pi)}}{\left(1 - e^{-(x+\pi)}\right)^2} < +\infty$$

(pour $0 < q < 1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = q\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = q\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right)' = \frac{q}{(1-q)^2}$).
On déduit alors de **II.4** que, pour tout réel $x \in \left]-\pi, \pi\right[$, la suite $(u_{n,k}(x))_{(n,k)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable et le théorème de Fubini nous dit que :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(x)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k}(x)\right)$$

soit :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \left(e^{nx-(2k+1)n\pi} + e^{-nx-(2k+1)n\pi}\right)\right)$$

4. En utilisant l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} nq^n = q\sum_{n=1}^{+\infty} n(-q)^{n-1} = -q\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-q)^n\right)' = \frac{q}{(1+q)^2}$$

pour $q_1 = e^{x-(2k+1)\pi} = e^{\alpha_1}$ et $q_2 = e^{-x-(2k+1)\pi} = e^{\alpha_2}$ qui sont dans $]0,1[$ pour $k \geq 0$ et $x \in]-\pi, \pi[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n\left(e^{nx-(2k+1)n\pi} + e^{-nx-(2k+1)n\pi}\right) = \frac{q_1}{(1+q_1)^2} + \frac{q_2}{(1+q_2)^2}$$

avec :

$$\begin{aligned}\frac{q_1}{(1+q_1)^2} &= \frac{e^{\alpha_1}}{(1+e^{\alpha_1})^2} = \frac{1}{\left(e^{-\frac{\alpha_1}{2}} + e^{\frac{\alpha_1}{2}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4\operatorname{ch}^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} = \frac{1}{2(1+\operatorname{ch}(\alpha_1))} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2k+1)\pi)}\end{aligned}$$

(en utilisant $\operatorname{ch}(2a) = 2\operatorname{ch}^2(a) - 1$) et :

$$\begin{aligned}\frac{q_2}{(1+q_2)^2} &= \frac{1}{2(1+\operatorname{ch}(\alpha_2))} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(-x-(2k+1)\pi)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x+(2k+1)\pi)}\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}2\varphi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2k+1)\pi)} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x+(2k+1)\pi)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2k+1)\pi)} + \sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x+(-2(j+1)+1)\pi)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2k+1)\pi)} + \sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2j+1)\pi)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2k+1)\pi)}\end{aligned}$$

(changement d'indice $k = -(j+1)$ dans la deuxième somme).

5. En notant, pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{1}{1+\operatorname{ch}(\pi-t)} = \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi-t}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1-\operatorname{th}^2\left(\frac{\pi-t}{2}\right)\right)$$

on a :

$$f(x+2n\pi) = \frac{1}{1+\operatorname{ch}(\pi-x+2n\pi)} = \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2n+1)\pi)}$$

(parité de ch), de sorte que :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi)$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(t) = \operatorname{th}\left(\frac{\pi - t}{2}\right) \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi-t}{2}\right)} = \operatorname{th}\left(\frac{\pi - t}{2}\right) f(t)$$

et :

$$\lim_{|t|\to+\infty} t^2 f(t) = \lim_{|t|\to+\infty} t^2 f'(t) = 0$$

donc $f(t) \underset{|t|\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $f'(t) \underset{|t|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On déduit alors de la question **I.2** que la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2n\pi)$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
g(-x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(-x - (2n+1)\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x + (2n+1)\pi)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x + (-2(j+1)+1)\pi)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x - (2j+1)\pi)} \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

(changement d'indice $n = -(j+1)$), donc la fonction g est paire.

Enfin, la question précédente nous dit que $\frac{1}{2}g$ est un prolongement de φ à $\mathbb{R}$ (puisque $\varphi(x) = \frac{1}{2}g(x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$).

On notera encore φ ce prolongement.

6. On peut alors utiliser la formule sommatoire de Poisson démontrée en **I.2** pour écrire que, pour tout réel x, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{4\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(n) e^{inx}$$

où :

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\pi - x)} = \frac{1}{4\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}$$

Pour $x = \pi$, on a bien $\psi(\pi) = \frac{1}{4}$.

– Partie IV –

1. et 2. La fonction $(x,t) \mapsto f(x,t) = \frac{\cos(2tx)}{\operatorname{ch}^2(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x,t)| \leq \varphi(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}$, la fonction φ étant intégrable sur $\mathbb{R}$ (puisque $\operatorname{ch}(t) \geq 1$ pour tout réel t et $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} \underset{|t|\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$), il en résulte que la fonction $\gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{\operatorname{ch}^2(t)} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction ψ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{1}{4\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}$. Elle est intégrable et sa transformée de Fourier est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(y) &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i(\pi-2t)y}}{\operatorname{ch}^2(t)}dt \\ &= \frac{e^{-i\pi y}}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2tyi}}{\operatorname{ch}^2(t)}dt = e^{-i\pi y}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ty)}{\operatorname{ch}^2(t)}dt = e^{-i\pi y}\gamma(y)\end{aligned}$$

(la fonction cos est paire et la fonction sin est impaire).

4. Pour tout réel t, on a :

$$(\operatorname{th}(t) - 1)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}$$

et en intégrant par parties, on obtient, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{\operatorname{ch}^2(t)}dt \\ &= \lim_{T\to+\infty}\left([\cos(2tx)(\operatorname{th}(t)-1)]_{t=0}^{t=T} + 2x\int_0^T \sin(2tx)(\operatorname{th}(t)-1)\,dt\right) \\ &= \lim_{T\to+\infty}\left(\cos(2Tx)(\operatorname{th}(T)-1) + 1 + 2x\int_0^T \sin(2tx)(\operatorname{th}(t)-1)\,dt\right)\end{aligned}$$

avec :

$$\operatorname{th}(t) - 1 = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} - 1 = -\frac{2e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = -\frac{2}{e^{2t}+1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et :

$$|\cos(2Tx)(\operatorname{th}(T)-1)| \leq |\operatorname{th}(T) - 1| = \frac{2}{e^{2T}+1} \underset{T\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= 1 + 2x\int_0^{+\infty} \sin(2tx)(\operatorname{th}(t)-1)\,dt \\ &= 1 - 4x\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{1+e^{2t}}dt \\ &= 1 - 4x\int_0^{+\infty} e^{-2t}\frac{\sin(2tx)}{1+e^{-2t}}dt\end{aligned}$$

5. Pour tout entier $n \geq 1$ et réel $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^{-2t}} &= \frac{1 + (-1)^n e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}} - \frac{(-1)^n e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt} - \frac{(-1)^n e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}}\end{aligned}$$

ce qui nous donne pour tout réel x :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t}\frac{\sin(2tx)}{1+e^{-2t}}dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-2(k+1)t}\sin(2tx)\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-2(n+2)t}}{1+e^{-2t}}\sin(2tx)\,dt$$

avec :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2(k+1)t}\sin(2tx)\,dt = \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{-2(k+1-ix)t}dt\right) = \frac{1}{2}\Im\left(\frac{1}{k+1-ix}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\Im\left(\frac{k+1+ix}{(k+1)^2+x^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{x}{(k+1)^2+x^2}$$

pour $k \geq 0$ et :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-2(n+2)t}}{1+e^{-2t}}\sin(2tx)\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-2(n+2)t}dt = \frac{1}{2(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Il en résulte que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t}\frac{\sin(2tx)}{1+e^{-2t}}dt = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+x^2} = -\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$$

et :

$$\gamma(x) = 1 + 2x^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$$

Ici, les théorèmes classiques d'intégration terme à terme n'aboutissent pas.

6. Pour $x = 0$, on a $\gamma(0) = 1$.
   En **I.5** on a vu que :

$$\forall t \in \mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z},\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^2}{t^2+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} - 1\right)$$

   donc, pour $x \neq 0$:

$$\gamma(x) = 1 + 2x^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+x^2} = \frac{\pi x}{\operatorname{sh}(\pi x)}$$

7. La formule sommatoire de Poisson (question **I.2**) appliquée à la fonction ψ nous donne pour tout réel x :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\psi(x+2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\psi}(n)\,e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-in\pi}\gamma(n)\,e^{inx}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\gamma(n)\,e^{inx}$$

   avec $\psi(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\operatorname{ch}(\pi-x)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\operatorname{ch}(x-\pi)}$ et $\gamma(n) = \dfrac{n\pi}{\operatorname{sh}(n\pi)}$ (qui vaut 1 pour $= 0$), soit :

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x+(2n-1)\pi)} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{n\pi}{\operatorname{sh}(n\pi)}(-1)^n e^{inx}$$

   En identifiant les parties réelles, cela donne :

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\operatorname{ch}(x+(2n-1)\pi)} = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{\operatorname{sh}(n\pi)}(-1)^n\cos(nx)\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\operatorname{sh}(n\pi)}(-1)^n\cos(nx)$$

En **III.4** on a montré que, pour tout $x \in \left]-\pi, \pi\right[$, on a :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\operatorname{ch}\left(x-(2k+1)\pi\right)}=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n\frac{\operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}(n\pi)}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\operatorname{ch}\left(x+(2n-1)\pi\right)}=\varphi(x)$$

(changement d'indice $k=-1$), ce qui nous donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n\frac{\operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}(n\pi)}=\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{n}{\operatorname{sh}(n\pi)}\cos(nx)$$

ou encore :

$$\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{n}{\operatorname{sh}(n\pi)}\cos(nx)+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{n}{\operatorname{sh}(n\pi)}\operatorname{ch}(nx)=0$$

pour $x \in \left]-\pi, \pi\right[$.
Pour $x=0$, on obtient :

$$\varphi(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{\operatorname{sh}(n\pi)}=\frac{1}{4\pi}$$

– Partie V –

1. Pour tout nombre complexe $t=x+iy\in\mathbb{C}\setminus i\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)$ et tout entier relatif $n\in\mathbb{Z}$, on a $t+i\left(\frac{1}{2}+n\right)\neq 0$ et :

$$\left|\frac{1}{\left(t+i\left(\frac{1}{2}+n\right)\right)^2}\right|=\frac{4}{4x^2+(2y+1+2n)^2}\underset{|n|\to+\infty}{\backsim}\frac{1}{n^2}$$

donc la famille $\left(\frac{1}{\left(t+i\left(\frac{1}{2}+n\right)\right)^2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

2.

(a) En **I.4** on a montré que pour tout $t\in\mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t-in}=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-in}+\frac{1}{t+in}\right)=\pi\frac{\operatorname{ch}(\pi t)}{\operatorname{sh}(\pi t)}$$

soit :

$$\frac{\operatorname{ch}(\pi t)}{\operatorname{sh}(\pi t)}=\frac{1}{\pi t}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-in}+\frac{1}{t+in}\right)$$

ou encore :

$$\frac{\operatorname{ch}(\pi t)}{\operatorname{sh}(\pi t)}=\frac{1}{\pi t}+\frac{2t}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{t^2+n^2}$$

(b) L'ensemble $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ étant ouvert, pour tout $t_0 \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que la boule fermée $B(t_0, \delta)$ de centre t_0 et de rayon δ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$.

En notant $t = x + iy$ et, pour $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé, $u_n(x) = \dfrac{1}{x - i(y-n)}$, on a des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{aligned}|u_n'(x)| &= \frac{1}{|x - i(y-n)|^2} = \frac{1}{x^2 + (y-n)^2} \\ &\leq \frac{1}{|y-n|^2} \leq \frac{1}{(|n| - |y|)^2} \leq \frac{1}{(|n| - M)^2}\end{aligned}$$

où M est un majorant de $y = \Im(t)$ pour $t \in B(t_0, \delta)$ (on a $|y - y_0| \leq |t - t_0| \leq \delta$, donc $|y| \leq |y_0| + \delta$). Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{t - in} + \frac{1}{t + in}\right)$ est normalement convergente sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et on peut dériver terme à terme, ce qui nous donne :

$$-\pi \frac{1}{\mathrm{sh}^2(\pi t)} = -\frac{1}{\pi t^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(t - in)^2} + \frac{1}{(t + in)^2}\right)$$

pour $t \in B(t_0, \delta)$ soit :

$$\frac{\pi^2}{\mathrm{sh}^2(\pi t)} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(t - in)^2} + \frac{1}{(t + in)^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t + in)^2}$$

pour tout pour $t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$.

(c) Pour $t \in \mathbb{C} \setminus i\left(\dfrac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$, on a $t + \dfrac{i}{2} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ et :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(t + i\left(\frac{1}{2} + n\right)\right)^2} = \frac{\pi^2}{\mathrm{sh}^2\left(\pi t + i\frac{\pi}{2}\right)}$$

avec :

$$\mathrm{sh}\left(\pi t + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\pi t + i\frac{\pi}{2}} - e^{-\pi t - i\frac{\pi}{2}}}{2} = i\frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{2} = i\,\mathrm{ch}(\pi t)$$

ce qui nous donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(t + i\left(\frac{1}{2} + n\right)\right)^2} = -\frac{\pi^2}{\mathrm{ch}^2(\pi t)}$$

3. En **III.5** on a prolongé la fonction φ à $\mathbb{R}$ en posant, pour tout réel x :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \mathrm{ch}(x - (2n+1)\pi)} = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) &= \varphi(x) - \varphi(0) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)}\right)\end{aligned}$$

4. C'est le résultat montré en **V.6** pour $z = x$ réel.

5. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) &= \varphi(x) - \varphi(0)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}\right)\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)} &= -\frac{1}{\pi^2}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left(\frac{x}{2\pi}-\left(k+\frac{1}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}+\ell\right)\right)^2}\\ &= -4\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left(x-(2k+1)\pi+(2\ell+1)i\pi\right)^2}\end{aligned}$$

(questions **V.3** et **III.2c**), ce qui nous donne :

$$\mathcal{P}(x) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} v_{k,\ell}(x)\right) = -\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} v_{k,\ell}(x)$$

puisque la famille $\left(v_{k,\ell}(x)\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable.

6. Pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2$, on note :

$$z_{k,\ell} = 2k+1+(2\ell+1)\,i \in (2\mathbb{Z}+1)+(2\mathbb{Z}+1)\,i$$

et tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$:

$$u_{k,\ell}(z) = \frac{1}{\left(z-z_{k,\ell}\pi\right)^2} = \frac{1}{\left(z_{k,\ell}\pi - z\right)^2}$$

$$v_{k,\ell}(z) = u_{k,\ell}(z) - u_{k,\ell}(0) = \frac{z}{\pi^2}\frac{2\pi z_{k,\ell}-z}{\left(\pi z_{k,\ell}-z\right)^2 z_{k,\ell}^2}$$

Pour $|k|\,,\,|\ell|$ assez grands de sorte que $\pi\,|z_{k,\ell}| > 2\,|z| > 0$, on a :

$$\begin{aligned}|v_{k,\ell}(z)| &\leq \frac{|z|}{\pi^2}\frac{2\pi\,|z_{k,\ell}|+|z|}{|\pi z_{k,\ell}-z|^2\,|z_{k,\ell}|^2} \leq \frac{|z|}{\pi^2}\frac{2\pi\,|z_{k,\ell}|+|z|}{\left(\pi\,|z_{k,\ell}|-|z|\right)^2|z_{k,\ell}|^2}\\ &\leq |z|\,\frac{2\pi\,|z_{k,\ell}|+|z|}{\left(\pi\,|z_{k,\ell}|-|z|\right)^4} \leq 16\,|z|\,\frac{3\pi\,|z_{k,\ell}|}{\left(\pi\,|z_{k,\ell}|\right)^4} = \frac{\alpha\,|z|}{|z_{k,\ell}|^3}\end{aligned}$$

(puisque $|z| < \pi\,|z_{k,\ell}|$ et $\pi\,|z_{k,\ell}| - |z| > \dfrac{\pi\,|z_{k,\ell}|}{2}$) avec

$$\sum\frac{1}{|z_{k,\ell}|^3} \leq \sum\frac{1}{\left((2k+1)^2+(2\ell+1)^2\right)^{\frac{3}{2}}} < +\infty$$

(la famille $\left(\dfrac{1}{(k^2+\ell^2)^p}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable si, et seulement si, $p>1$).
Il en résulte que la famille $\left(v_{k,\ell}(z)\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable.

7.

(a) Pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$\begin{aligned} z_{k,\ell} &= 2k+1+(2\ell+1)\,i = -\left(-2k-1+(-2\ell-1)\,i\right) \\ &= -\left(2\,(-k-1)+1+(2\,(-\ell-1)+1)\,i\right) \\ &= -z_{-(k+1),-(\ell+1)} \end{aligned}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on a $-z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et :

$$\begin{aligned} v_{k,\ell}(-z) &= \frac{-z}{\pi^2}\frac{2\pi z_{k,\ell}+z}{(\pi z_{k,\ell}+z)^2 z_{k,\ell}^2} = \frac{-z}{\pi^2}\frac{-2\pi z_{-(k+1),-(\ell+1)}+z}{\left(-\pi z_{-(k+1),-(\ell+1)}+z\right)^2 z_{-(k+1),-(\ell+1)}^2} \\ &= \frac{z}{\pi^2}\frac{2\pi z_{-(k+1),-(\ell+1)}-z}{\left(\pi z_{-(k+1),-(\ell+1)}-z\right)^2 z_{-(k+1),-(\ell+1)}^2} = v_{-(k+1),-(\ell+1)}(z) \end{aligned}$$

donc :

$$\mathcal{P}(-z) = -\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} v_{k,\ell}(-z) = -\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} v_{-(k+1),-(\ell+1)}(z) = \mathcal{P}(z)$$

puisque l'application $(k,\ell) \mapsto (-(k+1),-(\ell+1))$ est une permutation de $\mathbb{Z}^2$.
La fonction $\mathcal{P}$ est donc paire.
Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on a $z+2\pi \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et pour $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} v_{k,\ell}(z+2\pi) &= \frac{1}{\left(z+2\pi-(2k+1)\,\pi-(2\ell+1)\,i\pi\right)^2} - \frac{1}{\left((2k+1)\,\pi+(2\ell+1)\,i\pi\right)^2} \\ &= \frac{1}{(z-z_{k-1,\ell}\pi)^2} - \frac{1}{(z_{k,\ell}\pi)^2} \end{aligned}$$

donc :

$$v_{k,\ell}(z+2\pi) - v_{k,\ell}(z) = \frac{1}{(z-z_{k-1,\ell}\pi)^2} - \frac{1}{(z-z_{k,\ell}\pi)^2}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{-n\leq k,\ell\leq n}\left(v_{k,\ell}(z+2\pi)-v_{k,\ell}(z)\right) = \sum_{-n\leq k,\ell\leq n}\frac{1}{(z-z_{k-1,\ell}\pi)^2} - \sum_{-n\leq k,\ell\leq n}\frac{1}{(z-z_{k,\ell}\pi)^2} \\ &= \sum_{\substack{-(n+1)\leq k\leq n-1\\ -n\leq\ell\leq n}}\frac{1}{(z-z_{k,\ell}\pi)^2} - \sum_{-n\leq k,\ell\leq n}\frac{1}{(z-z_{k,\ell}\pi)^2} \\ &= \sum_{-n\leq\ell\leq n}\left(\frac{1}{\left(z-z_{-(n+1),\ell}\pi\right)^2} - \frac{1}{(z-z_{n,\ell}\pi)^2}\right) \end{aligned}$$

avec, pour $z = x+iy$ et $k \in \{-(n+1),n\}$:

$$\begin{aligned} |z-z_{k,\ell}\pi|^2 &= ((2k+1)\,\pi-x)^2 + ((2\ell+1)\,\pi-y)^2 \\ &\geq ((2k+1)\,\pi-x)^2 \end{aligned}$$

donc :

$$\left|\sum_{-n\leq\ell\leq n}\frac{1}{(z-z_{k,\ell}\pi)^2}\right| \leq \frac{2n+1}{((2k+1)\,\pi-x)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$$

et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$, ce qui signifie que $\mathcal{P}(z+2\pi) = \mathcal{P}(z)$.
On vérifie de manière analogue que $\mathcal{P}(z+2i\pi) = \mathcal{P}(z)$.
Donc $\mathcal{P}$ est 2π-périodique et $2i\pi$-périodique.

(b) En notant encore $z_{k,\ell} = 2k+1+(2\ell+1)\,i$, on a pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \sqrt{2}\pi$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z - z_{k,\ell}\pi)^2} &= \frac{1}{(z_{k,\ell}\pi)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_{k,\ell}\pi}\right)^2} \\
&= \frac{1}{(z_{k,\ell}\pi)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{z}{z_{k,\ell}\pi}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(z_{k,\ell}\pi)^{n+2}} z^n
\end{aligned}$$

(on a $|z_{k,\ell}\pi|^2 = \left((2k+1)^2 + (2\ell+1)^2\right)\pi^2 \geq 2\pi^2 > |z|$), ce qui nous donne :

$$\mathcal{P}(z) = -\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(z_{k,\ell}\pi)^{n+2}} z^n$$

la famille triple $\left(\frac{n+1}{(z_{k,\ell}\pi)^{n+2}} z^n\right)_{(k,\ell,n)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{N}^*}$ étant sommable (vérification fastidieuse à ce stade du problème), ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Fubini pour écrire que :

$$\mathcal{P}(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\pi^{n+2}} \left(\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{z_{k,\ell}^{n+2}}\right) z^n$$

(c) Par double périodicité, on en déduit que $\mathcal{P}$ est développable en série entière au voisinage de chaque point de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.