TEXTES DE CONCOURS GÉNÉRAL

● **846.** On donne un cercle C et l'axe C′ de ce cercle, c'est-à-dire la perpendiculaire au plan de C, menée par le centre. Une inversion quelconque fait correspondre à C et à C′ deux cercles C_1 et C'_1. Une seconde inversion, également arbitraire, fait correspondre à C_1 et C'_1 deux nouveaux cercles C_2 et C'_2.

1° Indiquer des propriétés caractéristiques du couple de cercles C_1 et C'_1. Le couple C_2, C'_2 possède-t-il ces propriétés?

2° Les sommets opposés d'un quadrilatère gauche Q sont situés respectivement sur deux cercles C_1, C'_1 donnés, de l'espèce indiquée. Trouver la relation qui existe entre les longueurs des côtés de Q. Réciproquement, les côtés d'un quatrilatère Q donné satisfaisant à cette relation, est-il possible de trouver deux cercles C_1, C'_1 passant respectivement par les sommets opposés de Q et possédant les propriétés caractéristiques susvisées?

3° Deux sommets opposés d'un tel quadrilatère étant donnés, ainsi que la droite qui joint les deux autres, il y a une infinité de ces quadrilatères Q. Etudier le déplacement des sommets variables. Trouver le lieu géométrique du centre de la sphère circonscrite à Q.

4° Deux points A et B étant fixés sur C_1, et un point M se déplaçant sur C'_1, que peut-on dire des surfaces lieux géométriques des bissectrices des droites MA, MB? Comment se coupent ces surfaces?

5° Est-il possible de trouver deux cercles Γ et Γ′ tels qu'une inversion arbitraire leur fasse correspondre des cercles dont les plans se coupent sous un angle constant? (1922).

● **847.** On considère les hyperboles qui ont un foyer donné F qui passent par un point donné A et dont une asymptote est parallèle à une direction donnée D.

1° Démontrer que la directrice relative au foyer F passe par l'un ou l'autre de deux points fixes que l'on construira.

(Dans tout le problème, on n'envisagera que la famille des hyperboles (H) pour lesquelles la directrice passe par l'un des deux points trouvés; soit I ce point.)

Prouver que le lieu du second foyer de ces hyperboles est une parabole.

2° Soient (H) et (H′) deux hyperboles quelconques de la famille considérée, f et f' leurs foyers respectifs autres que F, (C_H) et (C_H'), les cercles directeurs qui ont pour centres f et f'.

Lieu du point de contact des cercles (C_H) et (C_H') lorsqu'ils sont tangents.

Discuter leur intersection suivant la position de la droite ff'. Lieux de leurs points de rencontre quand la droite ff' varie en gardant une direction fixe ou en passant par un point fixe.

3° (H) et (H′) peuvent avoir des tangentes communes. Discuter l'existence de ces droites. Montrer qu'elles se coupent sur une droite fixe. Trouver la courbe fixe à laquelle elles restent tangentes quand la droite ff' a une direction fixe ou passe par un point fixe; appliquer au cas où les hyperboles (H) et (H′) se coupent orthogonalement au point A.

4° (H) et (H′) peuvent avoir des points communs autres que le point A et le point à l'infini sur D. Discuter leur existence. Quel est leur lieu :

a) Quand ils sont confondus;

b) Quand les deux hyperboles associées ont leurs asymptotes parallèles;

c) Quand elles ont même excentricité? (1923).

● **848.** On oriente les côtés d'un triangle ABC donné, respectivement de B vers C, de C vers A, de A vers B. Sur ces côtés, à partir de leurs milieux A_1, B_1, C_1, on porte des vecteurs $\overrightarrow{A_1A'}$, $\overrightarrow{B_1B'}$, $\overrightarrow{C_1C'}$, mesurés par les nombres $\lambda \cos A$, $\lambda \cos B$, $\lambda \cos C$, λ désignant un nombre algébrique arbitraire.

1° Montrer que les cercles circonscrits aux triangles B′C′A, C′A′B, A′B′C, sont égaux.

2° Trouver les courbes auxquelles sont tangents les côtés du triangle A′B′C′ quand λ varie.

3° Soit Γ le cercle circonscrit à ce triangle. Démontrer que si Γ tend vers une position limite Γ_0, les points communs à Γ_0 et Γ tendent vers des positions limites M_0, M'_0. On indiquera une construction géométrique simple des points M_0, M'_0 et on en cherchera le lieu.

4° Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La tangente en O au cercle circonscrit au triangle $OM_0M'_0$ rencontre $M_0M'_0$ en un point E_0 dont on demande le lieu. On cherchera la courbe à laquelle sont tangentes les polaires de O par rapport aux cercles Γ.

5° Les perpendiculaires à BC en A′, à CA en B′, à AB en C′ sont les côtés d'un triangle A″B″C″. On demande de trouver la relation qui existe entre les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″.

6° Y a-t-il, en dehors des triangles A′B′C′ précités, d'autres triangles A′B′C′, inscrits au triangle ABC, et tels que les cercles circonscrits aux triangles B′C′A, C′A′B, A′B′C soient égaux? (1924).

● **849.** I. Soient P, P_1, P_2, P_3, des positions successives d'un plan mobile qui glisse sur un plan fixe; un point M de P a dans P_1, P_2, P_3 les positions M_1, M_2, M_3.

M décrivant une droite de P, trouver le lieu D du milieu de MM_1 et l'enveloppe de MM_1. Même question, M décrivant un cercle de P. Montrer que la projection de MM_1 sur D est constante.

II. Trouver le lieu Γ de M pour que M, M_1, M_2 soient en ligne droite; quelle est alors l'enveloppe de la droite MM_1M_2?

Trouver le lieu Γ′ de M pour que le rapport $\frac{MM_1}{MM_2}$ soit constant; dans ce cas, que sont les enveloppes des côtés du triangle MM_1M_2? Sous quel angle se coupent Γ et Γ′? Trouver le lieu de M pour que l'angle M_1MM_2 soit constant.

III. Déterminer M pour que le triangle MM_1M_2 soit équilatéral, ou pour que les quatre points M, M_1, M_2, M_3 soient en ligne droite.

IV. Une droite Δ du plan a, dans P_1, P_2, P_3, les positions respectives Δ_1, Δ_2, Δ_3. Que doit être l'enveloppe de Δ pour que Δ, Δ_1, Δ_2 concourent? Trouver le lieu Σ de leur point de concours. Quelle relation présente Σ avec le lieu Γ? Déterminer Δ de manière que Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 soient concourantes.

V. Trouver l'enveloppe de Δ pour que le triangle formé par Δ_1, Δ_2, Δ_3, ait une aire constante.

Quel est le lieu de M pour que l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ soit constante? (1926)

● **850.** Un cercle variable Γ passe par deux points A et B ($AB = 2a$). O étant le centre de ce cercle, on prend sur OB le point H tel que $\frac{\overline{HB}}{\overline{HO}} = -m$ (m, nombre positif donné) et on mène par ce point la perpendiculaire à OB, qui coupe Γ en P et Q :

1° Lieu des points P, Q et enveloppe de PQ. Si l'on oriente convenablement AP et AQ, la somme $\overline{AP} + \overline{AQ}$ est constante.

2° Soit γ le cercle d'Euler relatif au triangle APQ; lieu du centre ω de ce cercle; montrer que la droite ωH passe par un point fixe.

Cas de $m = 1$; quel est, dans ce cas, le lieu des points de contact du cercle d'Euler avec les cercles inscrit ou exinscrits au triangle APQ, qui ont leurs centres sur AB?

3° Soient J et J_1 les points de contact de PQ avec lesdits cercles. Etudier, dans le cas général, la famille des cercles de diamètre JJ_1. Combien en passe-t-il par un point? Combien y en a-t-il qui sont tangents à une droite ou un cercle?

4° Montrer qu'il existe deux points fixes F_1 et F_2, tels que la corde de longueur minima, menée par F_1 (ou F_2) dans le cercle γ, soit vue du centre ω de ce cercle sous un angle constant 2β. On posera $\cos \beta = e$ et on calculera e en fonction de m.

5° Combien y a-t-il de cercles γ qui passent par un point donné M? Discuter quand M se déplace.

6° Combien y a-t-il de cercles γ qui sont tangents à une droite donnée D? Discuter quand D se déplace.

7° Quel est le lieu du point M tel que deux cercles γ, qui passent par ce point soient orthogonaux? (1929).

● **851.** On donne deux cercles C et C′, de rayons r et r', dans un plan P; d est la distance de leurs centres. Soit D une direction convenablement choisie, faisant un angle α avec le plan P. On fait subir aux cercles C et C′ des translations respectives T et T′, parallèles à D, de sorte que les positions nouvelles C_1 et C'_1 de ces cercles soient sur une même sphère S.

I. Calculer le rayon de S, en fonction de d, r, r', α. Déterminer α de sorte que le rayon de S soit minimum; évaluer ce minimum en supposant $r > r'$.

II. On projette sur le plan P, parallèlement à D, tous les cercles Γ_1 de S, dont les plans sont parallèles à P; on obtient ainsi dans le plan P une famille de cercles

Γ, qui comprend les deux cercles donnés et qui dépend de α. Etudier les cercles Γ d'une famille :

a) Construire ceux qui passent par un point donné M du plan P; discuter.

b) Construire ceux qui sont tangents à une droite donnée Δ du plan P; discuter. Ces deux discussions conduisent à une séparatrice Σ que l'on qualifiera.

III. Par un point quelconque N, pris sur Σ, on mène une tangente à un cercle Γ; montrer que le rapport de la longueur de cette tangente à la distance de N à une droite fixe δ, convenablement associée à Γ, est un nombre constant, que l'on calculera. Cas où Γ a un rayon nul. Quelle relation peut-on en déduire entre les longueurs des tangentes menées de N à deux cercles Γ et Γ'?

IV. Soit γ le cylindre passant par Γ et dont les génératrices sont parallèles à D. Montrer que, par tout point Q de l'espace, on peut mener deux plans de sections circulaires du cylindre γ et que les deux sections sont sur une même sphère.

On appellera puissance du point Q par rapport au cylindre la puissance de ce point par rapport à la sphère. Trouver le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cylindres γ et γ'. Qu'en peut-on conclure pour les positions relatives de l'axe radical de deux cercles Γ et Γ', et des droites δ et δ' associées respectivement à Γ et Γ'?

V. Sur chaque cercle Γ d'une famille donnée, on considère les points où la tangente est parallèle à une direction donnée λ du plan P. Lieu de ces points. Quand γ varie, ce lieu se déforme; le caractériser par rapport à la séparatrice Σ du § II.

VI. D'un cercle Γ de rayon nul, on mène les tangentes à tous les cercles Γ; lieu de leurs points de contact.

Lieu des points communs aux cercles Γ qui sont orthogonaux. (1931).

● **852.** I. Etant donné un cercle (C) de centre C et de rayon R et un point fixe O ($OC = d$), on mène par O une droite quelconque qui coupe le cercle en A et A'. On considère le cercle (γ) dont un diamètre est AA'; soit γ son centre. Les cercles (γ) appartiennent à une famille (F) que l'on demande d'étudier.

On construira géométriquement les cercles (γ) qui passent par un point donné M ou qui sont orthogonaux à un cercle donné.

II. Soient (γ_1) et (γ_2) deux cercles orthogonaux de la famille (F). Trouver le lieu du milieu de $\gamma_1\gamma_2$ et ceux des pieds des hauteurs du triangle $O\gamma_1\gamma_2$. Trouver l'enveloppe de $\gamma_1\gamma_2$; discuter; construire la ou les droites $\gamma_1\gamma_2$ qui passent par un point donné γ_1.

III. On suppose que le point M occupe une position limite N, telle que les deux cercles (γ) qui passent par ce point soient confondus. Construire les deux points limites N et N' situés sur un cercle (γ). Quel est le lieu des symétriques de N et N' par rapport au diamètre OAA' de (γ)? Trouver la relation entre $\rho = ON$ et l'angle $\varphi = (OC, ON)$. Etudier la variation de ρ en fonction de φ et figurer la courbe (Γ), lieu de N.

IV. Montrer que, sous certaines réserves, il existe, sur OC, deux points O_1 et O_2, que l'on placera par rapport à O et C, tels que $\rho_1 = O_1N$ et $\rho_2 = O_2N$ s'expriment en fonctions linéaires de ρ (on pourra poser, s'il y a lieu, $d = R \sin\alpha$).

Peut-on rapprocher (Γ) de la projection de la courbe commune à deux cônes de révolution, d'axes parallèles, sur un plan perpendiculaire à ces axes?

(1933).

● **853.** Dans un plan orienté, on donne une droite (D) et, sur cette droite, un point O et deux points A, A', tels que $\overline{OA} = -\overline{OA'} = a$. Soit (D') la perpendiculaire à (D) menée par O :

1° Le lieu des points M du plan tels que la somme de l'angle des droites portant OA, AM et de l'angle des droites portant OA, A'M soit égale à $\frac{\pi}{2}$ est une hyperbole équilatère (H). (H) est aussi le lieu des points de contact, avec les cercles (C) passant par A et A', des tangentes perpendiculaires à AA'. La considération de deux cercles (C), suivie d'un passage à la limite, conduit à une construction du point U où la tangente en M à (H) coupe (D'); cette tangente coupe (D) en T. La normale en M à (H) coupe D en N, (D') en P; M se projette orthogonalement en *h* et *k* sur (D) et (D'). A partir de l'un des points précédents, construire les autres.

2° Une droite passant par O coupe (H) en M et N; soient *m* et *n* les points de cette droite tels que : $OM.Om = ON.On = a^2$. Les points *m* et *n* (on le prouvera) sont les sommets d'une hyperbole équilatère passant par A et A'.

3° On associe au cercle (C) de centre K, circonscrit au triangle AMA', le cercle (C_1) de centre K_1, qui passe par les milieux des côtés de ce triangle. Soit, sur la droite KK_1 le point I défini par : $\overline{IK} + \lambda\,\overline{IK_1} = 0$, λ désignant un nombre constant. Lieu de I. Déterminer λ pour que KK_1 soit normale en I à ce lieu. Axe radical des cercles (C), (C_1) et enveloppe de cet axe radical.

4° Soient M et M', deux points quelconques de (H). Montrer que l'orthocentre de chacun des triangles AMN', A'MN' est sur le cercle circonscrit à l'autre. Soit θ le point de MM' situé sur (D); évaluer le rapport $\frac{\theta A}{\theta A'}$, en fonction des distances de M et M' à A et A'. Prouver que le rayon commun aux deux cercles tangents à (H) en M, et, passant l'un par A, l'autre par A' est $\frac{OM.Oh}{a}$. Ces deux cercles coupent de nouveau (D) en α, α'; quelles positions peuvent prendre α, α'? Que dire du milieu de $\alpha\alpha'$? Comment déterminer M connaissant la distance $\alpha\alpha'$?

5° On donne un triangle AMA'; construire deux cercles égaux, passant l'un par M et A, l'autre par M et A', et tangents en M. A quelle condition doit satisfaire AMA' pour que la tangente commune en M à ces deux cercles soit la droite conjuguée harmonique de la hauteur M*h* par rapport à MA et MA'? Rattacher cette dernière partie du problème à la précédente. (1935).

● **854.** Toutes les sphères S envisagées dans ce problème coupent la droite donnée D sous l'angle aigu donné θ :

1° Parmi les sphères S, on considère les sphères S_1 qui ont leurs centres sur une droite donnée Δ. Soient O et ω les points où la perpendiculaire commune à D et Δ coupe respectivement ces deux droites ($O\omega = a \neq 0$). Soit α l'angle aigu de D et Δ; on appelle I le centre d'une sphère S_1 quelconque et on pose $\overline{\omega I} = x$. Démontrer qu'il existe sur la droite $\omega\omega_1$ deux points A et B tels que le rapport du rayon R de toute sphère S_1 à la distance de son centre I à l'un des points A et B reste constant. On donne sur D un point H ($\overline{OH} = h$); chercher si ce point est toujours point d'intersection d'une sphère S avec la droite D. Discuter.

2° On envisage de nouveau les sphères S_1. Soit C_1 un cercle donné d'axe Δ. Déterminer géométriquement celle des sphères S_1 qui passent par le cercle C_1. Aucune discussion générale n'est demandée, mais on montrera que, pour une disposition particulière des données, toutes les sphères S_1 sont solutions. Soit C le cercle C_1 particulier pour lequel il en est ainsi; chercher inversement à quelles conditions une droite et un cercle donnés peuvent jouer le rôle de la droite D et du cercle C. Prouver que les plans passant par D coupent C sous un angle constant.

3° On envisage encore les sphères S_1. Soit D' une droite donnée qui fait l'angle aigu α' avec Δ. Déterminer géométriquement celles des sphères S_1 qui coupent D' sous l'angle donné aigu θ'. Aucune discussion générale n'est demandée, mais on cherchera les droites D' particulières pour lesquelles toutes les sphères S_1 sont solutions; préciser leur disposition; α' et θ' peuvent-ils prendre toutes valeurs? Parmi ces droites, en existe-t-il qui soient tangentes à toutes les sphères S_1; en passe-t-il par un point quelconque de l'espace? Montrer que certains des résultats obtenus se rattachent à l'enveloppe des cercles de section des sphères S_1 par un plan fixe passant par Δ; trouver cette enveloppe.

4° Parmi les sphères S, on considère les sphères S_2 qui passent par un point donné F. Chercher le lieu de ceux des centres des sphères S_2 qui sont situés dans un plan donné perpendiculaire à D; en déduire que le lieu total des centres des sphères S_2 est une surface Σ de révolution. Etudier la section de Σ par un plan parallèle à D; montrer que cette section peut être formée de droites G; rattacher ce résultat au 2°. Prouver que le plan déterminé par F et par une droite G variable reste tangent à un cône de révolution; lieu du point où G touche ce cône. (1936).

● **855.** I. A et B étant deux points d'un cercle de centre O, M et N étant 2 points conjugués harmoniques par rapport aux extrémités d'un diamètre de ce cercle, démontrer la relation angulaire :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + 2h\pi \qquad [h \text{ entier}]$$

II. Dans un plan P deux cercles (A) et (B) de centres A et B se coupent aux points C', D'. On prend un point B' sur le cercle (A) et un point A' sur le cercle (B). On suppose les cercles (A) et (B) fixes et les points A' et B', variables de manière que l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BA'})$, soit invariable de grandeur et de sens. Quels sont les lieux du centre C du cercle (C) circonscrit au triangle A'B'D', et du centre D du cercle (D) circonscrit au triangle A'B'C'?

Montrer qu'il existe un point fixe E' du plan P, autre que D', tel que le rapport $\frac{\overline{CD'}}{\overline{CE'}}$ reste constant quand A' et B' varient de la manière indiquée. Calculer l'angle $(\overrightarrow{E'A}, \overrightarrow{E'B})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BA'}) = \theta$.

Déduire du résultat obtenu que les triangles E'AB' et E'BA' sont semblables et de même sens. Etablir que le rapport $\frac{\overline{DC'}}{\overline{DE'}}$ reste aussi constant.

III. Quatre points A, B, C, D donnés seuls dans un plan P_1 sont supposés non situés sur un même cercle, et tels que 3 quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On propose de trouver quatre cercles (A) (B) (C) (D) ayant ces points comme centres respectifs, de façon que :

(B) (C) (D)	aient un point commun	A'
(C) (D) (A)	—	B'
(D) (A) (B)	—	C'
(A) (B) (C)	—	D'

On détermine à cet effet une des droites AC', AD', AB', pour fixer les idées AC'; puis d'une manière analogue la droite BC'.

Discuter la construction obtenue et justifier que le problème est possible. On considère les inversions positives dont les cercles d'inversion respectifs sont circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC. Prouver qu'un certain point E' a comme homologues respectifs dans ces inversions les points A'B'C'D'. Montrer que les rayons des cercles (A) (B) (C) (D) sont proportionnels aux distances de E' aux points A, B, C, D; que les angles AE'A', BE'B', CE'C', DE'D', ont leurs bissectrices portées par une même droite et que :

$$E'A \times E'A' = E'B \times E'B' = E'C \times E'C' = E'D \times E'D'.$$

IV. Une inversion dont le pôle est un point quelconque e du plan P [distinct de A, B, C, D, A', B', C', D', E'] transforme ces points en les points $abcda'b'c'd'e'$.

On dira que a, b, c, d, e, constituant une première *série* de points, $a'b'c'd'e'$ sont leurs *associés* respectifs et constituent une seconde série. Démontrer que le cercle passant par 3 *quelconques* des points de l'une de ces séries est orthogonal à tous les cercles passant par les deux points de l'autre série, *non associés* aux trois points choisis.

Exemple : le cercle abc est orthogonal à tous les cercles passant par d' et e'; le cercle $a'b'c'$ est orthogonal à tous les cercles passant par d et e.

V. On considère les sphères S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 et S'_1 S'_2 S'_3 S'_4 S'_5 tangentes au plan P aux points respectifs a b c d e et a' b' c' d' e' *de la configuration étudiée dans IV*. Tous ces points sont supposés distincts et donnés. Former les relations entre les rayons x y z t u et x' y' z' $t'u'$ de ces sphères qui expriment les contacts mutuels :

de S_1	avec chacune des sphères	$S'_2S'_3S'_4S'_5$
S_2	— —	$S'_3S'_4S'_5S'_1$
S_3	— —	$S'_4S'_5S'_1S'_2$
S_4	— —	$S'_5S'_1S'_2S'_3$
S_5	— —	$S'_1S'_2S'_3S'_4$

Résoudre et discuter le système ainsi obtenu de 20 équations aux inconnues x y z t u et $x'y'z't'u'$. Quelle conclusion géométrique résulte de cette étude.

(1944).

● **856.** I. — Dans un plan on donne deux points fixes O et A ($OA = a \neq 0$). Au point quelconque m du plan on fait correspondre le point M situé sur la demi-droite symétrique de la demi-droite OA par rapport à la droite Om, à la distance OM du point O définie par la formule $a.OM = \overline{Om}^2$, M est dit associé au point m. De combien de points m un point M choisi quelconque dans le plan est-il associé? Lorsque m décrit une ligne (γ), M décrit une ligne (Γ) dite associée à (γ). Si dans la construction de (Γ) on remplace le point A par un autre point fixe A_1 du plan ($OA_1 = a_1 \neq 0$) sans modifier le point O, ni la ligne (γ), (Γ) est remplacée par une nouvelle ligne (Γ_1). Etablir que (Γ) peut être déduite de (Γ_1) par une similitude directe dont le centre, l'angle et le rapport sont indépendants de la ligne (γ).

II. — On désigne par I le centre du cercle inscrit au triangle OAM, par J, K, L les centres des cercles exinscrits de ce triangle intérieurs à ses angles respectifs de sommets O, A, M.

Montrer que m et son symétrique m' par rapport à O sont sur le cercle décrit sur KL comme diamètre, et que les points I et J sont conjugués par rapport à ce cercle.

III. — On considère les inversions de pôles I, J, K, L et de puissances respectives $\overline{Im}.\overline{Im'}$, $\overline{Jm}.\overline{Jm'}$, $\overline{Km}^2$, $\overline{Lm}^2$. Comment chacune d'elles transforme-t-elle les points O, A, M?

Quel est l'effet sur les points O, A, M du produit de ces inversions prises dans l'ordre I, J, K, L de leurs pôles. Comment se produit transforme-t-il :

a) Le cercle passant par O, A, M?

b) Un cercle passant par deux de ces points?

c) Un point arbitraire du plan?

Evaluer la somme algébrique des inverses des puissances de ces quatre inversions.

IV. — Lorsque m décrit une droite passant par A, distincte de OA, quelle est l'enveloppe de la droite mM? Quel est le lieu de M? En déduire, d'après le dernier alinéa de (I) que l'associée d'une droite ne passant pas par O est une parabole de foyer O. Toute parabole de foyer O est-elle l'associée d'une droite? De combien de façons.

V. — Démontrer qu'une ligne (γ) passant par A est tangente à son associée (Γ) en ce point A.

En déduire, d'après le dernier alinéa de (I) que les tangentes mt et MT aux points associés quelconques m et M de deux lignes associées (γ) et (Γ) forment avec les droites respectives Om et OM des angles égaux et de même sens.

VI. — Trouver la ligne associée à une hyperbole équilatère (H) de centre O. On commencera par traiter le cas où A est l'un des foyers de (H) caractérisée en outre par la directrice correspondante et son excentricité; du lieu du point I on déduira celui de M, quand m décrit (H).

Quelles sont les lignes dont les associés coïncident avec une droite quelconque indéfinie donnée?

VII. — Trouver, par la méthode indiquée au VI, l'associée d'une hyperbole de centre O et d'excentricité quelconque.

Même question pour une ellipse de centre O : le lieu de J, à la place de celui de I sera considéré dans ce cas.

Enoncer, comme aux derniers alinéas de IV et VI des réciproques des résultats obtenus.

VIII. — Construire un triangle mAm' connaissant la médiane $OA = a$, issue de A, l'angle θ de cette médiane avec la bissectrice intérieure de $\widehat{mAm'}$, enfin le produit $Am.Am' = k^2$. Calculer par voie trigonométrique l'angle en A du triangle inconnu Discussion (géométrique et algébrique). (1945).

● **857.** On considère un triangle ABC, son cercle circonscrit (O) de centre O, de rayon R, son cercle inscrit (I) de centre I, de rayon r. On désigne par α, β, γ les points de contact de BC, CA, AB avec le cercle (I), par A', B', C' les points de rencontre autres que A, B, C, de AI, BI, CI avec le cercle (O), par l, m, n les milieux de BC, CA, AB.

1° Etablir qu'il existe une conique (E), de foyer I, tangente à $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$. Quel est son cercle directeur ayant I comme centre? Quelle position remarquable a le second foyer F de (E) par rapport au triangle $\alpha\beta\gamma$?

Montrer qu'il existe une infinité de triangles, tels que $\alpha\beta\gamma$, inscrits dans (I) et circonscrits à (E).

2° On passe du cercle principal de (E) au cercle (O) par une inversion de pôle I dont on indiquera le module. En déduire une relation entre $OI = d$ et les rayons R, r.

Montrer qu'il existe une infinité de triangles, tels que ABC, inscrits dans (O) et circonscrits à (I).

3° Les cercles (O) et (I), *liés par la relation trouvée au paragraphe* 2, sont supposés fixes; on fait varier le triangle ABC inscrit dans (O) et circonscrit à (I); α, β, γ, A', B', C', l, m, n, varient en conséquence. Quels sont les centres des cercles IBC, ICA, IAB? En déduire l'enveloppe des côtés du triangle A'B'C'.

Quelle est l'enveloppe des cercles IB'C', IC'A', IA'B'? Qu'est-ce que le point I pour le triangle A'B'C'? Prouver que les droites A'α, B'β, C'γ concourent en un point fixe Σ.

4° Soient M, L, N les points de rencontre, autres que α, β, γ, de Fα, Fβ, Fγ avec (I). Montrer que les symétriques de la droite FI par rapport aux droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ passent respectivement par L, M, N et recoupent le cercle (I) en un même point, qu'on désigne par φ.

5° La droite $\beta\gamma$ coupant la droite FI en U, montrer que U et la projection orthogonale a de A sur FI sont deux points conjugués par rapport au cercle (I).

Démontrer que les droites $a\varphi$ et Iα sont parallèles. A cet effet on pourra considérer l'inversion (U), de pôle U, dont le module est la puissance du point U par rapport à (I), puis la symétrie (S) par rapport à la droite $\beta\gamma$, et étudier comment la succession des transformations (U), puis (S), transforme le point φ, la droite φ L, le cercle a Uφ, enfin l'angle en φ de la droite φI, avec ce cercle.

6° Comparer les angles orientés de droites (IO , IA) et (αl , $\alpha\varphi$). Etablir, en faisant intervenir la propriété du second alinéa de 5°, que les triangles AOI et $\varphi l\alpha$ sont des figures directement semblables.

Enoncer un résultat analogue concernant chaque triangle $\varphi m\beta$, $\varphi n\gamma$.

7° Les droites φl, φm, φn recoupent le cercle (I) en $l'm'n'$; évaluer en fonction de r et R les rapports $\dfrac{\overline{\varphi l'}}{\overline{\varphi l}}, \dfrac{\overline{\varphi m'}}{\overline{\varphi m}}, \dfrac{\overline{\varphi n'}}{\overline{\varphi n}}$. Qu'en résulte-t-il pour la position relative des cercles (I) et lmn?

8° Quand le triangle ABC varie dans les conditions du paragraphe 3°, préciser sur quelles courbes fixes se déplacent :

— le centre du cercle lmn;
— le point de concours des médianes du triangle ABC;
— l'orthocentre du triangle ABC. (1948)

● **858.** N. B. — La distance d'un point m à une droite désignée par (Δ) sera désignée par Δ (m).

I. — On considère, dans un plan (P) une conique (Γ) définie par un foyer F, la directrice correspondante (D), et son excentricité e, et un point fixe C distinct de F, *essentiellement supposé intérieur à* (Γ).

1° A un point quelconque m du plan (P), on fait correspondre le point n, dit « associé » de m, tel que :

a) Les droites Cm et Fn se coupent sur (D) ou, éventuellement, sont toutes deux parallèles à (D);

b) Les droites Fm et Cn sont parallèles.

On désigne par h le point de rencontre de Cm avec (D).

En d'autres termes, le point n est l'homothétique du point F dans une homothétie (H_m) de centre h où C est l'homothétique du point m; (H_m) varie évidemment avec le choix de m. Que devient cette homothétie lorsque Cm est parallèle à (D)?

Cette extension permet de définir l'associé de m même lorsque m est situé sur la droite CF. Quel est l'associé de C?

Où doit se trouver m pour qu'on puisse considérer son associé n comme rejeté à l'infini? Où doit se trouver n pour qu'on puisse considérer comme rejeté à l'infini le point m dont il est l'associé?

Démontrer que, lorsque m décrit une droite (M) de (P), n décrit une droite (N) et *vice versa*. (N) est appelé « droite associée » de (M). Etudier succinctement les cas particuliers.

2° Montrer que le lieu décrit par n quand m décrit (Γ) est un cercle (C) de centre C, dont on évaluera la rayon R à l'aide de e et de D (C) [voir le N. B. du début]. Situer F et (D) par rapport à ce cercle.

3° La polaire (Φ) du point F par rapport au cercle (C), étant supposée sécante à (D), coupe (D) au point I. Construire la droite (Δ) ayant (Φ) comme droite associée; caractériser à cet effet le point A de rencontre de (Δ) avec (D), la direction de (Δ).

n étant l'associé d'un point quelconque m de (P), quelle est la droite dont l'associée passe par n et est parallèle à (Φ)? On désignera par I_1 le point de rencontre avec (D) de cette parallèle à (Φ); et au besoin par J le point de (D) tel que mJ soit parallèle à CI.

Déduire de cette étude la relation :

(1) $$\Phi(n) = \mathrm{K}\frac{h\mathrm{C}}{hm}\Delta(m),$$

K étant un coefficient qui reste constant *quand* m *est supposé variable sur* (Γ) *ce qu'on supposera dans la suite du problème.*

II. — Pour cette partie, on s'inspirera du procédé suivant, qui sera dit « procédé par affinité », destiné à éviter le tracé de figures de l'espace :

1° Soit (Z) une droite, *non située dans* (P), *et qui coupe* (P) en un point ω; soit (Π) le plan perpendiculaire à (Z) en ω.

u désignant un point arbitraire du plan (P), on considère le rabattement u' de la projection orthogonale v de u sur le plan (Π), lorsqu'on rabat (Π) sur (P) autour de la charnière (X), intersection de (Π) avec (P). Montrer que le point u' se déduit du point u par une « affinité orthogonale » d'axe X, c'est-à-dire que u et u' sont sur une même perpendiculaire à X et que le rapport de leurs ordonnées par rapport à X est constant; on le précisera en fonction de l'angle de (Π) avec (P).

Construire dans (P), *en vraie grandeur*, la distance Z (u) de u à (Z) en se servant du point u'.

Si u et u_1 sont deux points distincts de (P), montrer que la construction de leurs homologues u' et u'_1 dans l'affinité précédente, met en évidence l'angle des deux plans Zu et Zu_1 en *vraie grandeur*.

N. B. — Dans la suite il y aura lieu de préciser le choix de la droite Z et des points u et u_1 chaque fois qu'il sera utile d'employer un tel procédé.

2° On désigne par (Φ_1) l'une des droites qui sont perpendiculaires à CF en F et qui font avec (P) l'angle α défini par la relation

(2) $$\cos\alpha = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{R}}.$$

Du fait que l'affinité orthogonale d'axe CF, de rapport sinα, transforme le cercle (C) en une ellipse, dont on précisera les foyers et directrices, déduire, par application du procédé « par affinité » qu'il existe un rapport constant, quand n varie sur (C), entre ses distances Φ_1 (n) et Φ (n) aux droites fixes (Φ_1) et (Φ).

3° h désignant le même point, variable sur (D), que dans le 1° de I, on considère deux plans orthogonaux passant par (Φ_1) et qui rencontrent (D), l'un en h, l'autre en un certain point k.

Montrer (procédé par affinité) que h et k se correspondent sur (D) dans une inversion négative fixe, lorsque h varie. En déduire qu'il existe dans (P) deux points fixes λ et μ, symétriques par rapport à (D), tels que, de chacun d'eux, le segment variable hk reste vu sous un angle droit.

4° Montrer que Φ_1 (h) varie proportionnellement à la distance $h\lambda = h\mu$.

En considérant la position particulière A de h (voir I, 3°), établir que les *demi-droites* d'origine F contenant λ et μ sont symétriques par rapport à la droite FA et qu'on a :

(3) $$\frac{|\mathrm{F}\lambda - \mathrm{F}\mu|}{\mathrm{F}\lambda + \mathrm{F}\mu} = \sin\alpha.$$

5° Déterminer une droite (Δ_1), sécante à (P) en C, telle que tous les couples de plans $\Delta_1 h$ et $\Delta_1 k$ restent orthogonaux quand h varie sur (D), k étant le point correspondant à h défini dans (II, 3°) : on situera par rapport aux demi-droites Cλ et Cμ la projection orthogonale de (Δ_1) sur (P), et l'on calculera l'angle β de (Δ_1) avec (P). Combien le problème a-t-il de solutions?

(Δ_1) étant l'une des droites fixes ainsi trouvées, que peut-on dire du rapport $\dfrac{\Delta_1 (h)}{h\lambda}$?

6° De l'ensemble de ces propriétés et de la considération d'homothéties appropriées, déduire la conséquence suivante :

(4) $$\Delta_1(m) = \mathrm{K}'\frac{hm}{h\mathrm{C}}\Phi_1(n)$$

K' étant une constante quand m varie sur (Γ).

En faisant intervenir ensuite la relation (1) et la propriété qui fait l'objet de (II, 2°), conclure que lorsque m décrit (Γ) on a :

(5) $$\frac{\Delta_1(m)}{\Delta(m)} = \text{constante}.$$

III. — 1° Que peut-on dire, d'après (5), de la projection orthogonale de (Γ) sur un plan perpendiculaire à (Δ_1)? En déduire le lieu du point de rencontre des tangentes aux extrémités d'une corde de (Γ) passant par le point C.

2° Supposons, pour fixer les idées, que (Γ) soit une ellipse ou une parabole. On considère, outre C, un autre point C' quelconque de (P) *intérieur* à (Γ), et la droite (Δ'_1) sécante à (P) en C' ayant des propriétés analogues à celles de (Δ_1), sécante à (P) en C.

Soit m_0 un des points de rencontre de CC' avec (Γ). On appelle θ la mesure de l'angle dièdre $\widehat{m_0\Delta_1 m}$ et θ' celle de l'angle dièdre $\widehat{m_0\Delta'_1 m}$. Etablir que lorsque m varie sur (Γ), θ et θ' sont liés par une relation de la forme

$$(5) \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}} = \text{constante.}$$

(1950)

● **859.** I. — Dans le plan (P), on considère deux cercles (C) et (C') de même centre O et de rayons R, R' (R > R'). Deux demi-droites opposées, d'origine commune O, coupent ces cercles respectifs en A et B. Une demi-droite d'origine O, distincte en général des précédentes, coupe (C) en E et (C') en F.

1° Montrer que le point M, commun aux droites AE et BF, appartient au cercle (S) décrit dans (P) sur AB comme diamètre et au cercle (T) décrit dans (P) sur EF comme diamètre. On désigne par S et T les centres respectifs de (S) et (T) et par O' le symétrique de O par rapport à S.

Etudier la figure formée par les points O, M, S, T.

Les cercles (S) et (T) se coupent en un point N, généralement distinct de M. Montrer que les angles ONM et O'MN sont droits.

Etudier le faisceau des quatres droites OM, ON, OS, OT.

2° Il existe dans (P) une similitude directe transformant E en F et A en B. Montrer que le centre de cette similitude n'est autre que N.

Montrer que les cercles OAE, OBF passent par N et sont orthogonaux. Quelles sont les bissectrices des angles en N des triangles NEA et NFB?

Montrer que les couples de demi-droites (NE, NB), (NA, NF), d'origine commune N, ont le même axe de symétrie qu'on appelle (D) et que les produits NA.NF, NB.NE sont égaux : on désigne par k^2 leur valeur commune.

En déduire que l'opération $(\mathfrak{T})$, produit de la symétrie d'axe (D) par l'inversion de pôle N et de puissance k^2, échange les points E et B, A et F; montrer qu'elle échange aussi les points O et M.

3° On suppose O, A, B fixes dans le plan fixe (P), et la demi-droite OFE variable. Trouver l'enveloppe de la droite MN.

On désigne par K le point commun aux droites AB et MN. Montrer que le point de contact H de MN avec son enveloppe est le conjugué harmonique de K par rapport à M, N, et qu'il est situé sur le segment de droite EF.

II. — 1° Dans l'espace, on considère les sphères (σ) et (τ) ayant respectivement (S) et (T) comme grands cercles, et leur cercle (Γ) d'intersection.

La perpendiculaire en H au plan (P) coupe (Γ) en deux points v et v'; montrer que ces points appartiennent aussi au cercle (Δ) coupant orthogonalement le plan (P) aux points E et F.

Quels sont les lieux des points v et v' dans les conditions de (I, 3°)? On trouve deux cercles (V) et (V') admettant tous deux le segment AB comme diamètre. Montrer que, sur la sphère (σ), (V) et (V') sont tangents à (Γ) aux points respectifs v et v'.

2° Toujours dans les conditions de (I, 3°) le cercle (Δ) engendre une surface (R) de révolution autour de l'axe OZ commun des cercles (C) et (C'). Déduire, de ce qui précède, que cette surface a en commun avec la sphère (σ) deux cercles.

Montrer que chacun des cercles (V) et (V') forme avec le cercle (Δ), aux points respectifs v et v', un angle constant α : à cet effet, on appliquera aux cercles (Γ) et (Δ) l'opération $(\mathfrak{T})$ du dernier alinéa de (I, 2°).

Calculer, en fonction de R et R' l'angle α (supposé aigu), ainsi que l'angle β de OZ avec les plans des cercles (V) et (V'), et comparer les résultats obtenus.

III. — 1° Sur un cercle (X) du plan (P), de centre O, de rayon $\sqrt{RR'}$, on prend un point fixe I. On soumet la figure précédente à l'inversion $(\mathcal{J})$ de pôle I et de puissance 2 RR'. Quel est l'inverse O_1 du point O?

D'une manière générale, l'inverse dans $(\mathcal{J})$ d'un élément (point, ligne ou surface) désigné, dans ce qui précède, par une lettre, sera désigné par la même lettre affectée de l'indice « 1 ».

Indiquer, puis tranformer par $(\mathcal{J})$, des propriétés des cercles IEF et IAB. Montrer que les cercles (C_1) et (C'_1) sont égaux.

Qu'est la droite (X_1) pour les cercles (C_1) et (C'_1)? Analyser les positions relatives de (S_1), (C_1) et (C'_1).

Dans les conditions de (I, 3°) le cercle (Δ_1) engendre une nouvelle surface (R_1) qui peut être engendrée aussi par la rotation de (C_1) ou (C'_1) autour de (X_1).

Déduire de (II, 2°) que (R_1) a en commun avec (σ_1) deux cercles passant par A_1 et B_1.

2° On considère, dans (P), deux cercles égaux sans point commun. Soit (Σ) une sphère orthogonale à (P) et tangente à ces cercles.

Comment une telle sphère coupe-t-elle la surface engendrée par la rotation de ces mêmes cercles autour de leur axe radical? (1952)

● **860.** DONNÉES : Dans tout le problème on considère, dans un plan (P), un triangle (T), dont les sommets sont désignés par A, B, C. On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Pour la question I, 2°, on donne de plus, dans (P), un triangle (T_1) (*véritable* ou *aplati*) dont les sommets sont désignés par A_1, B_1, C_1. On pose $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$, $A_1B_1 = c_1$ ($a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $c_1 \neq 0$).

Dans la question I, 3°, on se donne seulement (T) et trois nombres *positifs* α, β, γ. On aura à envisager les deux points U et U' de la droite BC, tels que $\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}} = \frac{\overline{U'B}}{\overline{U'C}} = \frac{\beta}{\gamma}$, les deux points V et V' de la droite CA, tels que $\frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} = \frac{\overline{V'C}}{\overline{V'A}} = \frac{\gamma}{\alpha}$ et les deux points W et W' de la droite AB, tels que $\frac{\overline{WA}}{\overline{WB}} = \frac{\overline{W'A}}{\overline{W'B}} = \frac{\alpha}{\beta}$.

I. — 1° Une inversion dont le pôle O, distinct des points A, B, C, appartient au plan (P), transforme les points A, B, C en les points respectifs A', B', C'.

Etablir l'égalité métrique $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} : \frac{OB}{OC}$ et l'égalité angulaire [entre mesures algébriques, dans le plan (P) orienté, d'angles orientés de vecteurs] :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ à } 2k\pi \text{ radians près } (k \text{ entier}).$$

2° On demande de déterminer le point O de manière que les points A', B', C', définis dans I, 1°, à une homothétie près, forment un triangle directement semblable au triangle (T_1), A', B', C' étant sommets homologues respectifs de A_1, B_1, C_1.

Discuter l'existence et le nombre des points O répondant au problème. Caractériser les triangles (T_1) particuliers pour lesquels ce problème est impossible.

3° Montrer (en premier lieu) qu'on peut ramener à un problème du type précédent la recherche d'un point m du plan (P) dont les distances aux sommets de (T) soient proportionnelles aux nombres α, β, γ; c'est-à-dire que $\frac{mA}{\alpha} = \frac{mB}{\beta} = \frac{mC}{\gamma}$.

Discuter ce nouveau problème. Préciser ses conditions de possibilité en faisant intervenir trois longueurs dont les mesures sont les produits $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$.

Trouver (en second lieu) le lieu (Λ) des points M *de l'espace* tels que

$$\frac{MA}{\alpha} = \frac{MB}{\beta} = \frac{MC}{\gamma}.$$

Définir (Λ), quand il existe, à l'aide des sphères décrites sur les segments UU', VV', WW' comme diamètres.

En supposant α, β, γ inégaux, démontrer que les couples de points (U, U'), (V, V'), (W, W') sont les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet (Q), c'est-à-dire que : deux points étant prélevés de manière quelconque, l'un dans le premier couple, l'autre dans le deuxième couple, la droite joignant ces deux points contient *un* certain point du troisième couple.

4° Dans ce paragraphe, on suppose que les nombres α, β, γ soient tel que *le lieu* (Λ) *se réduise à un cercle point* (ce point sera encore désigné par la lettre M). Montrer qu'il existe alors des nombres *algébriques* α', β', γ' satisfaisant aux relations suivantes $|\alpha'| = \alpha$, $|\beta'| = \beta$, $|\gamma'| = \gamma$, $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$ et que, réciproquement, si α, β, γ sont les valeurs absolues de nombres non nuls, α', β', γ' tels que $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$, le lieu (Λ) est un cercle point.

Quel est le lieu du point M quand α', β', γ' varient en restant liés par la condition précédente?

On supposera désormais, pour préciser, que les points U, V, W, définis dans les *données*, sont tels que $\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}} = \frac{\beta'}{\gamma'}$, $\frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} = \frac{\gamma'}{\alpha'}$, $\frac{\overline{WA}}{\overline{WB}} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ ce qui établit une distinction entre les points de chacun des couples (U, U'), (V, V'), (W, W').

α', β', γ' variant comme il a été stipulé dans la question relative au lieu du point M, démontrer les propositions suivantes :

a) Chacune des droites MU, MV, MW, MU′, MV′, MW′, passe par un point fixe.

b) Les côtés du quadrilatère (Q), qui sont les droites UVW, UV′W′, U′VW′, U′V′W, passent respectivement par des points fixes I, J, K, L.

On qualifiera la situation de tous ces points fixes, et notamment de I, J, K, L, par rapport au triangle (T).

c) Les couples suivants de droites
(MA,BC), (MB,CA), (MC,AB), (MI,UI), (MJ,UJ), (MK,VK) (ML,WL) sont *isogonaux*, c'est-à-dire ont tous les mêmes directions de bissectrices.

N.B. — L'ordre dans lequel on établira les propositions de *b* et de *c* est laissé à l'entière disposition des concurrents.

II. — 1° Mêmes données que dans I, 3°.

On considère les cercles (Γ) du plan (P) tels que les puissances de A, B, C, par rapport à un tel cercle soient respectivement proportionnelles à α^2, β^2, γ^2. Déterminer, en tant que transversale au triangle (T), l'axe radical d'un cercle (Γ) et du cercle (ABC) circonscrit au triangle ABC.

Etudier la famille (Φ) des cercles (Γ) ainsi obtenus. La discussion fera apparaître différents cas qu'on rattachera à l'existence ou à la non-existence du lieu (Λ) défini dans I, 3°. On qualifiera, dans les divers cas possibles, les cercles de la famille (Φ).

2° De cette étude, déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle (Γ_0) du plan (P), distinct du cercle (ABC), soit tangent à ce cercle.

3° Considérons le triangle XYZ dont les milieux des côtés YZ, ZY, XY sont respectivement les points A, B, C. Déduire de la condition visée à l'alinéa précédent II, 2°, que le cercle inscrit au triangle XYZ est tangent au cercle (ABC) [lorsqu'il ne se confond pas avec ce cercle].

Le point de contact μ de ces deux cercles est une position particulière du point M défini au début de I, 4°, et l'on vérifiera qu'il correspond aux valeurs suivantes de α', β', γ' : $\alpha' = b - c$, $\beta' = c - a$, $\gamma' = a - b$ (on supposera ici les longueurs *a*, *b*, *c* inégales).

On continuera à désigner par U, V, W, U′, V′, W′ les points notés ainsi déjà dans I, 4°, et qui correspondent à μ comme ils correspondaient à M dans I, 4°.

Du fait que $\alpha' + \beta' + \gamma' = 0$, déduire que la droite UVW passe par le point de concours G des médianes de (T) et que les droites UV′W′, U′VW′, U′V′W passent respectivement par les points X, Y, Z.

4° Soit η le point de rencontre des droites XZ, U′W′ et soit ζ le point de rencontre des droites XY, U′V′.

Montrer que les couples de points (U′, W′) et (η, Y) forment une division harmonique; puis que la droite $\eta\zeta$ passe par le milieu de WW′; on verra de même qu'elle passe par le milieu de VV′.

En déduire que $\eta\zeta$ est la tangente en μ au cercle (ABC).

Prouver que le point de rencontre *n* de la droite UVW avec XY est le symétrique de ζ par rapport à C.

Conclure, enfin, que la droite UVW, c'est-à-dire IG, et la tangente en μ au cercle ABC sont deux transversales réciproques par rapport au triangle XYZ.

N.B. — Deux transversales à un triangle sont dites *réciproques* par rapport à celui-ci lorsque le produit des deux rapports analogues dans lesquels ces deux droites divisent algébriquement *chacun* des côtés du triangle est égal à l'unité.

(1954)

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE : **ÉLÉMENTS ORIENTÉS**

DEUXIÈME PARTIE : **TRANSFORMATIONS**