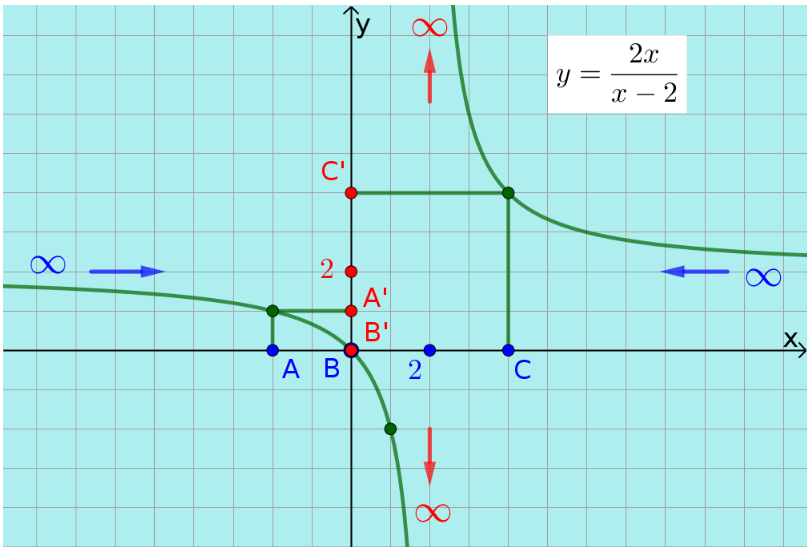
1) Présentation circulaire

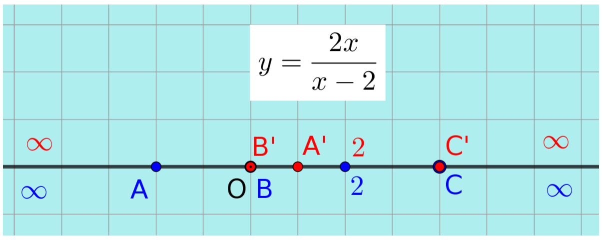
Comment la fonction définie par $v(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ transforme-t-elle la droite réelle ?

a) L'hyperbole représentée dans un repère cartésien est très informative : on saura lire sur le graphique quels points sont invariants, quelles variations a la fonction, on saura lire si v est sa propre réciproque ou pas etc...

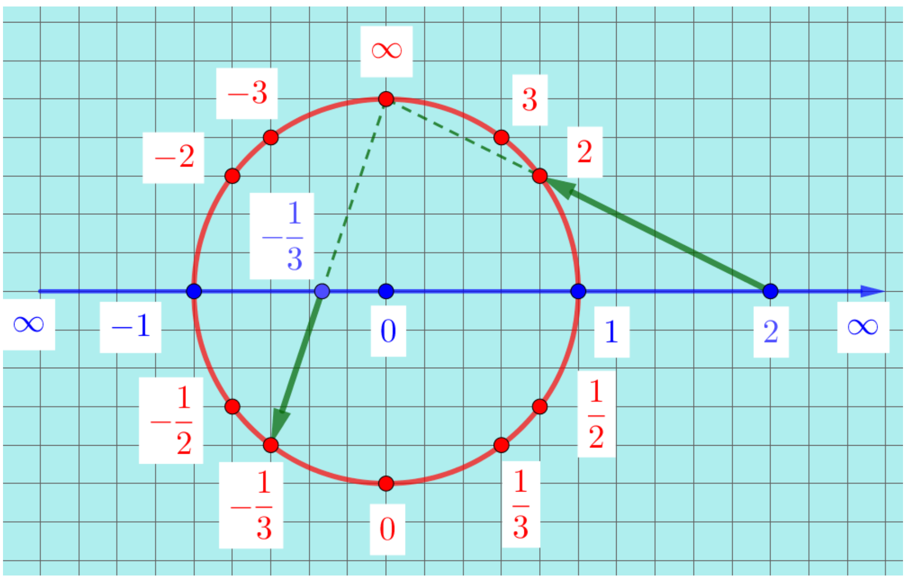


Mais quand on essaie de classer de telles fonctions, on peut apparemment céder à d'autres lubies.

b) Anticipant qu'un jour, on voudra s'intéresser à $v(z) = \dfrac{2z}{z-2}$ pour $z \in \mathbf{C}$, et qu'alors on pourra se brosser pour un dessin en dimension $2 \times 2 = 4$, on peut avoir envie d'apprendre à dire des choses de la fonction même si elle n'est représentée que sur une seule droite, vue comme ensembles de départ et d'arrivée à la fois.



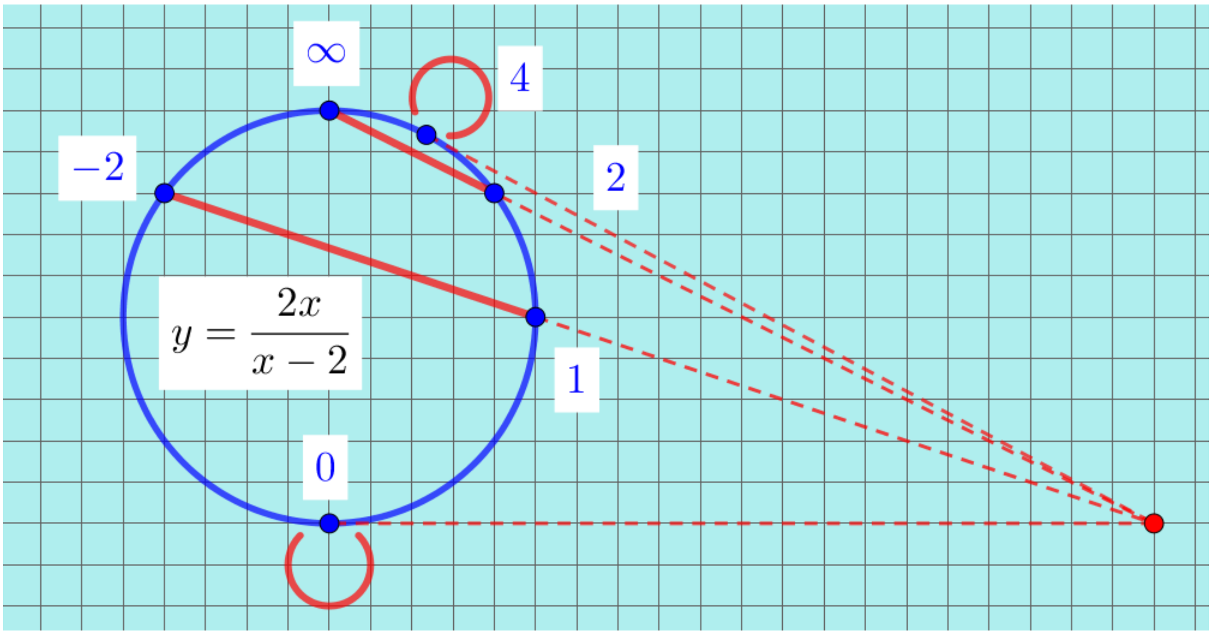
c) On peut trouver que la représentation précédente a perdu trop d'informations par rapport à celle du début, même si on se met à joindre les points et leurs images par des flèches que je n'ai pas dessinées.
On peut aussi prétendre avoir envie de compléter la droite réelle, pour que ∞ se sente mieux intégré dans son groupe de camarades. Alors qu'en fait, on a une idée derrière la tête, pour le (c).



d) Dans cette représentation de $\overline{\mathbf{R}}$, on peut joindre chaque point qui nous intéresse à son image.
On en avait parlé sans le faire au (a), ici on ne résiste plus à la simplicité du tracé de cordes.
Mais tiens, peut-être que v est un peu spéciale : le dessin a vite fait de suggérer de tracer le pôle de la corde $(0,4)$ (points fixes) par rapport au cercle et, grâce à lui, d'avoir :

  i) un procédé rigolo de représentation

  ii) la confirmation que v est involutive, i.e. $v \circ v = id_{\mathbf{R}}$.



2) Où j'ai bien ramé

a) Dans Sidler et ailleurs, il est fait mention du fait que les involutions, telles que v, engendrent le groupe des homographies de la droite. Et pour pas cher encore : deux d'entre elles suffisent à décomposer n'importe quel fouillis de cordes produit par une fonction homographique quelconque.

Sa démonstration page 27 est constructive, mais je ne pige pas encore une histoire de carte.

b) C'est pourquoi je suis parti sur un exemple où j'allais un peu tricher : en fabriquant moi-même $h = u \circ v$ un produit de deux involutions, j'allais avoir d'office **une** décomposition, libre à moi d'en chercher une autre.
Soit $u(x) = \dfrac{4}{x}$ une autre involution, je garde $v(x) = \dfrac{2x}{x-2}$, alors $h(x) = (u \circ v)(x) = \dfrac{2x-4}{x}$.

c) Tête en l'air
Si ça se trouve, je prends n'importe quelle troisième involution v', par exemple $v'(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$, je calcule $u' = h \circ v'^{-1} = h \circ v'$ et tombe sur une quatrième involution ?
Bon, on trouve $u'(x) = \dfrac{-2x+10}{x+3}$.
Content de lui voir deux points fixes, je la catalogue « bonne réponse » et m'en vais tracer cinq parallèles. Entre la première et la deuxième, je dessine quelques segments joignant des points et leurs images par v. Entre la cinquième et la quatrième, pareil pour v'. Puis entre deuxième et troisième : u. Entre quatrième et troisième : u'. Les droites 1 et 5 sont censées se retrouvées correctement transformées en la 3, par $h = u \circ v = u' \circ v'$. C'est assez pénible, et c'est ça qui m'a donné envie de passer au cercle.

Là dessus, divine surprise (1d) de l'histoire de pôle pour les involutions. On allait voir ce qu'on allait voir.

Sauf que peu de temps avant de représenter u', j'ai enfin réalisé qu'elle allait poser problème. Le symptôme qui m'a mis la puce à l'oreille était qu'avec les cinq parallèles, elle était la seule des quatre fonctions telle que son $u'^{-1}(\infty)$ n'était pas au milieu de ses points fixes... Comme si je n'avais pas pu remarquer tout de suite qu'avec $a + d = -2 + 3 = 1 \neq 0$, c'était mort : u' n'est simplement pas une involution !

d) Bon, vas-tu enfin essayer cette histoire de carte ?

« Considérons une carte C où l'origine O des abscisses a pour image le point à l'infini O' », dit Sidler page 27. Aux innocents les mains pleines, jai eu la chance que h réalise ça d'office pour $O = 0$. Passons les détails de mes erreurs, sa démonstration constructive, au lieu de confirmer ma décomposition, comme je m'en serais contenté, m'a donné un couple (u', v') distinct de (u, v), avec $u'(x) = 2 - x$ et $v' = u$!

Merci Sidler !

Je ne sais pas encore bien le faire en général, loin de là, mais c'est rassurant, d'avoir au moins un h sous la main avec deux décompositions !

Vérifions la décomposition trouvée : $(u' \circ v')(x) = 2 - \frac{4}{x} = \frac{2x-4}{x} = h(x)$. Toute une journée sur ça, hi hi !

e) Programme pour la suite

i) h présente des 3-cycles $(0, \infty, 2$, mais aussi $-1, 6, \frac{4}{3})$. Je ne peux pas croire que ce soit général pour une homographie. Alors d'où ça vient ? De ce que, sans y prendre garde, j'ai choisi u et v très « proches » ? Chaque pôle de l'une est un point fixe de l'autre. En plus, elles ont la même distance entre leurs points fixes.

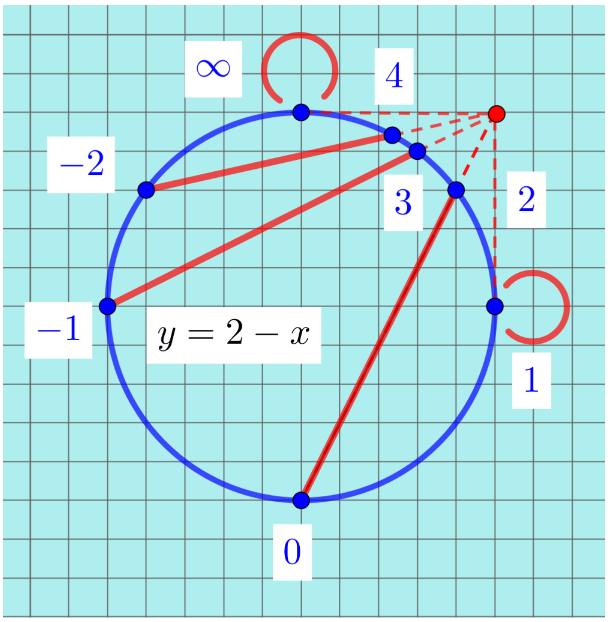
ii) Bref, dessiner d'autres cercles et s'amuser.

iii) Voir notamment si une conjecture du style « en cas de cycle, chaque pôle des deux involutions appartient au support d'un côté du cycle » résiste à des cas moins particuliers.

iv) En tout cas, chercher comment la géométrie peut aider à trouver une décomposition, et mieux lire Sidler !

v) Parce qu'enfin, ce n'est pas banal, la tétine du (1d), le nounours ci-dessous : une involution serait définie par **un** point du plan ? (Je parle du pôle de la « droite » des points fixes.)

vi) Retourner chez Eiden, je crois que tu nous fais une involutionnite de Frégier aigüe.

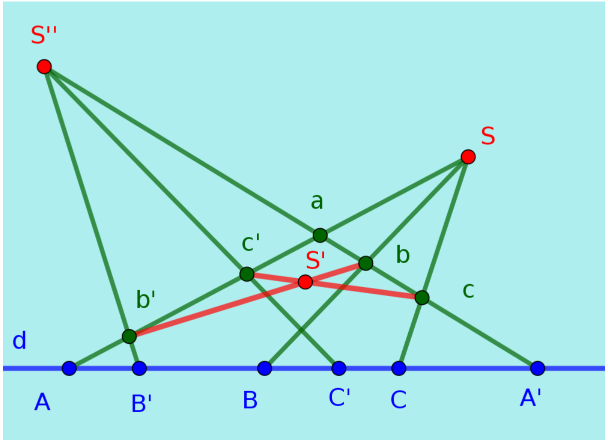


3) Reprenons.

a) **Construction géométrique d'une homographie d'une droite** d : Sidler p. 31

On cherche M' pour M donné, ne connaissant de h que A, B, C et leurs images A', B', C'.

i) Fixer arbitrairement S et S'', tracer les six segments verts. Sur $(A'S'')$, marquer a, b, c.
Sur (AS), marquer b', c' ($a' = a$ est déjà là). Les points b, b', c, c' fixent S'.

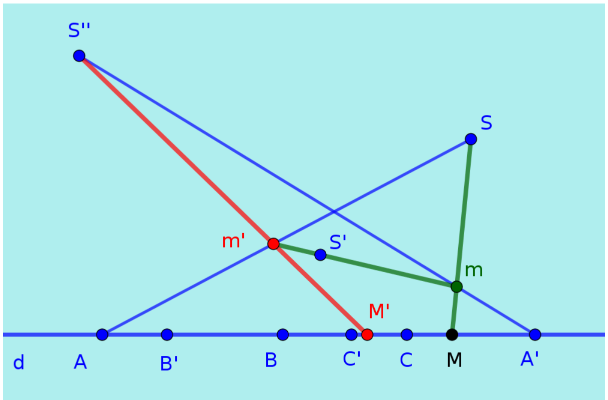


Constatons que nous avons **décomposé** h en **produit de trois projections** :

$$h = \pi'' \circ \pi' \circ \pi, \text{ avec}$$

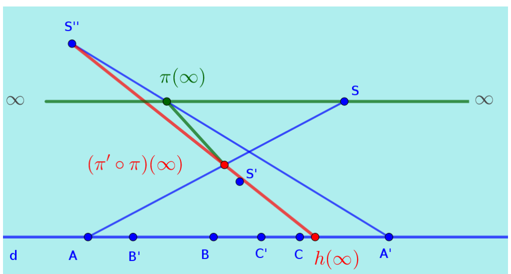
π de centre S qui envoie d sur $(A'S'')$.
π' de centre S' qui envoie $(A'S'')$ sur (AS).
π'' de centre S'' qui envoie (AS) sur d.

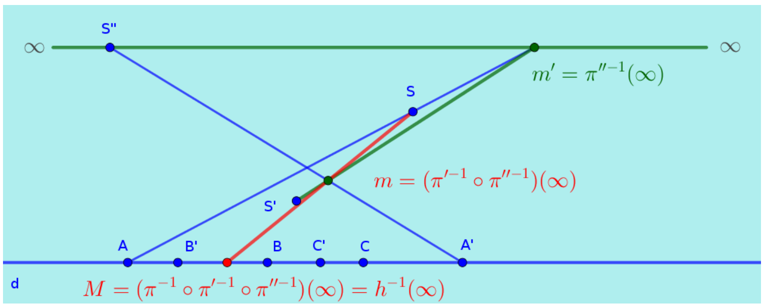
ii) Pour un M quelconque, nous pouvons poser $\pi(M) = m$, $\pi'(m) = m'$, et construire $h(M) = \pi''(m') = M'$.



iii) Et l'infini ?

Voici pour construire $h(\infty)$ et $h^{-1}(\infty)$.

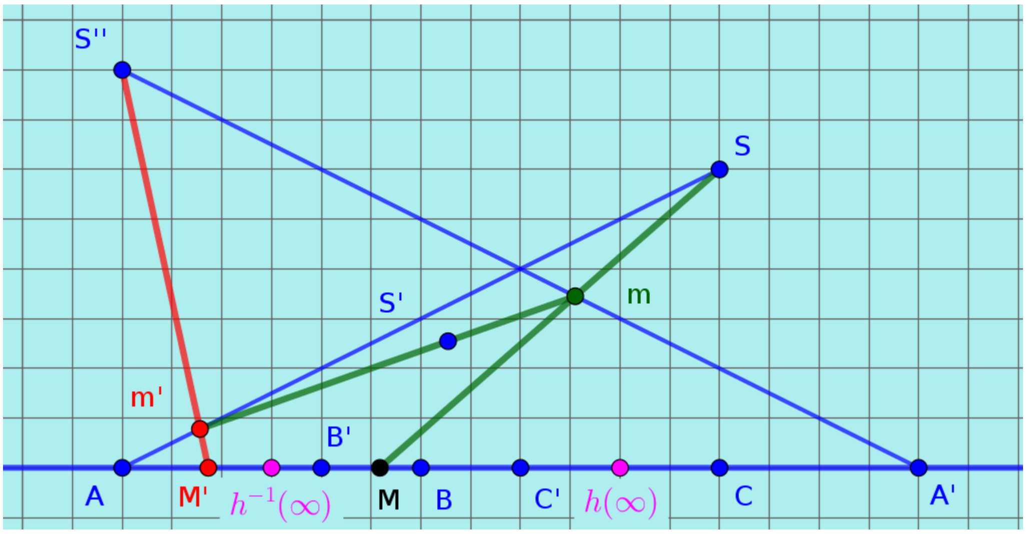




b) **Décomposer une homographie de droite en deux involutions**

Un exemple numérique pour illustrer Sidler p. 27.

Vous vous donnez A, B, C et leurs images A', B', C' comme ci-dessous.



Grâce aux projections, vous réussissez à trouver $h^{-1}(\infty)$, qui sera prié de servir d'origine.
Avec les carreaux, nous lisons l'abscisse 7 du point $h(\infty)$.
Il existe bien un b tel que $v(x) = -\dfrac{b}{x}$ (ici, on trouvera $b = -18$) et $u(x) = 7 - x$ conviennent.
En effet, $h(x) = (u \circ v)(x) = 7 - \dfrac{18}{x} = \dfrac{7x - 18}{x}$, avec u et v involutives.

On en profite pour déclarer que h était bien non involutive : on le voit à $a + d = 7 + 0 \neq 0$, tandis que s'il avait fallu le montrer géométriquement, je crois que j'aurais comparé les cercles de diamètres $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$.
S'ils avaient appartenu à un même faisceau j'aurais parié sur une involution, et ici, avec le grand qui contient les deux petits côte à côte, ce n'était pas le cas.

c) **Précieuse version de pappus**

i) « Considère l'homographie associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, homographie différente de l'identité c'est à dire qu'on n'est pas dans la situation $a = d$ et $b = c = 0$.
On veut l'écrire comme produit de deux involutions qui, on le savait, correspondaient aux matrices de trace nulle. On est donc amené à calculer :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay - bx \\ cx + dz & cy - dx \end{pmatrix}$$

Cette matrice correspondra à une involution si et seulement si sa trace est nulle c'est-à-dire :

$$(a - d)x + cy + bz = 0$$

Donc toute homographie différente de l'identité se décompose d'une infinité de façons en produit de deux involutions. »

Wow, c'est magistral, merci !

ii) Ainsi, mon $h = \begin{pmatrix} 7 & -18 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ exige pour la deuxième matrice : $(7 - 0)x + y - 18z = 0$, ou encore $y = -7x + 18z$.
Sidler's solution : $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 18 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ fait bien partie de la famille, pour $(x, y, z) = (-1, 7, 0)$.
Cette famille semble avoir une dimension deux, là où j'aurais penché pour un.

iii) Sidler a, apparemment, anticipé le désir éventuel d'exhiber un représentant, et dans cette nombreuse famille, il a certainement choisi l'un des plus simples.
Dans une première version du même dessin ci-dessus mais avec un autre repère, je trouvais $h(x) = \dfrac{2x - 4}{2x + 5}$, tellement éloigné du représentant sidlérien par son $d \neq 0$, que j'ai beaucoup peiné et finalement renvoyé le repère, pour ne le faire entrer que comme on a vu (i.e. avec, d'office, un $d \neq 0$).
Grâce à pappus, je peux écrire désormais la condition $(2 - 5)x + 2y - 4z = 0$, soit $-3x + 2y - 4z = 0$, et proposer le cœur léger $(x, y, z) = (2, 3, 0)$ par exemple,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$$