Suites A180122 ; A180123 et A180124 de l'OEIS.

Pour $n\geqslant 1$, on pose (dans cet ordre) :
$a_n =$ le premier entier naturel non nul non encore utilisé (Suites A180122).
$b_n = n + a_n$ (Suites A180123).
$c_n =$ le premier entier naturel non nul non encore utilisé (Suites A180124).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
a_n	1	4	7	9	12	15	18	20	23	26	29	31	34	37	39	42	45	48	50	53	$\cdots$
b_n	2	6	10	13	17	21	25	28	32	36	40	43	47	51	54	58	62	66	69	73	$\cdots$
c_n	3	5	8	11	14	16	19	22	24	27	30	33	35	38	41	44	46	49	52	55	$\cdots$

Pour tout $n\geqslant 1$, vu la consruction, on a $a_n<c_n<a_{n+1}$ donc $a_{n+1}\geqslant a_n+2$ et $b_{n+1}\geqslant b_n+3$.
Une fois a_n construit, si b_m est le terme tel que $b_{m-1}<a_n<b_m$ (avec des inégalités strictes vu que, par construction, les a_n sont différents des b_m) alors :
- Soit $b_m=a_n+1$ et on a $c_n=a_n+2$ puis $a_{n+1}=a_n+3$.
- Soit $b_m=a_n+2$ et on a $c_n=a_n+1$ puis $a_{n+1}=a_n+3$.
- Soit $b_m\geqslant a_n+3$ et on a $c_n=a_n+1$ puis $a_{n+1}=a_n+2$.

Si on suppose que $a_n\approx\lambda n$ alors, dans le tableau, des termes $\leqslant a_n$, il y en a environ n dans la ligne a et dans la ligne c, et environ $\frac{\lambda n}{\lambda+1}$ dans la ligne b (vu que $b_m\leqslant a_n$ donne approximativement $(\lambda+1)m\leqslant\lambda n$).
On doit donc avoir $\lambda n=2n+\frac{\lambda n}{\lambda+1}$ c'est à dire $\lambda^2-2\lambda-2=0$ et donc $\lambda=1+\sqrt{3}$.

En regardant les premières valeurs avec un tableur, il semblerait qu'on ait en fait $a_n=\lfloor\lambda n\rfloor-1$:
Pour $n=1$, on a $\lfloor\lambda n\rfloor-1=\lfloor\sqrt{3}\rfloor=1=a_1$.
Pour un $n\geqslant 1$ fixé supposons que, pour tout $1\leqslant k\leqslant n$, on ait $a_k=\lfloor\lambda k\rfloor-1$.
Ecrivons $\lambda n=\lfloor\lambda n\rfloor+r$ avec $r\in[0,1[$. On a alors

$$\begin{aligned}
b_{m-1}<a_n<b_m &\Leftrightarrow m-1+\lfloor\lambda(m-1)\rfloor<\lfloor\lambda n\rfloor<m+\lfloor\lambda m\rfloor\\
&\Leftrightarrow (\lambda+1)(m-1)<\lfloor\lambda n\rfloor \text{ et } \lfloor\lambda n\rfloor+1\leqslant(\lambda+1)m\\
&\Leftrightarrow (3-\lambda)(\lfloor\lambda n\rfloor+1)\leqslant m<(3-\lambda)\lfloor\lambda n\rfloor+1 \quad \text{vu que} \quad (\lambda+1)(3-\lambda)=-\lambda^2+2\lambda+3=1\\
&\Leftrightarrow (3-\lambda)(\lambda n-r+1)\leqslant m<(3-\lambda)(\lambda n-r)+1 \quad \text{et on a} \quad (3-\lambda)\lambda=\lambda-2\\
&\Leftrightarrow m=(\lambda-2)n+s \quad \text{avec} \quad 0<(3-\lambda)(1-r)\leqslant s<1-(3-\lambda)r\leqslant 1
\end{aligned}$$

Et on en déduit que
$b_m-a_n=m+\lfloor\lambda m\rfloor-\lfloor\lambda n\rfloor=\big((\lambda-2)n+s\big)+\lfloor 2n+\lambda s\rfloor-(\lambda n-r)=s+r+\lfloor\lambda s\rfloor=1+\lfloor\lambda(1-r)\rfloor$
vu que $r+s=b_m-a_n-\lfloor\lambda s\rfloor$ est entier et que $0<r+s<2$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
a_{n+1}=a_n+2 &\Leftrightarrow b_m\geqslant a_n+3 \Leftrightarrow \lambda(1-r)\geqslant 2 \Leftrightarrow r\leqslant 1-\frac{2}{\lambda}=3-\lambda \Leftrightarrow \lambda n-\lfloor\lambda n\rfloor\leqslant 3-\lambda\\
&\Leftrightarrow \lambda(n+1)<\lfloor\lambda n\rfloor+3 \quad \text{vu que, } \lambda \text{ étant irrationnel, } \lambda(n+1) \text{ ne peut pas être entier.}\\
&\Leftrightarrow \lfloor\lambda(n+1)\rfloor=\lfloor\lambda n\rfloor+2
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $a_{n+1}=\lfloor\lambda(n+1)\rfloor-1$ et termine la récurence.

Concernantla valeur de c_n, on a :

$$c_n=a_n+1 \Leftrightarrow b_m\geqslant a_n+2 \Leftrightarrow r\leqslant 1-\frac{1}{\lambda}=\frac{4-\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda n-\frac{4-\lambda}{2}<\lfloor\lambda n\rfloor \Leftrightarrow \lambda n+\frac{\lambda-2}{2}<\lfloor\lambda n\rfloor+1$$

Ce qui montre que $c_n=\left\lfloor\lambda n+\dfrac{\lambda-2}{2}\right\rfloor$.

Question 1 du Forum : $3c(n)+2n \overset{?}{=} c\big(c(n)+n\big)$ $(\star)$

$$\begin{aligned}
(\star) &\Leftrightarrow 3c(n)+2n=\left\lfloor\lambda\big(c(n)+n\big)+\frac{\lambda-2}{2}\right\rfloor\\
&\Leftrightarrow 3c(n)+2n\leqslant\lambda c(n)+\lambda n+\frac{\lambda-2}{2}<3c(n)+2n+1\\
&\Leftrightarrow (\lambda-2)n-\frac{4-\lambda}{2}<(3-\lambda)c(n)\leqslant(\lambda-2)n+\frac{\lambda-2}{2}\\
&\Leftrightarrow \lambda n-\frac{\lambda+2}{2}<c(n)=\left\lfloor\lambda n+\frac{\lambda-2}{2}\right\rfloor\leqslant\lambda n+\frac{\lambda}{2} \longrightarrow O.K.
\end{aligned}$$

Question 2 du Forum : $3c(n)+2n+2 \overset{?}{=} b\big(c(n)+1\big) \quad (\star)$

$$\begin{aligned}
(\star) \;\Leftrightarrow\;& 3c(n)+2n+2 \;=\; c(n)+1+\Big\lfloor \lambda\big(c(n)+1\big)\Big\rfloor -1 \\
\Leftrightarrow\;& 2c(n)+2n+2 \;\leqslant\; \lambda c(n)+\lambda \;<\; 2c(n)+2n+3 \\
\Leftrightarrow\;& 2n+2-\lambda \;\leqslant\; (\lambda-2)c(n) \;<\; 2n+3-\lambda \\
\Leftrightarrow\;& \lambda n-1 \;\leqslant\; c(n)=\left\lfloor \lambda n+\frac{\lambda-2}{2}\right\rfloor \;<\; \lambda n+\frac{\lambda-2}{2} \quad \longrightarrow \quad O.K.
\end{aligned}$$