Corrigé du problème ENS ULM-LYON 1997

Robert Cabane
Lycée Michel-Montaigne, Bordeaux

April 26, 2001

Partie I - La conjecture de Shapiro

1) Cas $n = 2$. Dans le cas où n vaut 2, y_1 et y_2 coïncident avec $x_1 + x_2$ et $S_2(x) = 1$. ♦

2) Cas $n = 3$. On constate que

$$\frac{y_2 + y_3}{y_1} + \frac{y_3 + y_1}{y_2} + \frac{y_1 + y_2}{y_3} = \sum_{i \neq j} \frac{y_i}{y_j}$$

et d'autre part l'inégalité de la moyenne géométrique nous prouve que

$$\frac{y_2}{y_1} + \frac{y_3}{y_2} + \frac{y_1}{y_3} \geqslant 3 \sqrt[3]{\frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \frac{y_1}{y_3}} = 3$$

de sorte qu'en ajoutant avec une autre inégalité du même style on obtient

$$\frac{y_2 + y_3}{y_1} + \frac{y_3 + y_1}{y_2} + \frac{y_1 + y_2}{y_3} \geqslant 6 .$$

Cependant, on a des relations comme $y_2 + y_3 = 2x_1 + y_1$, d'où il résulte que $2S_3(x) + 3 \geqslant 6$, soit $S_3 \geqslant \frac{3}{2}$. ♦

3) Condition suffisante. Soit $x \in D_n$, tel que $\left(\sum\limits_i x_i\right)^2 \geqslant \frac{n}{2} \sum\limits_i x_i y_i$. On est amenés à se demander si on a bien $\left(\sum\limits_i x_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_i x_i y_i \cdot \sum\limits_i \dfrac{x_i}{y_i}$. Posons $u_i = \sqrt{\dfrac{x_i}{y_i}}$ et $v_i = \sqrt{x_i y_i}$. On a $\left(\sum u_i v_i\right)^2 \leqslant \left(\sum u_i\right)\left(\sum v_i\right)$ selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui nous conduit à l'inégalité espérée, donc au fait que $S_n(x) \geqslant \frac{n}{2}$. ♦

4) Cas $n = 4$. Nous appliquons la condition suffisante dégagée à la question 3, ce qui amène à voir si

$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \geqslant 2\sum x_i x_{i+1} + 2\sum x_i x_{i+2} = 2(x_1x_3+x_2x_4+x_1x_3+x_2x_4+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_1x_4)$.

Or, la plupart des doubles produits figurant à droite se trouvent aussi dans le carré à gauche. La différence vaut

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 \geqslant 0$, d'où le résultat . ♦

5) Cas $n = 5$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée au vecteur x et au vecteur de composantes 1, donne l'inégalité (qui sera plusieurs fois requise par la suite):

$$\boxed{\left(\sum x_i\right)^2 \leqslant n \sum x_i^2 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.}$$

ce qui prouve aussi que $c_n \leqslant n$. Mais si on a une inégalité de la forme $\left(\sum x_i\right)^2 \leqslant c_n \sum x_i^2$, alors en prenant les x_i tous égaux à 1, on a $n^2 \leqslant nc_n$, donc $c_n \leqslant n$, soit finalement $c_n = n$. ♦

D'autre part, nous pouvons constater que $\sum x_i y_i = x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_1x_4 + x_2x_5 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_1x_5$ donne exactement la liste des doubles produits issus du développement de $(\sum x_i)^2$, donc $\sum x_i y_i = \frac{1}{2}\Big[\left(\sum x_i\right)^2 - \sum x_i^2\Big]$ et on souhaite que ce soit inférieur ou égal à $\frac{2}{5}\left(\sum x_i\right)^2$, ce qui équivaut à $5\left(\sum x_i\right)^2 - 5\sum x_i^2 \leqslant 4\left(\sum x_i\right)^2$ ou encore à $\left(\sum x_i\right)^2 \leqslant 5\sum x_i^2$, ce qui est vrai comme on l'a constaté auparavant.

6) Cas $n = 6$. Posons $z_1 = x_1 + x_4, z_2 = x_2 + x_5, z_3 = x_3 + x_6$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (vue à la question 5) donne $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \geqslant \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)^2$. Or, on a précisément $z_1 + z_2 + z_3 = \sum\limits_{i=1}^{6} x_i$ d'où $(x_1+x_4)^2 + (x_2+x_5)^2 + (x_3+x_6)^2 \geqslant \frac{1}{3}\left(\sum x_i\right)^2$.

D'autre part, quand on développe $\sum x_i y_i$, on a tous les doubles produits possibles excepté ceux de la forme $x_i x_{i+3}$ (en effet, les produits de la forme $x_i x_{i+4}$ peuvent être revus comme $x_i x_{i-2}$ et les $x_i x_{i+5}$ comme $x_i x_{i-1}$). On a donc

$$3\Big[\left(\sum x_i\right)^2 - \sum x_i^2\Big] = 6\sum_{i<j} x_i x_j = 6\sum x_i y_i + 3\big[(x_1+x_4)^2 + (x_2+x_5)^2 + (x_3+x_6)^2 - \sum x_i^2\big]$$

donc

$$6\sum x_i y_i = 3(\sum x_i)^2 - 3\big[(x_1+x_4)^2 + (x_2+x_5)^2 + (x_3+x_6)^2\big] \leqslant 3(\sum x_i)^2 - (\sum x_i)^2$$

d'où il vient $(\sum x_i)^2 \geqslant 3\sum x_i y_i$, ce qu'il fallait . ♦

7) La condition suffisante n'est pas nécessaire.

a) Etude des premières valeurs de b_n. On vient de voir les cas $n = 4, 5, 6$. Pour $n = 2$ on a $b_2 = 1$ car $y_1 = y_2 = x_1 + x_2$. Pour $n = 3$ on cherche une inégalité de la forme

$$(x_1+x_2+x_3)^2 \geqslant b(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3) = b\big((x_1+x_2+x_3)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\big)$$

équivalente à $\left(\sum x_i\right)^2 \leqslant \frac{b}{b-1}\sum x_i^2$. Selon l'étude menée à la question 5, la valeur optimale de b est telle que $\frac{b}{b-1} = 3$, ce qui revient à $b_2 = \frac{3}{2}$.

b) Au-delà de $n = 7$ rien ne va plus. Prenons $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ et $x_i = 0$ pour $i \geqslant 4$. On a alors $\dfrac{\left(\sum x_i\right)^2}{\sum x_i y_i} = 3$ parce que $y_1 = x_2 + x_3 = 2$, $y_2 = x_3 + 0 = 1$ et $y_3 = x_4 + x_5 = 0$ du fait que $5 \neq 1$ dans ce contexte. De ce cas particulier il résulte bien que $b_n \leqslant 3$. Pour être précis, cette constatation agit pour $n \geqslant 5$ et est pertinente pour $n \geqslant 6$.

c) Calcul général de b_n. Notons d'abord que $A_1 + A_2 + A_3 = \sum x_i$ dans tous les cas. Examinons à présent les doubles produits, avec $n = 3q + r$ (division euclidienne). On a $q \geqslant 2$ puisque $n \geqslant 7$.

- A_1A_2 contient tous les produits de la forme $x_{3k+1}x_{3k+2}$, et au bout on a $x_{3q-2}x_{3q-1}$ suivi de $x_{3q+1}x_{3q+2}$ si $r = 2$.
- A_2A_3 contient tous les produits de la forme $x_{3k-1}x_{3k}$, et au bout on a $x_{3q-1}x_{3q}$ (sans plus).
- A_1A_3 contient tous les produits de la forme $x_{3k}x_{3k+1}$, et au bout on a $x_{3q}x_{3q+1}$ si $r \geqslant 1$.

Dans le cas le plus simple ($r = 0$), on voit que tous les produits de la forme x_px_{p+1} sont obtenus à partir du développement de $X = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1$, sauf peut-être x_nx_1; mais ce dernier, valant x_1x_{3q}, figure dans A_1A_3. On mène une étude analogue pour les produits x_px_{p+2}; il suffit de repérer $x_{n-1}x_{n+1} = x_1x_{3q-1}$ qui est dans A_1A_2 et $x_nx_{n+2} = x_{3q}x_2$ qui est dans A_2A_3. Il en résulte que $X \geqslant \sum x_iy_i$. ♦

Lorsque n n'est pas multiple de 3, il y a une difficulté avec quelques termes exceptionnels. Etudions d'abord le cas $r = 1$:

- le produit $x_nx_1 = x_1x_{3q+1}$ ne se trouve plus dans X;
- le produit $x_nx_2 = x_2x_{3q+1}$ se trouve dans A_1A_2;
- le produit $x_{n-1}x_1 = x_1x_{3q}$ se trouve dans A_1A_3.

X inclut cependant x_1x_{n-1} à partir de A_1A_3. Il suffit donc, pour obtenir l'inégalité $A'_1A'_2 + A'_2A'_3 + A'_3A'_1 \geqslant \sum x'_iy'_i$, de montrer qu'on peut choisir la permutation circulaire des x_i de sorte que $x'_1x'_{n-1} \geqslant x'_1x'_n$. Si un terme est nul, on tourne pour le mettre en x'_1 et c'est joué. Sinon, il suffit d'obtenir $x'_{n-1} \geqslant x'_n$, ce qui est toujours possible en mettant dans x'_n le plus petit des x_i.

Etudions enfin le cas $r = 2$ (ce qui suit est certainement trop compliqué !);

- le produit $x_nx_1 = x_1x_{3q+2}$ se trouve dans A_1A_2;
- le produit $x_nx_2 = x_2x_{3q+2}$ ne se trouve plus;
- le produit $x_{n-1}x_1 = x_1x_{3q+1}$ ne se trouve plus.

On trouve cependant x_1x_6 dans A_1A_3 et x_2x_6 dans A_2A_3, donc leur somme figure dans X. Il suffit donc de faire tourner les composantes pour avoir $x'_1x'_6 + x'_2x'_6 \geqslant x'_2x'_n + x'_1x'_{n-1}$, ce qui est faisable en amenant en x'_6 la plus grande composante de x' (ici on utilise le fait que $n \geqslant 7$).

Pour finir, nous appliquons l'inégalité $(A_1 + A_2 + A_3)^2 \geqslant 3(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1)$ qu'on a vue à la question 3a, avec d'autres notations, pour obtenir

$$(A_1 + A_2 + A_3)^2 = (\sum x'_i)^2 = (\sum x_i)^2 \geqslant 3 \sum x'_iy'_i = 3 \sum x_iy_i$$

parce que la permutation circulaire opérée sur les x_i s'applique aussi aux y_i. Cette dernière inégalité montre que l'on a $b_n \geqslant 3$; comparant ce résultat avec celui de la question 7b, on a bien $b_n = 3$. ♦

Remarque: le résultat qui vient d'être prouvé est assez marginal par rapport à la recherche menée dans le reste du problème, puisqu'il montre que la condition suffisante n'est pas vérifiée pour $n \geqslant 6$. On apprend essentiellement qu'on a $S_n(x) \geqslant 3$.

Partie II - où on voit que Shapiro a tort pour n pair $\geqslant 14$

1) Développement limité de $S_n(x(\varepsilon))$. Pour commencer, $x(\varepsilon)$ appartient bien à D_n pour ε assez petit, parce que tous les $t_i\varepsilon$ deviennent petits et que $1-\alpha$ est strictement positif.

On applique la méthode des développements limités, à l'ordre 2 en ε. En détail: $S_n(x(\varepsilon)) = \sum_i \varphi_i(\varepsilon)$ avec

$$\varphi_i(\varepsilon) = \frac{1+(-1)^i\alpha+t_i\varepsilon}{2+(t_{i+1}+t_{i+2})\varepsilon} = \frac{1+(-1)^i\alpha+t_i\varepsilon}{2}\left(1-\frac{(t_{i+1}+t_{i+2})}{2}\varepsilon+\frac{(t_{i+1}+t_{i+2})^2}{4}\varepsilon^2\right)+o(\varepsilon^2).$$

Il est alors essentiel de noter que, n étant pair, on a $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i = 0$. De plus, $\sum_i(-1)^i t_{i+1} + \sum_i(-1)^i t_{i+2} = \sum_i(-1)^i t_{i+1} + (-1)^{i+1}t_{i+1} = 0$. Dans ce calcul, la parité de n intervient encore de manière cachée car $(-1)^n t_{n+1} = (-1)^n t_1 = (-1)^0 t_1$. Le terme en ε va donc disparaître, car son coefficient vaut $\frac{1}{2}\left(\sum_i t_i - \sum_i \frac{(t_{i+1}+t_{i+2})}{2}\right) = 0$. On peut donc simplifier généreusement:

$$\begin{aligned} S_n(x(\varepsilon)) = \frac{n}{2} \quad + \quad & \Big[-\frac{1}{4}\sum t_it_{i+1} - \tfrac14\sum t_it_{i+2} + \tfrac18\sum t_{i+1}^2 + \tfrac18\sum t_{i+2}^2 + \tfrac14\sum t_{i+1}t_{i+2} \\ & +\frac{\alpha}{8}\sum(-1)^i t_{i+1}^2 + \tfrac{\alpha}{8}\sum(-1)^i t_{i+2}^2 + \tfrac{\alpha}{4}\sum(-1)^i t_{i+1}t_{i+2}\Big]\varepsilon^2 \\ & +O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

et on peut aussi tenir compte de la cyclicité qui donne $\sum t_it_{i+1} = \sum t_{i+1}t_{i+2}$ et $\sum(-1)^i t_{i+1}^2 + \sum(-1)^i t_{i+2}^2 = 0$ (toujours grâce à la parité de n). Finalement, le développement s'écrit:

$$\begin{aligned} S_n(x(\varepsilon)) &= \frac{n}{2} + Q(t_1,\dots,T_n)\varepsilon^2 + o(t^2) \\ \text{avec} \qquad Q(t_1,\dots,T_n) &= \frac{1}{4}\Big[-\sum t_it_{i+2} + \sum t_i^2 + \alpha\sum(-1)^i t_{i+1}t_{i+2}\Big]\,. \blacklozenge \end{aligned}$$

2) Etude d'une matrice semicirculante. Notons d'abord que que T est un automorphisme unitaire de l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$; il est donc diagonalisable dans une base unitaire, avec des valeurs propres de module 1. On a aussi $T^2 = -S^2$. Pour obtenir les valeurs propres, il est commode de rechercher le polynôme caractéristique (par cofacteurs sur la première ligne)

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & -1 & -X \end{vmatrix} = (-X)^n+(-1)^{n+1}.(-1).1.(-1).\dots.(-1) = (-X)^n+(-1)^{1+n/2}.$$

Pour la suite nous poserons $n = 2p$. En conséquence, les valeurs propres de T sont les racines n-ièmes de $(-1)^p = i^n$; en conséquence, les valeurs propres cherchées sont égales à l'une d'entre elles, i, multipliée par les racines n-ièmes de l'unité; soit: $i\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = i\omega$.

Pour une telle valeur propre, un vecteur propre $x = \sum_j x_j e_j$ doit vérifier

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n-1} x_j(-1)^j e_{j+1} + x_n(-1)^n e_1 = i\omega x = i\omega x_1 e_1 + \sum_{j=1}^{n-1} i\omega x_{j+1} e_{j+1}$$

d'où il vient: $x_j(-1)^j = i\omega x_{j+1}$ en général et $(-1)^n x_n = x_n = i\omega x_1$ en particulier. La relation de récurrence donne aisément $x_j = (i\omega)^{1-j}(-1)^{1+2+\cdots+j-1}x_1 = \omega^{1-j}i^{j^2-2j+1}x_1$ soit plus simplement $x_1 = 1$ et $x_{j+1} = \omega^{-j}i^{j^2}$. D'où la réponse:

$$\boxed{T \text{ a pour vecteur propre associé à } i\omega\text{: } \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j} i^{j^2} e_{j+1}.\ \blacklozenge}$$

3) Pour $n \geqslant 14$ on peut rendre S_n assez petit. Il nous reste à voir le rapport entre les deux questions précédentes. Pour cela, étudions la forme quadratique Q: elle résulte d'un endomorphisme autoadjoint H de $\mathbb{C}^n$, restreint à $\mathbb{R}^n$, et tel que $Q(t) = \langle t|H(t)\rangle$, en notant $\langle|\rangle$ le produit scalaire préhilbertien canonique sur $\mathbb{C}^n$. On trouve donc, en cherchant le facteur de t_i dans $Q(t)$, que

$$H(e_i) = \frac{1}{8}\Big[-e_{i+2} - e_{i-2} + 2e_i + \alpha(-1)^{i-1}e_{i+1} + \alpha(-1)^i e_{i-1}\Big].$$

Ecrire la matrice de Q n'est alors qu'une difficulté typographique que nous laissons à l'honorable et courageux lecteur. De toutes façons, la formule de H montre la décomposition de celle-ci (avec $I = T^0 = S^0$ =identité):

$$H = \frac{1}{8}(2I + T^2 + T^{-2} - \alpha T - \alpha T^{-1})$$

ce qui montre que H est un polynôme en T (on a $T^n = I$ car n est pair, donc $T^{-1} = T^{n-1}$). En conséquence, H est diagonalisable dans des bases orthonormées de $\mathbb{C}^n$, avec un spectre réel. Ce qui nous intéresse, c'est d'obtenir ce spectre. On ne doit pas s'étonner du fait d'utiliser une base de diagonalisation complexe pour un endomorphisme autoadjoint réel: il existe *aussi* des bases de diagonalisation réelles, mais on n'en a pas besoin.

Pratiquement, les valeurs propres de H sont toutes de la forme $\frac{1}{8}(2 - \omega^2 - \omega^{-2} - \alpha i\omega + \alpha i\omega^{-1})$, ω désignant une racine n-ième quelconque de l'unité. Notons $s = \sin\dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{\omega - \omega^{-1}}{2i}$; on a $4s^2 = 2 - \omega^2 - \omega^{-2}$. Les valeurs propres s'écrivent donc $\frac{1}{8}(4s^2+2\alpha s)$. Or, ce qui nous importe c'est de savoir rendre $Q(t)$ négatif par un choix habile de t et de α, pour que $S_n(x)$ devienne plus petit que $\frac{n}{2}$ avec ε assez petit; ce qui revient à avoir une forme quadratique non positive, donc que H ait au moins une valeur propre négative. Ceci nous amène à la condition $s(2s+\alpha)<0$. Elle se réalise en prenant $0>s>-\frac{\alpha}{2}$. Devant prendre α entre 0 et 1, on voit que l'exigence est de trouver un $\sin\frac{2k\pi}{n}$ négatif et strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$. Le meilleur candidat est évidemment $-\sin\frac{2\pi}{n}$; et la condition devient $\frac{2\pi}{n}<\text{Arcsin}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, soit $n>12$. Comme n doit être pair, on a la conclusion voulue pour $n\geqslant 14$ et pair . ♦

Partie III - où on voit que Shapiro a asymptotiquement tort

Nous noterons désormais $t_n=\dfrac{s_n}{n}$.

1) La suite (t_n) est décroissante par rapport à la divisibilité. Soit un vecteur x appartenant à D_n. Créons le vecteur x' en répétant x exactement m fois: $x'=(x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n,\ldots)$. Ce nouveau vecteur figure bien dans D_{nm}, car ses composantes sont positives, et la somme de deux composantes successives est strictement positive (ceci inclut $x_n+x_1>0$, vrai par hypothèse). Et on a $S_{nm}(x')=\sum\dfrac{x'_j}{y'_j}=mS_n(x)$ donc $\dfrac{s_{nm}}{nm}\leqslant\dfrac{S_{nm}(x')}{nm}=\dfrac{S_n(x)}{n}$. En passant à la borne inférieure (sur x), il vient bien $t_{nm}\leqslant t_n$. Cette inégalité signifie que si n divise p alors $t_n\geqslant t_p$, d'où le titre de cette question . ♦

2) La suite (t_n) est presque décroissante. Soit encore $x\in D_n$. Cette fois, nous créons un vecteur x' de D_{n+m} en répétant la dernière composante m fois: $x'=(x_1,\ldots,x_n,x_n,\ldots,x_n)$. Il est évident que les sommes de deux termes successifs sont strictement positives si x_n n'est pas nul. Par cyclicité, on peut faire "tourner" les composantes de x de manière à amener en x_n la plus grande composante de toutes; ce qui revient à répéter celle-ci m fois à l'endroit où elle se trouve. Dans ces conditions,

$$S_{n+m}(x')=\sum_{i=1}^{n-2}\frac{x_i}{y_i}+\frac{x_{n-1}}{2x_n}+\sum_{i=n}^{n+m-2}\frac{x_n}{2x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}=\sum_{i=1}^{n-2}\frac{x_i}{y_i}+\frac{x_n}{y_n}+\frac{m-1}{2}+\frac{x_{n-1}}{2x_n}+\frac{x_n}{y_{n-1}}$$

d'où

$$S_{n+m}(x')-S_n(x)-\frac{m-1}{2}=\frac{x_{n-1}}{2x_n}+\frac{x_n}{y_{n-1}}-\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}=\frac{x_1x_{n-1}+2x_n^2-x_{n-1}x_n}{2x_n(x_n+x_1)}$$

et ceci est inférieur ou égal à 1 si, et seulement si

$$x_1x_{n-1}+2x_n^2-x_{n-1}x_n\leqslant 2x_n(x_n+x_1)\Leftrightarrow x_1x_{n-1}\leqslant 2x_1x_n+x_nx_{n-1}$$

ce qui est vrai car x_n domine x_1. Donc on a bien $S_{n+m}(x')\leqslant S_n(x)+\dfrac{m+1}{2}$. ♦

3) La suite (t_n) converge. Soit $\rho=\inf t_n$ et $\varepsilon>0$, et p tel que

$t_p < \rho + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Divisons un entier n par p: le reste r sera majoré par p. On a alors

$$t_n = t_{pq+r} \leqslant t_{pq}\frac{pq}{pq+r} + \frac{r+1}{2n} \leqslant t_p + \frac{r+1}{2n}\ .$$

On peut prendre n assez grand ($n \geqslant n_0$) pour obtenir $\dfrac{r+1}{2n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Dans ces conditions, on a $t_n \leqslant \rho + \varepsilon$ ce qui prouve que t_n tend vers ρ. On peut écrire $t_{n+m} \leqslant t_n \times \dfrac{n}{n+m} + \dfrac{m+1}{2(n+m)}$ et faisant tendre m vers l'infini on a $\rho \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour avoir l'inégalité stricte on se reporte à la partie II qui montre que $t_n < \dfrac{1}{2}$ pour n pair supérieur à 12. Faisant tendre n vers l'infini on a $\rho < \dfrac{1}{2}$. ♦

Partie IV - où on découvre que Shapiro a quand même raison

1) S_n atteint son minimum. C'est une question de topologie. Soit pour tout $r > 0$ l'ensemble $D_n^r = \{x \in \mathbb{R}_+^n \ / \ \sum x_i = r\}$. Etant défini par des équations il est fermé. De plus, quand x est dans cet ensemble on a $0 \leqslant x_i \leqslant r$ pour tout i, donc D_n^r est borné, donc compact. La fonction S_n ne s'annule pas sur D_n car $S_n(x) = 0$ entraîne $x = 0$ et alors x n'est plus dans D_n; donc la fonction $\dfrac{1}{S_n}$ est continue sur D_n. Nous allons la prolonger à D_n^r. Un point x appartenant à D_n^r mais non à D_n a au moins deux composantes successives nulles, sans les avoir toutes; par rotation des indices, on peut supposer que $x_1 \neq 0$ et $y_1 = x_2 = x_3 = 0$. La fonction $\dfrac{y_1}{x_1}$ tend vers 0 au voisinage de ce point, donc son inverse tend vers l'infini et S_n aussi. Il est alors possible de prolonger $\dfrac{1}{S_n}$ en ce point en lui donnant une valeur nulle, ce qui va créer une fonction G continue sur $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.

La fonction G hérite d'une propriété notable de S_n, à savoir l'homogénéité; c'est-à-dire le fait d'être constante sur les demi-droites issues de 0. Elle atteint son maximum sur D_n^1 par continuité et compacité en un point x. Ce maximum se propage par homogénéité: si x' appartient à D_n^r, on a $G(\frac{1}{r}x') = G(x') \leqslant G(x)$. En conséquence, G atteint en x un maximum absolu, et x est dans D_n (sinon, $G(x) = 0$ et ce n'est pas un maximum). Il en résulte que S_n atteint son minimum en x . ♦

2) S_7 n'est pas minimale si x a beaucoup de zéros. Si x appartient à $D_{\{0,2,4\}}$ on a $x_7 = x_0 = x_2 = x_4 = 0$. Alors $S_7 = \dfrac{x_1}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_5} + \dfrac{x_5}{x_6} + \dfrac{x_6}{x_1}$ donc $\dfrac{S_7}{4}$ est la moyenne arithmétique des quatres fractions ci-dessus, supérieure ou égale à la moyenne géométrique qui vaut 1; soit $S_7 \geqslant 4$.

Si x appartient à $D_{\{0,3\}}$ on a $x_7 = x_0 = x_3 = 0$. Alors

$$S_7+1 = \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_4}+\frac{x_4}{x_5+x_6}+\frac{x_5}{x_6}+1+\frac{x_6}{x_1} = \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_4}+\frac{x_4}{x_5+x_6}+\frac{x_5+x_6}{x_6}+\frac{x_6}{x_1}$$

et on reconnaît là cinq nombres ayant un produit égal à 1. Le même argument que précédemment donne $\dfrac{S_7+1}{5} \geqslant 1$ soit effectivement $S_7 \geqslant 4$. ♦

3) S_7 n'est pas minimale si x a deux zéros. Soit σ la restriction de S_7 à $D_{\{0,2\}}$, vue comme une fonction des y_i plutôt que des x_j. Il est facile de l'exprimer car

$$x_1 = y_6, \quad x_3 = y_1, \quad x_4 = x_4+x_5-x_5-x_6+x_6+0 = y_3-y_4+y_5, \quad x_5 = y_4-y_5$$

et donc

$$\sigma = \frac{y_6}{y_1}+\frac{y_1}{y_3}+\frac{y_3}{y_4}-1+\frac{y_5}{y_4}\frac{y_4}{y_5}-1+\frac{y_5}{y_6}\ .$$

Le domaine de définition de cette fonction des 5 variables y_1, y_3, y_4, y_5, y_6 est décrit par les inégalités strictes $y_i > 0, y_3+y_5 > y_4 > y_5$, les variables x_i ne devant ici pas être nulles en-dehors de x_0 et x_2; il est donc ouvert. Alors σ doit avoir ses dérivées partielles nulles en un point où elle atteint son minimum. Ce qui s'écrit en un système que l'on voit ci-contre.

$$\left\{\begin{array}{lccl} (1) & 0 & = & -\dfrac{y_6}{y_1^2}+\dfrac{1}{y_3} \\ (3) & 0 & = & -\dfrac{y_1}{y_3^2}+\dfrac{1}{y_4} \\ (4) & 0 & = & -\dfrac{y_3}{y_4^2}-\dfrac{y_5}{y_4^2}+\dfrac{1}{y_5} \\ (5) & 0 & = & \dfrac{1}{y_4}-\dfrac{y_4}{y_5^2}+\dfrac{1}{y_6} \\ (6) & 0 & = & -\dfrac{y_5}{y_6^2}+\dfrac{1}{y_1} \end{array}\right.$$

On pose alors $y_5 = t$ et $y_6 = u$. Il vient $y_3 = \dfrac{u^3}{t^2}$ et $y_4 = \dfrac{u^4}{t^3}$.

On reporte dans l'équation (5) et on trouve $\dfrac{t^3}{u^4}-\dfrac{u^4}{t^5}+\dfrac{1}{u} = 0$ soit $t^8-u^8+u^3t^5 = 0$. On peut parfaitement poser $u = 1$ par homogénéité de la fonction σ (elle atteint son minimum local sur toute une demi-droite issue de 0). Il vient donc $P(t) = 0$ avec $P = X^8+X^5-1$. La valeur de σ dans ces conditions est donnée par $y_1 = \dfrac{1}{t}$ (selon (6)), $y_3 = \dfrac{1}{t^2}$ (selon (1)), $y_4 = \dfrac{1}{t^3}$ (selon (3)), $y_5 = t$, $y_6 = 1$ et $\sigma = t^4+t^{-4}+4t-2$.

On essaie ensuite de situer t; pour ce faire, on remarque la croissance de P sur $\mathbb{R}_+$ et le fait que $P(1) = 1$. Une étude à la calculatrice suggère que P change de signe près de 1; or, $P\big(\frac{7}{8}\big) = \Big(1-\dfrac{1}{8}\Big)^8+\Big(1-\dfrac{1}{8}\Big)^5-1$ et $\Big(1-\dfrac{1}{8}\Big)^8 = \exp\Big(8\ln\big(1-\dfrac{1}{8}\big)\Big) < e^{-1}$ ce qui entraîne $\Big(1-\dfrac{1}{8}\Big)^5 < e^{-5/8} < e^{-1/2}$ d'où $P\big(\frac{7}{8}\big) < e^{-1}+e^{-1/2}-1 < 0$ d'après le "cadeau" de l'énoncé. C'est pourquoi P change de signe en un point t strictement situé entre $\dfrac{7}{8}$ et 1. Dès lors, $\sigma = t^4+t^{-4}-2+4t = (t^2-t^{-2})^2+4t \geqslant 4t > \dfrac{7}{2}$. ♦

4) S_7 atteint le minimum voulu. En fin de compte, S_7 doit atteindre son minimum absolu quelque part (question 1 de cette partie) et si c'est dans l'intérieur de D_7, donc dans $D_\emptyset$, alors $S_7 \geqslant \frac{7}{2}$ (admis dans l'énoncé). Si c'est sur le bord de D_7, selon le nombre de composantes nulles et leur place (jamais successives) on peut toujours se ramener à $D_{\{0\}}$ (une seule composante nulle) ou à $D_{\{0,3\}}$ ou à $D_{\{0,2\}}$ (2 composantes nulles: distantes de 2 ou 3 unités) ou à $D_{\{0,2,4\}}$ (3 composantes nulles). Dans tous les cas il vient $S_7 \geqslant \frac{7}{2}$, d'où l'on tire $s_7 \geqslant \frac{7}{2}$. Cependant, si on prend tous les x_i égaux, les y_i valent 2 et S_7 vaut $\frac{7}{2}$. La conclusion tant attendue en découle: $s_7 = \frac{7}{2}$.

Partie V - où le coupable est enfin démasqué

1) Pour minimiser une somme de produits il faut des monotonies opposées. Procédons par récurrence. Pour $n = 1$ l'inégalité est claire. Si elle est correcte pour deux suites de $n-1$ nombres, considérons $a_1, \dots, a_n$ croissante, $b_1, \dots, b_n$ décroissante, et σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Si $\sigma(n) = n$ alors on peut éliminer le terme $a_n b_n$ et se ramener à l'hypothèse de récurrence. Sinon, on a $\sigma(n) < n$; on étudie l'inégalité

$$(*) \qquad a_n b_{\sigma(n)} + a_{\sigma^{-1}(n)} b_n \geqslant a_n b_n + a_{\sigma^{-1}(n)} b_{\sigma(n)}$$

qui est équivalente à $a_n(b_{\sigma(n)} - b_n) \geqslant a_{\sigma^{-1}(n)}(b_{\sigma(n)} - b_n)$; cette dernière est vraie si $b_{\sigma(n)} = b_n$ et $(*)$ est alors une égalité. Sinon, on a certainement $b_{\sigma(n)} - b_n > 0$ par décroissance des b_i, et $(*)$ équivaut à $a_n \geqslant a_{\sigma^{-1}(n)}$, qui est vraie par croissance des a_i.

L'inégalité $(*)$ signifie que si on remplace σ par $\sigma' = [n\ \sigma(n)] \circ \sigma$, telle que $\sigma'(n) = n$ et $\sigma'(\sigma^{-1}(n)) = \sigma(n)$, alors $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma'(i)}$. Comme σ' fixe n, on s'est ramené au premier cas et l'hypothèse de récurrence donne $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. ♦

Le sens de cette question est le suivant: étant données deux listes de nombres réels, si l'on permute leurs éléments respectifs la somme des produits deux à deux est minimale lorsque l'une est croissante et l'autre décroissante. En effet, le fait de classer a priori les a_i en ordre croissant ne fait pas autre chose que permuter les termes de la somme. De façon plus précise, pour toute permutation τ on a $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)} b_{\sigma(\tau(j))} = \sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)} b_{\sigma'(j)}$ et σ' est une permutation aussi quelconque que σ.

2) Application. Remarquons que si on pose $m_j = \frac{x_{i+1}}{x_i}$ cela définit une permutation θ de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\theta(i) = j$ (c'est le tri). On a aussi $m_{\theta(i+1)} =$

$\dfrac{x_{i+2}}{x_{i+1}}$. Posons $j=\theta(i)$ et $\sigma(j)=\theta(i+1)$, soit $\sigma=\theta\circ(i\mapsto i+1 \bmod n)\circ\theta^{-1}$: cela définit une permutation σ pour laquelle $\dfrac{1}{m_j(1+m_{\sigma(j)})}=\dfrac{x_i}{x_{i+1}\Big(1+\dfrac{x_{i+2}}{x_{i+1}}\Big)}=\dfrac{x_i}{y_i}$ et par conséquent $S_n(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{m_j(1+m_{\sigma(j)})}$. La question précédente entraîne que $S_n(x)\geqslant\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{m_j(1+m_{n+1-j})}$. ♦

3) Minoration des r_i. Posons $m=m_i, m'=m_{n+1-i}$ et $c=mm', r=\dfrac{1}{m+c}+\dfrac{1}{m'+c}$. On calcule ce dernier: $r=\dfrac{1}{m+c}+\dfrac{1}{c+c/m}=\dfrac{c+m^2+2mc}{c(m+c)(m+1)}$ et cette fraction dépasse $\dfrac{1}{c}$ si et seulement si $c+m^2+2mc\geqslant m^2+mc+m+c$ ce qui équivaut à $c\geqslant 1$. Si ce n'est pas le cas, on a $c<1$; on exprime $r=\dfrac{m+m'+2c}{c(1+c+m+m')}$. Considérons alors l'homographie définie par $\varphi(x)=\dfrac{x+c}{1+c+2x}$. Elle est croissante car $\varphi'(x)=\dfrac{1+c+2x-2(x+c)}{(1+c+2x)^2}=\dfrac{1-c}{(1+c+2x)^2}>0$. Appliquons cette croissance sur l'inégalité $\dfrac{m+m'}{2}\geqslant\sqrt{mm'}=\sqrt{c}$. Il vient: $\dfrac{cr}{2}=\varphi\Big(\dfrac{m+m'}{2}\Big)\geqslant\varphi(\sqrt{c})=\dfrac{c+\sqrt{c}}{1+c+2\sqrt{c}}=\dfrac{c+\sqrt{c}}{(1+\sqrt{c})^2}=\dfrac{\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}$ soit bien $r\geqslant\dfrac{2}{c+\sqrt{c}}$.

Enfin le produit des c_i est le carré du produit des m_i par cyclicité; il vaut donc 1 ce qui donne bien $\sum t_i=0$. ♦

4) Enveloppe convexe inférieure d'une fonction positive. Pour commencer, signalons que l'ensemble $\mathcal{G}$ des fonctions g convexes et inférieures ou égales à $f=\min(f_1,f_2)$ n'est pas vide car il contient au moins la fonction nulle. Soit x réel et $h(x)=\sup\limits_{g\in\mathcal{G}}g(x)$. Cette borne supérieure existe parce que $g(x)\leqslant f(x)$ pour chaque fonction $g\in\mathcal{G}$; ceci crée donc une fonction h inférieure ou égale à f et plus grande que toutes les fonctions de $\mathcal{G}$. Il reste à voir que h est convexe. On a pour toute fonction $g\in\mathcal{G}$, et tous réels x,y et $\lambda\in[0,1]$: $g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\leqslant\lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$ et en passant à la borne supérieure su g on a $h(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$, ce qu'il fallait . ♦

5) Application à la minimisation de γ. On a la relation $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i=0$ qui est une invitation à considérer des barycentres. Précisément, la convexité de la fonction g créée par enveloppe convexe supérieure de f_1 et f_2 entraîne que

$$\gamma=g(0)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(t_i)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_1(t_i)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}$$

et aussi $$\gamma \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_2(t_i) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{c_i+\sqrt{c_i}}$$

par conséquent il vient $$\gamma \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\min\Big(\frac{1}{c_i},\frac{2}{c_i+\sqrt{c_i}}\Big) \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} r_i \leqslant \frac{S_n(x)}{n}$$

d'après la question 3 de cette partie. Passant à la borne inférieure sur x, il vient $s_n \geqslant n\gamma$.

D'autre part, on montre que $\gamma < \dfrac{1}{2}$ en considérant une corde convenable.

6) Explicitation de l'enveloppe convexe de f_1 et f_2.

7) Conclusion.