1/ H étant un Hilbert, on a :

$D(T)$ dense dans H alors $D(T)^{\perp} = \{0\}$.

Soit $y \in Im(T)^{\perp}$:

On a : $\forall x \in D(T) : \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^{*}y \rangle = 0$

donc : $T^{*}y \in D(T)^{\perp} = \{0\}$

càd : $y \in Ker(T)$.

Ainsi, $Im(T)^{\perp} \subset Ker(T)$ (A)

Soit $y \in Ker(T^{*})$:

Alors $\forall x \in D(T) : \langle x, T^{*}y \rangle = 0$

donc : $\forall x \in D(T) : \langle Tx, y \rangle = 0$ et $y \in Im(T)^{\perp}$

Ainsi $Ker(T^{*}) \subset Im(T)^{\perp}$ (B)

De (A) et (B) on a : $Ker(T^{*}) = R(T)^{\perp}$.

2/ $x \in \left(\begin{smallmatrix} Im(T^{*})^{\perp} \\ \cap D(T) \end{smallmatrix}\right)$, alors $\forall y \in D(T^{*}) : \langle x, T^{*}y \rangle = 0$.

$\Leftrightarrow \langle Tx, y \rangle = 0$

donc $Tx \in D(T^{*})^{\perp} = \{0\}$

Ainsi : $x \in Ker(T)$

donc $Im(T^{*})^{\perp} \underbrace{\cap D(T)} \subset Ker(T)$

(Comment s'en débarasser ?)

$x \in Ker(T)$: alors $\forall y \in H : \langle Tx, y \rangle = 0$

donc $\forall y \in D(T^{*}) : \langle x, Ty^{*} \rangle = 0$ càd $x \in Im(T^{*})^{\perp}$.

Ainsi : $Ker(T) \subset Im(T^{*})^{\perp}$

3/ $Im(T)$ est fermé et $Im(T)$ dense dans H.

Donc : $Im(T) = H$. $\Rightarrow$ T est surjective.

Soit $x, y \in D(T)$ tq $Tx = Ty$.

Alors : $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \geq c\|x-y\| = 0$.

$\Rightarrow$ T est injective.

Donc T est bijective, d'inverse T^{-1}.

On a : $\forall x \in \underset{(=H)}{Im(T)} : \|T(T^{-1}x)\| \geq c\|T^{-1}x\|$

Ainsi : $\forall x \in H : \|T^{-1}x\| \leq \frac{1}{c}\|x\|$.

T^{-1} est bornée donc continue.

T^{-1} est continue, bijective, linéaire donc bicontinue (th des isomorphismes de Banach), càd T est continue

$T^{-1}(H)$ est fermé comme image réciproque d'un fermé

Ainsi $D(T)$ est fermé.

Donc $\Gamma(T) := \{D(T) \times H\}$ est fermé.

4/ Soit $y \in \overline{Im(T)}$ et $(x_n)_n \in D(T)^{\mathbb{N}}$ tq : $Tx_n \longrightarrow y$.

$(Tx_n)_n$ est convergente donc de Cauchy, càd :

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tq : $\forall k \in \mathbb{N} : \|Tx_{m_\varepsilon} - Tx_{m_\varepsilon + k}\| < \varepsilon$.

Or : $\|Tx\| \geq c\|x\|$.

Donc : $c\|x_{m_\varepsilon} - x_{m_\varepsilon + k}\| < \varepsilon$ et donc $(x_n)_n$ est de Cauchy dans H, donc converge vers x, or T est fermé, donc (*)

(*) $Tx = y$.
d'où $y \in Im(T)$
et donc $Im(T)$ est fermé.