

E2.1.9 On calcule le discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 4 = \frac{4n^2 + 1}{n^2}$$

Les racines de l'équation sont donc

$$\frac{-\frac{1}{n} - \sqrt{\frac{4n^2+1}{n^2}}}{2} \text{ et } \frac{-\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{4n^2+1}{n^2}}}{2},$$

ce qui donne après simplification :

$$\frac{-\sqrt{4n^2+1} - 1}{2n} \text{ et } \frac{\sqrt{4n^2+1} - 1}{2n}$$

La première de ces deux quantités est strictement négative. Montrons que la deuxième est positive : on a

$$4n^2 + 1 > 1 > 0$$

$$\text{d'où } \sqrt{4n^2+1} > 1 > 0$$

$$\text{d'où } \sqrt{4n^2+1} - 1 > 0$$

$$\text{Ainsi } x_n = \frac{\sqrt{4n^2+1} - 1}{2n} > 0.$$

lb) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$x_n = \frac{\sqrt{4n^2+1} - 1}{2n}$$

$$= \frac{n\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} - 1}{2n}$$

$$= \frac{n(\sqrt{4+1/n^2} - 1/n)}{2n}$$

$$= \frac{\sqrt{4+1/n^2} - 1/n}{2}$$

On en déduit que  $(x_n)$  converge et

$$\text{que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1.$$

1c) On a  $1^2 - 1 = 0$  et donc  $x_\infty$  est bien solution de l'équation donnée.

2a) On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 + \frac{4}{n} = \frac{n+4}{n} > 0$$

les racines de l'équation sont donc

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{n+4}{n}}}{\frac{2}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{1 + \sqrt{\frac{n+4}{n}}}{\frac{2}{n}}$$

ce qui donne après simplification :

$$n - \sqrt{n}\sqrt{n+4} \quad \text{et} \quad n + \sqrt{n}\sqrt{n+4}$$

la deuxième racine est clairement positive;

montrons que la première est négative.

$$\text{On a } 0 < n^2 < n^2 + 4n$$

$$\text{d'où } 0 < n < \sqrt{n^2 + 4n}$$

$$\text{d'où } n < \sqrt{n}\sqrt{n+4} \quad \text{et donc } n - \sqrt{n}\sqrt{n+4} < 0.$$

On note  $y_n = n + \sqrt{n} \sqrt{n+4}$ .

2b) On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \sqrt{n} \sqrt{n+4} = +\infty$  par les théorèmes usuels sur les limites de suites.

3a.i) On dessine le tableau de variations de la fonction donnée :

$z$	$\frac{-2}{z-n}$	$0$
$3z^2 + \frac{2}{n} z$	$+ \quad \phi \quad - \quad \phi +$	
$z^3 + \frac{1}{n} z^2 - 1$	$\nearrow \quad \nearrow -1 \quad \nearrow$	

On en déduit que la fonction donnée est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

3a.ii) La fonction donnée est strictement croissante et continue sur  $[0; +\infty[$ .

En vertu de cette fonction, on a  $f(0) = -1$  et  $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = +\infty$ . Par le TVI, il existe donc

$z_1 \in ]0; +\infty[$  tel que  $f(z_1) = 0$ .

Par ailleurs, puisque  $f(1) = \frac{1}{n} > 0$ , on a  $z_1 \in ]0; 1[$ .

3b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\begin{aligned} z_{n+1}^3 + \frac{1}{n} z_{n+1}^2 - 1 \\ = \underbrace{z_{n+1}^3 + \frac{1}{n+1} z_{n+1}^2 - 1}_{=0} + \frac{1}{n} z_{n+1}^2 - \frac{1}{n+1} z_{n+1}^2 \\ = \frac{n+1-n}{n(n+1)} z_{n+1}^2 \\ = \frac{z_{n+1}^2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

? C

Ainsi  $z_{n+1}^3 + \frac{1}{n} z_{n+1}^2 - 1 \geq 0$ . Or cette expression

est nulle lorsque que  $f_n(z_{n+1})$ , où

$$f_1: z \mapsto z^3 + \frac{1}{n} z^2 - 1.$$

On a donc

$$0 \leq f_n(z_{n+1})$$

$$\text{donc } f_n(z_n) \leq f_n(z_{n+1})$$

donc  $z_n \leq z_{n+1}$  par croissance de  $f_n$   
sur  $\mathbb{C} \setminus \{-\infty\}$

Given pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $z_n \leq z_{n+1}$ .

La suite  $(z_n)$  est donc majorante et  
majorée (par 1), donc convergente.

3c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $z_n \leq 1$ . On en déduit  $z_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n \leq 1$ , d'où  $z_\infty^3 \leq 1$ .

Montrons l'inégalité inverse. Fixons  $n \in \mathbb{N}$ .

Alors pour tout  $q \in \mathbb{N}'$ , on a

$$\begin{aligned} & z_{n+q}^3 + \frac{1}{n} z_{n+q}^2 - 1 \\ &= \underbrace{z_{n+q}^3 + \frac{1}{n+q} z_{n+q}^2 - 1}_{=0} + \frac{1}{n} z_{n+q}^2 - \frac{1}{n+q} z_{n+q}^2 \\ &= \frac{n+q-n}{n(n+q)} z_{n+q}^2 \\ &= \frac{q z_{n+q}^2}{n(n+q)} \end{aligned}$$

?  $\circ$

On a donc pour tout  $a \in \mathbb{N}$ ,

$$z_{1+q}^3 + \frac{1}{1} z_{1+q}^2 - 1 > \circ.$$

On fait tendre  $q$  vers  $+\infty$ ; on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$z_n^3 + \frac{1}{n} z_n^2 - 1 > \circ$$

On fait enfin tendre  $n$  vers  $+\infty$ ; on obtient

$$z_\infty^3 - 1 > \circ$$

ce qui donne  $z_\infty^3 > 1$ .

On en déduit  $z_\infty^3 = 1$ , CQFD.

4a) On étudie les variations de la fonction  
 $g_u: t \mapsto \frac{1}{u}t^3 - t^2 - 1$ .

$t$	0	$\frac{2u}{3}$
$3ut^2 - 2t$	+	-
$g_u(t)$	$\rightarrow -1$	$\rightarrow g_u\left(\frac{2u}{3}\right) \rightarrow$

Par le TVI, cette fonction est strictement négative sur  $[0, \frac{2u}{3}]$  et s'annule en une unique valeur  $t_1 \in [0, \frac{2u}{3}]$  puisque

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g_u(t) = +\infty \text{ et } g\left(\frac{2u}{3}\right) \leq -1 < 0.$$

4b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\frac{2n}{3} \leq t_n$  ;  
 on en déduit par comparaison que  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ .

5) Si  $P$  est initialement sympa, alors  $a_k \geq 0$  pour  $k \in \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2$   
 Si  $P$  est faussement sympa, alors  $a_k \leq 0$  pour  $k \in \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2$ .  
 On en déduit que si  $P$  est initialement et faussement  
 sympathique, alors  $a_k = 0$  pour  $k \in \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2$  et  
 $P$  est la fonction constante égale à 1.

6(a) et b)

$\sum_{k=0}^d a_k x^k - 1$  un polynôme fassement symétrique. Alors  $P'(x) = \sum_{k=1}^d k a_k x^{k-1}$ .

On en déduit que pour tout  $x \geq 0$ , on a  $P'(x) \leq 0$  puisque les  $x^{k-1}$  sont tous positifs, les  $k a_k x^{k-1}$  sont tous négatifs et donc leur somme l'est aussi.

On en déduit que  $P$  est décroissant sur  $[0, +\infty[$ . Puisque  $P(0) = -1$ , on en déduit que  $P$  est strictement négatif sur  $[0, +\infty[$ .

7a) Si  $P$  est initialement et vraiment symétrique, alors  $P(x) = \sum_{i=k+1}^d a_i x^i - 1$

avec  $a_{k+1} > 0$  et  $a_i \geq 0$  pour  $i \in [k+1, d]$ .

On a donc  $P'(x) = \sum_{i=k+1}^d i a_i x^{i-1}$ . Puisque les  $i$  sont tous positifs, et que  $(k+1)a_{k+1}$  est strictement positif, on en déduit que  $P'(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$ . Cinsi  $P$  est strictement croissant sur  $[0, +\infty[$ .

7b) Puisque  $P(0) = -1$  et que  $P$  est continue et strictement croissant sur  $[0, +\infty[$  on

$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ ,  $P$  admet une unique valeur d'inflexion sur  $[0, +\infty[$  par le TFI.

80) On écrit  $P(x) = \sum_{i=1}^d a_i x^i - 1$ . Puisque

$P$  est vraiment sympathique, on peut écrire

$$P(x) = \sum_{i=k+1}^d a_i x^i + \sum_{i=1}^k a_i x^i - 1 \quad \text{avec } a_{k+1} > 0,$$

$a_i > 0$  pour  $i \in [k+1, d]$  et  $a_i \leq 0$  pour  $i \in [1, k]$ .

Puisque  $P$  n'est pas initialement sympathique, il existe  $j \in [1, d]$  tel que  $a_j < 0$ ; par ce qui est écrit plus haut on a donc forcément  $j \in [1, k]$ .

On mette  $m$  le plus petit tel que; on a alors

$a_p = 0$  pour  $p \in [1, m]$ . On peut donc écrire

$$P(x) = \sum_{i=k+1}^d a_i x^i + \sum_{i=m}^k a_i x^i - 1$$

avec  $a_k > 0$ ,  $a_m < 0$  et  $a_i > 0$  pour  $i \in [k+1, d]$ ,

$a_i \leq 0$  pour  $i \in [m, k]$ . On a donc, puisque  $a_m \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{i=k+1}^d i a_i x^{i-1} + \sum_{i=m}^k i a_i x^{i-1} \\ &= (-ma_m)x^{m-1} \left( \sum_{i=k+1}^d \frac{i a_i}{-ma_m} x^{i-m} + \sum_{i=m}^k \frac{i a_i}{-ma_m} x^{i-m} \right) \end{aligned}$$

On pose  $b = -ma_m > 0$ ,  $\ell = m-1$ , et

$$Q(x) = \sum_{i=m}^d \frac{-i a_i}{ma_m} x^{i-m}.$$

Il reste à montrer que  $Q$  est vraiment sympathique. On a  $Q(0) = -\frac{ma_m}{ma_m} = -1$ ;

le terme constant de  $Q$  est donc  $-1$ .

Puisque  $a_k > 0$  et que  $-ma_m > 0$ , on a  $\frac{a_k}{ma_m} > 0$ ,

Pour  $i \in [k+1, d]$ , on a  $a_i > 0$  et donc  $\frac{a_i}{-m_{\min}} > 0$ .

Pour  $i \in [m, k]$ , on a  $a_i \leq 0$  et donc  $\frac{a_i}{-m_{\min}} \leq 0$ .

Alors  $Q$  est vraiment sympathique.

8b) On procède par récurrence sur le degré de  $P$ .

Un polynôme de degré 0 ou 1 peut pas être vraiment sympathique.

Initialisation: Soit  $P(x) = ax^2 - bx + 1$ , avec  $a > 0, b > 0$ , un polynôme vraiment sympathique de degré 2.

On étudie les variations de  $P$ :

$x$	0	$b/a$	
$P'(x) = 2ax - b$	-	0	+
$P(x)$	↗	↗	

$a > 0 \rightarrow$

Car  $r = \frac{b}{2a} > 0$ , on voit avec les arguments standards sur le TVI que  $P$  vérifie les quatre propriétés demandées.

Hérédité: Soit  $P$  un polynôme symétrique de degré  $n$ . Par le 8<sup>e</sup> i, on peut écrire  $P' = b x^d Q(x)$  avec  $b > 0$  et  $Q$  vraiment symétrique. Puisque  $\deg Q \leq \deg P' < \deg P$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $Q$ . Soit  $r_Q$  la valeur d'annulation positive de  $Q$  sur  $[0; +\infty]$ .

Alors on a le tableau de variations:

$x$	$0$	$r_Q$
$b x^d$	? $\circlearrowleft$	+
$Q(x)$	?	- $\circlearrowleft$ +
$P'(x)$	$\circlearrowleft$ -	$\circlearrowleft$ +
$P(x)$	$\hookrightarrow$	$\rightarrow$

Puisque  $P(0) = -1$ ,  $P$  est strictement négatif sur  $[0; r_Q]$  par le TVI. Parque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ ,  $P$  admet une unique racine d'annulation sur  $(r_Q; +\infty)$  qui est aussi la unique valeur d'annulation sur  $[0; +\infty]$ . Par récurrence, la propriété est vraie pour les polynômes symétriques de degré quelconque.

Q) Nous avons vu que les polynômes faussement sympathiques sont négatifs et décroissants sur  $(0, +\infty)$ , donc n'admettent pas de valeur d'annulation strictement positive.

En revanche, les polynômes vraiment sympathiques, qu'ils le soient initialement ou non, admettent une valeur d'annulation sur  $(0, +\infty)$ , et cette dernière est unique. En notant  $\alpha$ , on a le tableau de signes

$x$	$\alpha$
$P(x)$	- +

10. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{E}[d]$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k,n} t^k = a_{k,\infty} t^k$ . Par somme, on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t) = P_\infty(t)$ .

II. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $a_{0,n} = -1$ , d'où  $a_{0,\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{0,n} = -1$ .

On considère les coefficients  $a_{k,\infty}$  pour  $k \neq -1$ .

S'ils sont tous positifs,  $P_\infty$  est initialement sympathique. S'ils sont tous négatifs,  $P_\infty$  est faussement sympathique. On peut donc supposer que  $P_\infty$  admet un coefficient strictement positif et un coefficient strictement négatif.

On note  $k+1$  le plus petit indice  $i$  pour lequel  $a_{i,\infty}$  est strictement positif. Alors  $k+1 \neq 1$  car sinon les  $a_{ij}$  seraient tous positifs pour  $i \in C_1, d \in I_j$ , contrairement à nos hypothèses. Par définition de  $k+1$ , on a  $a_{i,i} \leq 0$  pour  $i \in C_1, k \in I_i$ . Il reste à montrer que  $a_{i,i} > 0$  pour  $i \in [k+1, d] \cap C_1$ .

Puisque  $a_{k+1} > 0$  et que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_{k+1,i} = a_{k+1,\infty}^+$ , il existe un entier  $N$  tel que  $i > N \Rightarrow a_{k+1,i} > 0$ .

Puisque les  $P_i$  sont vraiment sympathiques, on a pour tout  $i > N$ , pour tout  $j \in [k+1, d] \cap C_1$ ,  $a_{j,i} > 0$ . On en déduit que pour tout  $j \in [k+1, d] \cap C_1$ ,  $a_{j,\infty} = \lim_{i \rightarrow +\infty} a_{j,i} > 0$ .

Ainsi  $P$  est vraiment sympathique.

Nous avons donc montré que dans tous les cas,  $P$  est sympathique.

17a) Puisque  $0 < u < x_\infty < v$ , et que  $P_\infty(x_\infty) = 0$ ,  
on a  $P_\infty(u) < 0 < P_\infty(v)$ .

Puisque  $P_\infty(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(v)$ , il existe  $M_v \in \mathbb{N}$   
tel que  $i > M_v \Rightarrow 0 < P_i(v)$ .

De même, il existe  $M_u \in \mathbb{N}$  tel que  
 $i > M_u \Rightarrow P_i(u) < 0$ .

En prenant  $M_{u,v} = \max(M_u, M_v)$ , on a  
 $i > M_{u,v} \Rightarrow P_i(u) < 0 < P_i(v)$ .

17b) Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $x_\infty - \varepsilon > 0$ . Alors, il  
existe  $M_\varepsilon$  tel que

$$n > M_\varepsilon \Rightarrow P_n(x_\infty - \varepsilon) < 0 < P_n(x_\infty + \varepsilon).$$

On fixe un tel  $n$ . Alors :

- puisque  $P_n(x_\infty - \varepsilon) < 0 = P_n(x_n)$ , on a  $x_\infty - \varepsilon < x_n$ .
- puisque  $P_n(x_\infty + \varepsilon) > 0 = P_n(x_n)$ , on a  $x_\infty + \varepsilon > x_n$ .

Il en découle  $x_n - \varepsilon < x_\infty < x_n + \varepsilon$  pour  
tout  $n > M_\varepsilon$ .

Puisque  $\varepsilon$  est arbitraire, on a obtenu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_\infty$ .

13) Soit  $M \in [0; +\infty[$ . Puisque  $P_\infty$  est faussement sympathique, on a  $P_\infty(M) < 0$ . Puisque  $P_n(M) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_\infty(M)$ , il existe un rang  $N$  tel que

$$i > N \Rightarrow P_i(M) < 0.$$

Ainsi pour tout  $i > N$ , on a

$$P_i'(M) < P_i'(x_i)$$

et donc par croissance de  $P_i'$  sur  $[0; x_i]$ ,

$$M < x_i$$

Ainsi pour tout  $M \in \mathbb{R}^+$ , il existe un rang  $N$  tel que

$$i > N \Rightarrow x_i > M.$$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .

14) Les polynômes en A sont tous sympathiques et les résultats trouvés sont cohérents avec le cas général que nous venons de traiter.