Mathématiques en devenir

Hervé Queffélec – Martine Queffélec

Analyse complexe et applications

Deuxième édition

Cours et exercices

Calvage & Mounet

Martine et Hervé Queffélec résident à Lille. Leurs travaux de recherche portent sur l'Analyse sous toutes ses formes : fonctionnelle, harmonique, complexe, etc…
Maintenant chercheurs émérites à l'Université de Lille 1, ils ont été pendant plusieurs années membres du jury de l'agrégation, ou préparateurs à l'agrégation. Ils sont les auteurs, ensemble ou séparément, de plusieurs ouvrages d'enseignement ou de recherche en Mathématiques.

Martine.Queffelec@univ-lille.fr
Herve.Queffelec@univ-lille.fr

Mathematics Subject Classification – MSC2020 :

11 J–Number Theory
12 D–Field theory and Polynomials
28 A–Measure and Integration
30 A–Functions of a complex variable
33 B–Special functions
37 C 15-Dynamical systems and Ergodic Theory
44 A–Integral transforms, Operational Calculus
46 J–Functional Analysis
47 A–Operator Theory
60 E–Probability Theory and Stochastic Processes

Mots-clefs : contour, pôle, résidu, singularité, indice, conjugaison analytique

ISBN 978-2-493230-20-1

∞ Imprimé sur papier permanent

Nouveau tirage, bonifié et corrigé, septembre 2019
Nouvelle édition, octobre 2023

À Clémence et Dominique. À Toto

Préface

Contemplata aliis tradere...

1. Les nombres complexes et les prérequis

Les nombres complexes — qui ne le sont pas tant — ont à nos yeux d'analystes une structure incomparablement plus riche que celle des nombres réels ; par exemple, la topologie du plan est infiniment plus complexe (!) que celle de la droite : les parties connexes sont autrement compliquées que les intervalles de $\mathbb{R}$, la notion nouvelle de simple connexité apparaît, sans parler des notions d'indice, de courbe de Jordan, etc.
Et même, à ceux qui ont juré de rester dans le « monde réel », il faut rappeler cette phrase de Painlevé : « Le chemin le plus court entre deux vérités réelles passe souvent par le domaine complexe. » On en veut pour preuve le calcul de la somme réelle $S = 1 + \cos x + \cdots + \cos nx$, un des premiers enthousiasmes mathématiques des auteurs, consistant à passer à la somme complexe $1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx}$, qui est celle d'une progression géométrique et donc calculable sous forme « close », puis à revenir aux parties réelles. Bien sûr, si l'on connaît déjà la réponse, on peut parachuter une autre méthode : on forme $2\sin(x/2) \times S$, faisant ainsi apparaître une somme télescopique... Quoiqu'il en soit, cette méthode qui consiste à complexifier-exploiter-atterrir se révèle extrêmement féconde, et sera en filigrane dans tout l'ouvrage (voir par exemple l'indécomposabilité des lois de Poisson en Probabilités).

Mais entrons un peu plus dans les détails : les prérequis se limitent à une bonne familiarité avec l'Analyse enseignée en deuxième année (suites, séries, calcul intégral, calcul différentiel, topologie du plan) ; d'ailleurs, au chapitre I, le lecteur trouvera une introduction à l'exponentielle complexe, avec en application la forme polaire des nombres complexes et la définition axiomatique du nombre π, choses impossibles à traiter rigoureusement sans cette fonction exponentielle. Il trouvera également des révisions sur les espaces topologiques compacts et connexes, les deux notions jouant dans ce livre un rôle essentiel, ainsi que quelques éléments de la théorie des séries de Fourier.

En ce qui concerne l'intégration, la théorie de Riemann suffit ici puisque les fonctions à intégrer sont continues (pour le moins) mais on se permettra d'utiliser les théorèmes de convergence issus de la théorie de Lebesgue pour le confort qu'ils apportent (lemme de Fatou, théorème de convergence dominée, de Fubini, de changement de variable, etc.) ; les principaux résultats de calcul différentiel à plusieurs variables sont rappelés (théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites) et l'on se limite bien évidemment à la dimension finie. On pourra réviser tous ces thèmes dans les livres cités dans la bibliographie.

à la fin de cet ouvrage, quand on traite les applications, il est fait appel à des connaissances solides, quoiqu'élémentaires, de troisième ou de quatrième année ([Ru2]), l'algèbre des polynômes et les nombres algébriques, la théorie élémentaire des Probabilités ([Li]) et la théorie des opérateurs sur un espace de Hilbert.

2. Des polynômes aux fonctions holomorphes

« Holomorphe », juxtaposition de mots grecs signifiant « entier » et « forme ». Nous sommes loin de pouvoir prétendre aujourd'hui, comme le faisait Trissotin, « Et sait du grec, madame, autant qu'homme de France ! » : les mots de grec ancien font peur et le mot « holomorphe » ne fait pas exception à la règle. Or, soyons réalistes :

▷ f *dérivable* veut dire

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ admet une limite quand } h \text{ réel } \to 0.$$

▷ f *holomorphe* veut dire

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \text{ admet une limite quand } h \text{ complexe } \to 0.$$

Il s'agit donc *exactement de la même notion,* à cela près que dans le second cas l'accroissement h est complexe. Et il n'est pas plus dur de montrer que la dérivée de z^n est nz^{n-1} que de montrer que celle de x^n est nx^{n-1}. C'est pourquoi nous donnons dans ce livre, au début tout au moins, une grande place aux polynômes. Ces polynômes sont des sommes finies, donc les problèmes de convergence de série sont absents et les détails techniques bien plus simples. Et ce sont des fonctions holomorphes particulières, sur lesquelles beaucoup de phénomènes fondamentaux apparaissent : analyticité, propriété de la moyenne, principe du maximum, etc. Et l'on pourrait dire que, lorsque l'on a compris avec les polynômes, on a tout compris (i.e. le cas général des fonctions holomorphes). Il ne faut pas se dissimuler qu'il y a quelques différences : un polynôme non constant a toujours des racines complexes (théorème de d'Alembert-Gauss), la fonction exponentielle e^z n'en a aucune. Mais il s'en faut de peu (la fonction $e^z - a$ s'annule dès que $a \neq 0$) et cela correspond à un phénomène général (théorème de Picard, qui sera prouvé au chapitre VI de ce livre). Enfin, même si la notion d'holomorphie est une généralisation banale de celle de dérivabilité, elle se trouve être possédée par très peu de fonctions, et elle est d'une grand rigidité, puisqu'elle équivaut à une autre notion, celle d'analyticité. Cette équivalence extrêmement utile n'est pas facile à prouver, et demande à elle seule une mini-théorie, appelée théorie de Cauchy. Il y a en fait deux telles théories : la théorie de Cauchy locale, et la théorie de Cauchy globale. Elles sont toutes les deux présentées dans ce livre ; la première suffit souvent. Mais quand on a cette équivalence holomorphie-analyticité, les récompenses pleuvent. Nous espérons que cet ouvrage en convaincra le lecteur.

3. Les exercices corrigés

Un choix d'exercices est proposé à la fin de chaque chapitre, certains élémentaires, d'autres plus élaborés, qui suivent grosso modo la progression du chapitre (et donc pas nécessairement de difficulté croissante). L'ouvrage en comporte plus d'une centaine, un astérisque signalant quelques énoncés plus difficiles. On ne saurait trop recommander de s'y essayer pour s'approprier les nouvelles notions du cours. On trouvera le corrigé détaillé de chacun d'eux, à une ou deux exceptions près.

4. Dessins

Il ne suffit pas d'écrire un texte, encore faut-il savoir le transformer en un bel objet-livre, clairement présenté, agréable à feuilleter, et contenant de nombreux dessins, particulièrement indispensables dans un ouvrage sur la variable complexe. Il est certain que sans la collaboration et la compétence d'Alain Debreil, le manuscrit serait resté à l'état d'esquisse, privé de figures que nous aurions été incapables de réaliser à l'ordinateur. Alain a accompli en un temps record un travail colossal de mise en forme, de vérification, de création de références internes et de composition des figures. Il y en a plus de cinquante... Qu'il en soit chaleureusement remercié ici.

5. Remarques techniques

Les imperfections du texte sont évidemment inévitables, mais certaines sont volontaires : nous pensons par exemple au choix assumé de parler de la fonction $f(z) =$ (s'ensuit une expression symbolique en z) alors qu'il faudrait parler de la fonction $f : z \mapsto f(z)$ avec la lourdeur qui en découle. Nous avons fait le pari pascalien de croire que le lecteur sait distinguer la fonction f et la valeur $f(z)$ de f au point $z \dots$

Au-delà des symboles, nous tablons donc sur la bonne compréhension des objets en jeu, tout en sachant que la confusion (quand on manipule des familles de tels objets) reste possible.

Nous avons aussi choisi délibérément de noter log la fonction « logarithme » en complexe comme en réel, alors qu'il s'agit d'un « logarithme népérien » noté classiquement ln. Outre que cela donne des résultats particulièrement laids et ambigus dans certaines expressions $\big($comme $\sqrt{\ln(\ln(n))}$ dans la loi du logarithme itéré des Probabilités, pauvre Hélène$\big)$, il nous paraît inutile de préciser le côté népérien. En variable complexe, on n'utilise jamais d'autre base que la base e des logarithmes népériens.

Un autre choix assumé est la place que nous avons donnée aux produits infinis dans le chapitre VII. D'une part, la notion est aussi naturelle que celle de série, tout en comportant quelques pièges qu'il convient d'éviter et qui sont décrits ici. D'autre part, la notion est d'une utilité fondamentale (produits de Blaschke, de Weierstrass, d'Euler) dans plusieurs domaines, tels que la théorie analytique des nombres. Enfin, la notion est souvent mal comprise par les étudiants. Nous espérons avoir réussi à la rendre accessible ici.

6. Les applications

Il s'agit là d'un des aspects du livre auquel nous tenons le plus. Notre fascination pour les fonctions holomorphes tient à ce que, avec un peu d'imagination, elles peuvent s'appliquer de façon totalement inattendue à quantité d'autres domaines : nous pensons par exemple au théorème de Kahane-Gleason-Zelazko sur les formes linéaires multiplicatives, traité en exercice au chapitre IX, ou au théorème de Fuglede sur les opérateurs normaux, traité au chapitre XII. Un autre livre (en anglais, et rédigé de manière très concise) de Lax et Zalcman (« Complex proofs of real theorems » University lecture Notes 58, AMS 2012) traite en quatre-vingt-dix pages de quelques applications des variables complexes. Certaines sont absentes de notre livre. Mais il en contient bien d'autres, qui font l'objet des cinq derniers chapitres (sans parler du chapitre V sur le théorème des résidus et ses applications à des calculs non triviaux d'intégrales ou de sommes de séries).

Sans trop entrer dans les détails ici, mentionnons par exemple :

▷ **1**. l'homéomorphie de deux ouverts simplement connexes du plan comme retombée du théorème de représentation conforme de Riemann, et l'approche par espaces de Hardy de l'inégalité isopérimétrique au chapitre VIII ;
▷ **2**. l'identité d'Abel et les polynômes orthogonaux au chapitre IX ;
▷ **3**. la théorie des nombres (algébriques, transcendants) au chapitre X ;
▷ **4**. les Probabilités (notamment le problème des moments et le principe d'incertitude) au chapitre XI ;
▷ **5**. l'Analyse fonctionnelle au chapitre XII (avec les beaux théorèmes de Fuglede, von Neumann, Titchmarsh, ce dernier comme retombée des sous-espaces invariants de l'opérateur de Volterra) ;
▷ **6**. les opérateurs à trace, les déterminants de Grothendieck, et le délicieux théorème de Lidskii « la trace est la somme des valeurs propres » au chapitre XIII.

7. Pour qui, pourquoi, ce livre ?

Ce livre s'adresse à tous les étudiants qui découvrent les fonctions d'une variable complexe, c'est-à-dire, les étudiants de troisième année de la *Licence de mathématiques* (L3, voire L2 selon les cursus), certains étudiants de la *Licence de physique* à la recherche d'une approche rigoureuse des nombres complexes dont ils feront amplement usage par la suite ou ceux du *Master de mathématiques* qui veulent approfondir les résultats fondateurs de la théorie en vue de l'étude ultérieure d'ouvrages plus avancés, soit vers des développements mathématiques plus récents (par exemple les « espaces de Banach de fonctions holomorphes »), soit vers l'utilisation en Physique ; par ses applications dans des domaines variés (Probabilités, Géométrie, Théorie des nombres, etc.), le livre nous paraît aussi particulièrement adapté aux *candidats à l'agrégation de mathématiques*, qui trouveront dans les cinq derniers chapitres de quoi alimenter leurs leçons d'oral d'Analyse.
Le présent texte est issu d'un polycopié de la faculté d'Orsay, écrit par les auteurs à destination d'étudiants salariés amenés à travailler seuls en s'appuyant aussi sur des exercices corrigés. Dans ce polycopié, le point de vue « polynômes » jouait un rôle essentiel. Il en est de même dans cet ouvrage.

8. Remerciements

Notre ami et éditeur Rached Mneimné nous a incités à rédiger et à développer ce polycopié, ce que nous avons fait ; nous le remercions chaleureusement pour ses encouragements amicaux, sa longue patience, ses fructueux conseils, dont le moindre n'est pas de nous avoir recommandé de contacter Alain Debreil, dont nous parlons plus haut, pour les dessins !

Une mention spéciale doit être faite du travail de Bruno Calado, que certains qualifient de relecteur terrifiant, on pourrait aussi dire « terrific » au sens le plus louangeur du terme ! Avec une grande gentillesse, Bruno a accepté de nous aider de son immense culture et de son coup d'œil d'aigle, en relisant ligne à ligne l'intégralité du manuscrit et en faisant tous les exercices. Il a débusqué un nombre incroyable de coquilles, petites ou pas, et nous a permis des améliorations considérables du texte initial. Qu'il en soit très chaleureusement remercié ici.

Nous nous souvenons d'une phrase d'Adrien Douady dans la préface de son livre avec Régine Douady :
« Ses vagabondages mathématiques le ramèneront toujours aux nombres complexes. »
C'est un peu dans cet esprit que ce livre a été écrit.

H. et M. Queffélec
Lille, février 2017

9. À l'occasion du tirage de 2019

Tous les auteurs de livres ou d'articles scientifiques le savent : la chasse à la coquille est un travail de Sisyphe, toujours à recommencer par définition. La première édition n'a pas échappé à cette règle, malgré tous nos efforts. Mais nous avons tenté de mettre à profit ce nouveau tirage sur les points suivants.

1. Les coquilles ou erreurs détectées par nous-mêmes ou par nos collègues — que nous remercions — ont été aussi soigneusement que possible « éradiquées ».
2. Plus d'une douzaine d'exercices ou problèmes nouveaux ont été ajoutés. Ces ajouts ont été effectués systématiquement en fin des chapitres correspondants.
3. Des lacunes (grand théorème de Picard, exemples de transformations conformes, fonctions harmoniques, etc.) ont été comblées, et des compléments (approximation de Bernstein, polynômes de Faber, exposant de Lyapounov) ont été apportés.
4. Près d'une dizaine de dessins a également été ajoutée.

L'éditeur a, de son côté, apporté une amélioration sensible à la mise en page, rendant ainsi le texte encore plus avenant.

Nous espérons que cette nouvelle version, ainsi complétée, pourra rendre davantage de services aux lecteurs potentiels.

Les auteurs
Lille, août 2019

10. À l'occasion de la présente édition

Cette seconde édition comprend essentiellement les quatre ajouts suivants.

1. Quelques compléments sur les polynômes de Tchebychev et les polynômes cyclotomiques (irréductibilité).
2. La formule de Stirling dans le champ complexe. La fonction Γ d'Euler est un objet protéiforme qui admet plusieurs représentations : l'une par une intégrale, une autre par un produit infini, une troisième par limite d'exponentielles-fractions rationnelles. Une nouvelle représentation de Γ, qui utilise une forme simple de la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin, conduit presque immédiatement à cette formule de Stirling complexe.

3. Une preuve (due à Nesterenko) de l'irrationalité de $\zeta(3)$ qui utilise la variable complexe avec le théorème des résidus (dont on ne dira jamais assez que c'est aussi un outil théorique puissant) et la formule de Stirling complexe.
4. Une preuve (due à M. Herman) d'un théorème de conjugaison analytique de Brjuno, dans un cas particulier (quotients partiels bornés) qui utilise le théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff et une pincée d'approximation diophantienne.

Par ailleurs, nous avons fait les modifications suivantes.

1. Quelques erreurs au chapitre XIII sur les produits extérieurs ont été corrigées, et la solution d'un exercice sur l'algèbre de Calkin a été simplifiée.
2. Une quinzaine d'exercices ou problèmes nouveaux sont proposés.
3. Enfin, quatre dessins supplémentaires (merci Alain) accompagnent ces ajouts.

Nous espérons que cette seconde édition, renforcée particulièrement dans les applications, répondra aux attentes de nos lecteurs.

Les auteurs, à leur éditeur reconnaissants
Lille, Juin 2023

Table des matières

V. Théorème des résidus

VI. Propriétés des fonctions entières

VII. Produits infinis