Sous-cas où $b = a$

En prenant $t = -\frac{\lambda}{2}$, on a $\alpha_{t,a} \in N_+$, et on constate que $\Phi_{t,a} = \Psi$. Pour tout $x \in S$, on a donc $\Phi_{t,a}(x) = \Psi(x) = 0$, d'où $S \subset \alpha_{t,a}(\Omega)$, et même $S \subset \alpha_{t,a}(L_+)$, d'où $\alpha_{t,a}(L) = M$.

Sous-cas où $b \in \Gamma$ et $b \neq a$

Fixons $c \in E_+ \setminus \{0_E\}$ tel que $\mathtt{Ker}(\mathcal{L}_c) = \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$ (l'ensemble des c possibles est l'intersection avec E_+ du B-orthogonal (privé de l'origine) du plan $\mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$). Soit ν l'unique réel tel que $Q(\frac{a+b}{2}) + \nu\mathcal{L}_a(\frac{a+b}{2})\mathcal{L}_b(\frac{a+b}{2}) = 0$. On a $\nu > 0$, car au point $\frac{a+b}{2}$, les trois fonctions $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{L}_b$ et Q sont < 0. La forme quadratique $Q + \nu\mathcal{L}_a\mathcal{L}_b$ est nulle en a, b et c, donc de la forme $\mathcal{L}_c\ell$, où ℓ est une forme linéaire sur E, nécessairement non nulle. Comme les trois vecteurs a, b, c sont linéairement indépendants, $\mathtt{Ker}(\ell)$ rencontre l'une au moins des droites affines (bc), (ca), (ab), et tout point commun à $\mathtt{Ker}(\ell)$ et l'une de ces droites appartient à $S \cap \Gamma = \{a, b\}$, d'où l'on déduit facilement que $\mathtt{Ker}(\ell) \cap \mathcal{H}$ ne peut être que l'une des trois droites (bc), (ca), (ab). En raisonnant comme plus haut avec les composantes de $\mathtt{Int}_{\mathcal{H}}(C) \setminus \widehat{S}$, on voit que $\mathtt{Ker}(\ell) \cap \mathcal{H}$ n'est ni (bc) ni (ca), donc c'est (ab). Donc $\ell \in \mathbb{R}^\star \mathcal{L}_c$. En remplaçant $\mathcal{L}_a\mathcal{L}_b$ par $\frac{1}{\nu}(\ell\mathcal{L}_c^2 - Q)$, on voit qu'il existe des réels μ_1 et μ_2 tels que $\Psi = \mu_1 Q + \mu_2(\mathcal{L}_c)^2$. L'inspection des signes sur $]a, b[$ montre que $\mu_1 > 0$, et celle des signes sur $\Gamma \setminus \{a, b\}$ montre que $\mu_2 > 0$. Posons $k = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, d'où $k > 0$. Posant $m = (c \mid \sigma(c)) = Q(c)$, on a $m > 0$ (puisque l'orthogonal $\mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$ de c intersecte L suivant deux droites vectorielles distinctes). Choisissons un réel $t < 0$ tel que le réel $\varepsilon = \mathcal{I}_c(-t)\,(2 + m\mathcal{I}_c(t))$ vérifie $0 < \varepsilon \leq k$. Pour tout $x \in S$, on a $Q(x) = -k(\mathcal{L}_c(x))^2$ d'où:

$$\Phi_{t,c}(x) = Q(x) + \varepsilon\,(\mathcal{L}_c(x))^2 = (\varepsilon - k)\,(\mathcal{L}_c(x))^2 \leq 0$$

donc $S \subset \alpha_{t,c}(\Omega)$. Remarquons que pour tout réel t', on a:

$$\mathcal{I}_c(t')\,(2 + m\mathcal{I}_c(t')) = \frac{1}{m}(\mathbf{e}^{2mt'} - 1)$$

et donc en prenant $t = -\frac{1}{2m}\mathtt{Log}\,(1 + km)$ (d'où $t < 0$), on a $\varepsilon = k$, c'est-à-dire $\alpha_{t,c}(\Omega) = \Lambda$.

PARTIE IV

Question 1°

Il s'agit de montrer que si, sous les hypothèses faites, β est extrémal, alors α est extrémal. Supposons donc β extrémal. D'abord α est de rang 3, car β étant de rang 3, E est engendré par $\beta(\Omega)$, et a *fortiori* par $\alpha(\Omega)$. Comme $\beta(\Omega) \subset \alpha(\Omega)$, on a $\alpha^{-1}\beta(\Omega) \subset \Omega$), i.e. $\alpha^{-1}\beta \in N$. Soit $\gamma_1 \in N$ et $\gamma_2 \in N$ tels que $\alpha = \gamma_1 + \gamma_2$. Alors $\beta = \gamma_1(\alpha^{-1}\beta) + \gamma_2(\alpha^{-1}\beta)$. Mais $\gamma_i(\alpha^{-1}\beta) \in N$, donc $\gamma_1(\alpha^{-1}\beta)$ et $\gamma_2(\alpha^{-1}\beta)$ sont $\mathbb{R}$-proportionnels, donc $\gamma_1 = \gamma_1(\alpha^{-1}\beta)(\beta^{-1}\alpha)$ et $\gamma_2 = \gamma_2(\alpha^{-1}\beta)(\beta^{-1}\alpha)$ le sont aussi. Cela prouve que α est extrémal, ce qui répond à la question.

Question 2°

Soit $\beta \in N$ de rang 3 tel que $\alpha(\Omega) \subsetneq \Omega$. Alors l'ensemble $S = \alpha(L_+) \cap \mathcal{H}$ est une ellipse contenue dans C et distincte de C. D'après II-4), on a donc $\alpha \in N_+$ tel que $\beta(\Omega) \subset \alpha(\Omega)$, et d'après 1) ci-dessus, il en découle que $\beta \in N_+$. On a vu en I que tout endomorphisme $\alpha \in N$ de rang 3 tel que $\alpha(\Omega) = \Omega$ est extrémal. On en déduit qu'un élément $\alpha \in N$ de rang 3 est extrémal ssi $\alpha(\Omega) = \Omega$.

Soit maintenant $\alpha \in N$ et $\beta \in N$ extrémaux non nuls (le cas où l'un au moins est nul est trivial, on sait que l'endomorphisme nul est extrémal). Leur rang ne peut être que 1 ou 3 (cf. I-3). Si tous deux sont de rang 3, d'après ce qui précède, on a $(\alpha\beta)(\Omega) = \alpha(\beta(\Omega)) = \Omega$, donc $\alpha\beta$ est extrémal. Si tous deux sont de rang 1, la description faite en I-2) montre que $\alpha\beta$ est extrémal (nul ou de rang 1). Supposons α de rang 3 et β de rang 1. Alors $\alpha(L_+) = L_+$, donc $\alpha\beta(\Omega)$ est une génératrice frontière de Ω, et comme $\mathtt{Ker}(\alpha\beta) = \mathtt{Ker}(\beta)$, la description faite en I-2) montre que $\alpha\beta$ est extrémal. D'autre part, $\mathtt{Im}(\beta\alpha) = \mathtt{Im}(\beta)$, et $\mathtt{Ker}(\beta\alpha) = \alpha^{-1}(\mathtt{Ker}(\beta))$. Comme α^{-1} permute entre eux les plans Q-isotropes, on voit que $\mathtt{Ker}(\beta\alpha)$ est un plan Q-isotrope, donc la description de I-2) montre encore que $\beta\alpha$ est extrémal. On a donc prouvé que *le composé de deux endomorphismes extrémaux quelconques est un endomorphisme extrémal.*

Question 3°

On a déjà vu en II-3) que tout endomorphisme $\alpha \in N$ de rang 1 est somme d'endomorphismes extrémaux. La démonstration de la proposition 10 peut être reprise (avec quelques simplifications dans le strict contexte de l'énoncé) et montre que tout endomorphisme $\alpha \in N$ de rang 2 est somme de deux éléments de N de rang 1, donc est somme d'endomorphismes extrémaux. Il reste à montrer que si $\delta \in N$ est de rang 3 et non extrémal, alors δ est somme d'endomorphismes extrémaux. Soit donc $\delta \in N$ de rang 3 et non extrémal. On a donc $\delta(\Omega) \subsetneq \Omega$, et par suite $\delta(\Omega) \cap \mathcal{H}$ est l'enveloppe convexe d'une ellipse S contenue dans C et distincte de Γ. D'après l'étude de II-4), si $S \cap \Gamma \neq \emptyset$, on a $t \in \mathbb{R}_-^\star$ et $y \in E_+ \setminus \{0_E\}$ tels que $\alpha_{t,y} \in N_+$ et $S = \alpha_{t,y}(\Omega)$. Alors $\delta(\Omega) = \alpha_{t,y}(\Omega)$ et $\alpha_{t,y}$ est de rang 3, donc $(\alpha_{t,y}^{-1}\delta)(\Omega) = \Omega$, donc $\gamma = \alpha_{t,y}^{-1}\delta \in N$ et est extrémal. Ecrivons $\alpha_{t,y} = \sum_{i=1}^{i=q} \beta_i$, où chaque β_i est un endomorphisme extrémal. Alors $\delta = \sum_{i=1}^{i=q} \beta_i\gamma$, et d'après 2) ci-dessus, chaque $\beta_i\gamma$ est extrémal, d'où $\delta \in N_+$. Il reste à traiter le cas où $S \cap \Gamma = \emptyset$. Le raisonnement qu'on vient de faire pourra être repris si on prouve qu'il existe $\alpha \in N_+$ de rang 3 tel que $\alpha(\Omega) = \delta(\Omega)$. Dans ce but, nous noterons L' l'unique cône du second degré (de sommet $\{0_E\}$) contenant S, et nous fixerons une forme quadratique Q' de signature $(2,1)$ sur E de cône isotrope L'. L'enveloppe convexe de $L' \cap E_+$ est donc $\delta(\Omega)$. Soit B' la forme polaire de Q'. Soit respectivement l et l' les isomorphismes de E sur son dual E^* donnés par $x \mapsto \mathcal{L}_x$ et $x \mapsto \mathcal{L}'_x = B'(x, .)$.

Supposons momentanément acquise la propriété suivante, qui sera prouvée plus bas:

Proposition 13

Il existe un plan vectoriel H', anisotrope à la fois pour Q et Q', tel que les plans affines ne contenant pas $\{0_E\}$ de direction H' intersectent L et L' suivant des ellipses homothétiques. Il y a soit un soit deux tels plans H', et il n'y en a qu'un ssi il y en a un tel que les plans affines qu'il dirige intersectent L et L' suivant des ellipses homothétiques concentriques.

Choisissons un plan H' vérifiant la proposition 13. Fixons un vecteur $a \in E_+$ tel que $H' = \mathtt{Ker}(\mathcal{L}_a)$. Puisque H' est anisotrope pour Q et Q', on voit que $a \in \mathtt{Int}_E(\delta(\Omega))$. Soit $\mathcal{H}'$ le plan affine d'équation $\mathcal{L}_a(x) = -1$. Alors $\Gamma' = \mathcal{H}' \cap L_+$ et $\mathcal{S}' = \mathcal{H}' \cap L'$ sont deux ellipses homothétiques sans point commun, la seconde étant strictement intérieure à la première. Tout centre d'homothétie qui transforme Γ' en S' est (dans le plan $\mathcal{H}'$) strictement intérieur à S' (on le voit par exemple en raisonnant par l'absurde sur les éventuelles tangentes à S' ou Γ' issues de ce centre). Soit c un tel centre d'homothétie, et soit k le rapport de l'homothétie h du plan $\mathcal{H}'$ de centre c telle que $h(\Gamma') = S'$. On a $0 < k < 1$. Soit ϖ le projecteur de E sur $D' = \mathbb{R}c$ parallèlement à $\mathcal{H}'$. Il est clair que ϖ est donné par $x \mapsto \varpi(x) = -\mathcal{L}_a(x)c$. L'endomorphisme $\alpha' = k(\mathrm{Id}_E - \varpi) + \varpi$ induit h sur $\mathcal{H}'$, donc vérifie $\alpha'(\Omega) = \delta(\Omega)$, et a *fortiori*, appartient à N. Notons $k' = \frac{1}{k}$ et $\alpha = k'\alpha'$. On a donc $k' > 1$ et $\alpha \in N$. De plus α est de rang 3, et:

$$\alpha = \mathrm{Id}_E + (k'-1)\varpi \tag{12}$$

On sait que Id_E est extrémal. Puisque $c \in \mathtt{Int}(\Omega)$, on a $(k'-1)\varpi \in N$, et comme c'est un endomorphisme de rang 1 non extrémal, on a $(k'-1)\varpi \in N_+$. D'après (12), on a donc $\alpha \in N_+$. Enfin puisque $\alpha'(\Omega) = \delta(\Omega)$, on a aussi $\alpha(\Omega) = \delta(\Omega)$, ce qui achève la résolution de cette question.

Remarque 2:

L'indication de l'énoncé engageait sur la voie en demandant d'étudier d'abord le cas où S est un cercle: il suffisait alors de penser à l'un des centres d'homothétie de Γ et de S pour exploiter l'indication comme il était demandé. Toutefois, l'expression " dans ce cas " de l'indication était ambigüe, et pouvait laisser croire que dans le cas général on n'a pas forcément des endomorphismes du type indiqué envoyant Ω sur $\delta(\Omega)$, alors que pourtant, on vient de le voir, il en existe toujours ◆

Remarque 3:

On a donc montré que tout élément de N est somme d'endomorphismes extrémaux. Bien entendu, il n'y a là rien d'étonnant. En effet, on a vu que le cône N est saillant, et il est facile de vérifier qu'il est fermé. Cela entraîne, classiquement, qu'il admet une base compacte. On sait que tout ensemble convexe compact est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux (théorème de Krein-Milman) et même, en dimension finie, l'enveloppe convexe tout court de ses points extrémaux (théorème de Carathéodory). On déduit de là que tout élément de N est somme d'éléments extrémaux. Ces remarques générales n'enlèvent strictement rien à l'intérêt du problème, qui d'une part donne une méthode pour décomposer un élément de N en somme d'endomorphismes extrémaux, et d'autre part évite le recours au théorème de Carathéodory. A titre d'exercice, le lecteur cherchera une base compacte de N ◆

Question 4°

La trace de γ est $-\frac{1}{2}$. Or tout endomorphisme $\alpha \in N$ extrémal de rang 1 est de trace ≥ 0. En effet, sa matrice dans une base de la forme (e_1, e_2, u), où $e_1 \in \mathtt{Ker}(\alpha)$ et $e_2 \in \mathtt{Ker}(\alpha)$, admet pour diagonale principale $(0, 0, \nu)$, où ν est la coordonnée de $\alpha(u)$ sur u. Comme $\alpha(u) \in \mathtt{Int}_E(\Omega)$ et comme $\mathtt{Ker}(\alpha)$ est un plan tangent à L, il est clair que $\nu \geq 0$ (on a $\nu = 0$ ssi α n'est pas diagonalisable, i.e. ssi $\alpha(u) \in \mathtt{Ker}(\alpha)$), d'où $\mathtt{Tr}(\alpha) = \nu \geq 0$.

On en déduit que la trace de toute somme d'endomorphismes extrémaux de rang 1 est ≥ 0. Donc γ n'est pas une telle somme.

Preuve de la proposition 13

Notons $\Omega' = \delta(\Omega)$. La fonction polynomiale de degré 3 à coefficients réels $F : t \mapsto \mathtt{Discr}(Q' - tQ)$ (où $\mathtt{Discr}$ désigne le discriminant normalisé) admet au moins une racine réelle λ. La forme quadratique $\Psi = Q' - \lambda Q$ admet donc (au moins) un vecteur singulier $v \in E_+$. Le Q-orthogonal et le Q'-orthogonal de v coïncident. On a $v \notin L \cup L'$ car $S \cap \Gamma = \emptyset$. On a $v \notin \Omega' \setminus \Omega$, car pour $x \in \Omega' \setminus \Omega$, l'intersection du Q-orthogonal de x avec Ω est $\{0_E\}$, tandis que celle du Q'-orthogonal de x avec Ω' est union de deux génératrices frontière de Ω' distinctes. Donc $Q(v)$ et $Q'(v)$ sont non nuls et de même signe. Comme $Q(v) = \lambda Q'(v)$, on voit que $\lambda > 0$. Nous allons maintenant montrer qu'il existe une base de E à la fois Q-orthogonale et Q'-orthogonale (assertion équivalente à la propriété que l'automorphisme $l'^{-1} \circ l$ de E est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$)). Soit V le plan Q-orthogonal de v (c'est donc aussi le Q'-orthogonal de v).

- Supposons d'abord que $Q(v) > 0$ (donc aussi $Q'(v) > 0$). Alors V rencontre Ω', donc intersecte chaque ellipse S et Γ en deux points distincts. Soit $\{a, b\} = V \cap \Gamma$ et $\{a', b'\} = V \cap S$. Les quatre points a, b, a' et b' sont distincts, et on a:

$$[a', b'] \subset [a, b] \tag{13}$$

On considère les deux involutions de droites vectorielles *réelles* de V dont les couples de droites doubles sont respectivement $\{\mathbb{R}a, \mathbb{R}b\}$ et $\{\mathbb{R}a', \mathbb{R}b'\}$. A cause de (13), ces deux involutions ont un unique couple commun $\{\mathbb{R}v', \mathbb{R}v''\}$, où $v' \in \mathcal{H}$ et v' est strictement intérieur à S dans $\mathcal{H}$, et où $v'' \notin \Omega$. Alors (v, v', v'') est une base de E à la fois Q-orthogonale et Q'-orthogonale.

- Supposons que $Q'(v) < 0$ (donc aussi $Q(v) < 0$). Alors $V \cap L = V \cap L' = \{0_E\}$. Considérons les deux involutions de droites vectorielles *réelles* de V respectivement formées par les couples de droites Q-orthogonales de V et les couples de droites Q'-orthogonales de V. Ces involutions sont sans droite double. Donc si elles sont distinctes, elles ont un unique couple commun $\{\mathbb{R}v', \mathbb{R}v''\}$, avec $v' \in E_+$ et $v'' \in E_+$ distincts. Alors (v, v', v'') est une base de E à la fois Q-orthogonale et Φ-orthogonale, et on a $v \in \mathtt{Int}(\Omega')$.

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E à la fois Q-orthogonale et Q'-orthogonale telle que $e_3 \in \mathtt{Int}(\Omega')$, et notons X_1, X_2, X_3 les coordonnées génériques dans cette base. Quitte à multiplier s'il le faut les e_i par des scalaires convenables, on peut supposer que $Q = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2$ et $Q' = pX_1^2 + qX_2^2 - X_3^2$, avec $0 < p \leq q$. La condition $\mathtt{Int}(\Omega') \subset \Omega$ donne: $p > 1$. Les formes quadratiques non nulles dégénérées du plan vectoriel engendré par Q et Q' sont $\Psi_1 = (q-p)X_2^2 + (p-1)X_3^2$, $\psi_2 = -(q-p)X_1^2 + (q-1)X_3^2$ et $\psi_3 = (p-1)X_1^2 + (q-1)X_2^2$. Si $p = q$, on a $\Psi_1 = \Psi_2 = (p-1)X_3^2$, et il est clair que les plans affines dirigés par le plan Q-orthogonal à e_3 intersectent L et L' suivant des ellipses homothétiques (et concentriques), tandis que Ψ_3 est de signature $(2, 0)$ (ce cas est celui où les complexifiés des cônes L et L' sont bitangents, il se produit ssi $l'^{-1} \circ l$ admet une valeur propre double). Si $p < q$, alors Ψ_2 est de signature $(1, 1)$ et Ψ_1 et ψ_3 sont de signature $(2, 0)$. On vérifie immédiatement que chacun des plans Ψ_2-isotropes est Q-anisotrope (donc aussi Q'-anisotrope). Les plans affines de direction l'un des plans Ψ_2-isotropes intersectent L et L' suivant des ellipses homothétiques (mais ici non concentriques). Toutes les assertions de la proposition 13 sont établies ■

Commentaire

Ce sujet fut proposé à l'écrit du concours d'entrée de l'E.N.S. Ulm en Juin 1966 (épreuve de 6 heures). Résultat: aucun candidat n'alla plus loin que la question I-1, ce qui annula de fait l'épreuve. Le bruit a couru qu'un mathématicien bien connu, averti de l'incident et témoignant habituellement beaucoup d'intérêt aux élèves de cette Ecole, se fit montrer le sujet, le chercha aussitôt devant un tableau... et sécha sévèrement. Est-ce ou non une légende? quoi qu'il en soit, même si c'est une légende, l'anecdote est éminemment caractéristique. Le problème connut immédiatement une célébrité méritée, et on l'appela le " Problème de Koszul ", du nom de son auteur.

Où en étaient les programmes de Spéciales en 1966? sur les formes quadratiques, rien de bien précis au-delà de la réduction de Gauss, de la loi d'inertie de Sylvester et de la théorie du rang. L'orthogonalité abstraite n'avait qu'un strapontin, sous le nom de " conjugaison ". La polarité et l'orthogonalité par rapport à une forme quadratique se surajoutaient l'une à l'autre beaucoup plus qu'elles ne s'entr'éclairaient. En Géométrie, absolument rien sur la convexité. Officiellement, aucune notion de topologie (même pas la notion d'ouvert ou de fermé dans $\mathbb{R}^n$ *, qui n'entra légalement dans les programmes qu'en Septembre 1973). On donnait encore aux élèves de Spéciales un solide bagage de " vieille " géométrie (que l'on l'appelait aussi " Géométrie moderne "), mais avec une grave lacune: aucun lien véritablement systématique n'était montré entre la théorie des formes quadratiques et celles des coniques et quadriques, qui tenait une grande place dans les programmes de seconde année. De plus, on ne s'occupait pour ainsi dire jamais de Géométrie réelle: les coniques d'un plan projectif avaient toujours quatre points communs, ce qui était trop souvent une façon de mettre la poussière sous les tapis. Par exemple, en cours de Géométrie descriptive, on utilisait couramment les fameux " plans des coniques homothétiques ", cf. la proposition 13: par un raisonnement de coniques dans le plan à l'infini, on savait qu'il y en a toujours 6... à condition que le corps de base soit* $\mathbb{C}$ *, mais on ne se souciait guère d'en discuter la réalité, question que l'on aurait de surcroît eu le plus grand mal à préciser, faute d'une théorie cohérente de l'extension des scalaires et d'une conscience claire qu'il s'agit de théorie de Galois dans le modeste cadre de l'extension* $\mathbb{C}$ *de* $\mathbb{R}$ *. La définition d'une conique ou quadrique se faisait sur* $\mathbb{C}$ *: on enseignait une théorie projective de ces objets, définis comme les images, dans un espace projectif* $\mathcal{P}$ *de dimension* d *égale à 2 ou 3 issu d'un* $\mathbb{C}$*-e.v.* $\mathcal{V}$ *de dimension* $d+1$ *, du cône des zéros d'une forme quadratique de* $\mathcal{V}$ *. Ce point de vue rendait inintelligible toute discussion de la réalité des objets, car cette discussion aurait nécessité un choix arbitraire d'un plongement dans* $\mathcal{P}$ *d'un espace projectif de dimension* d *sur* $\mathbb{R}$ *. Ce choix n'aurait pu se faire qu'en privilégiant un repère arbitraire de* $\mathcal{V}$ *: ce qui était intrinsèque sur* $\mathbb{C}$ *cessait de l'être sur* $\mathbb{R}$ *... d'où la réaction logique des utilisateurs réels des programmes: éviter la question. D'ailleurs les professeurs présentaient comme un des grands avantages de l'introduction de ce qu'on appelait les " coordonnées imaginaires " et " les points à l'infini " le fait que deux coniques d'un plan aient toujours quatre points communs. En fait d' " avantage ", c'était surtout une bonne raison pour évacuer presque toujours les questions de réalité... Il régnait une grande disparité entre les diverses classes préparatoires, selon que leur professeur avait été formé avant 1939 ou après 1945. Les premiers enseignaient à leurs élèves beaucoup de trésors de cette fameuse Géométrie moderne, mais sans faire de lien sérieux avec l'algèbre linéaire et bilinéaire (j'ai personnellement connu un professeur de MathSup qui se faisait un devoir de n'enseigner les rudiments d'algèbre linéaire de son programme qu'à partir du mois de Mai, après tout son cours de géométrie, et aussi, ce qui était encore moins banal, longtemps après quelques notions sur les déterminants, dont il avait besoin au début de l'année pour bricoler des systèmes linéaires). Les seconds enseignaient de solides cours d'Algèbre linéaire et bilinéaire, mais n'illustraient pas ces cours abstraits par les riches faune et flore de la Géométrie moderne. Ainsi pendant que dans telle " Taupe " de province, on voyait des élèves manier avec dextérité les faisceaux tangentiels de quadriques, les courbes de Steiner, les biquadratiques irréductibles, les cubiques gauches et autres objets intéressants, il circulait à Paris, véritables samizdats taupinaux, des cours dactylographiés complets sur les formes quadratiques abstraites avec corps de base de caractéristique* $\neq 2$ *, notion de cône isotrope, d'orthogonalité abstraite, etc. Si bien que les mêmes mots n'avaient pas le même sens pour le Taupin Arverne ou le Parisien: par exemple chez le cul-terreux, le mot " isotropie " ne pouvait évoquer que les points cycliques, l'ombilicale, les quadriques homofocales et les cônes du second degré de révolution (lesquels sont, comme chacun sait, bitangents au cône isotrope de même sommet), tandis que*