Corrigé CAPES 2023 épreuve 1

Arthur MEYER

Problème n°1 : VRAI-FAUX

I-Analyse

1. FAUX, l'assertion "f est paire" s'écrit "$\forall x \in \mathbb{R}$, $[f(x) = f(-x)]$". La négation de $\forall x$, $P(x)$" étant "$\exists x$, $\neg P(x)$", la négation de "f est paire" est "$\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq f(-x)$".

2. VRAI, on considère la fonction g définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$. On a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ (car f est à valeurs dans $[a, b]$) et de la même manière, $g(b) \leq 0$. Comme g est continue (f l'est et g est une somme de fonctions continues), le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(x) = x$.

3. FAUX, il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre. On peut définir par exemple f et g comme valant 0 sur toute la première moitié de l'intervalle $[a, b]$ (c'est-à-dire valant 0 sur $[a, \frac{a+b}{2}]$) puis de les rendre affine entre $\frac{a+b}{2}$ et b (en imposant $f(b) = 2$ et $g(b) = 1$). On a alors clairement $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (aire du triangle) et pourtant f n'est pas $>$ à g, puisqu'elles sont égales sur $[a, \frac{a+b}{2}]$.

4. FAUX, la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est par définition la valeur du réel suivant

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

si l'on prend un intervalle symétrique par rapport à 0 (par exemple $a = -1$ et $b = 1$) et qu'on prend f impaire sur cet intervalle (par exemple la fonction identité sur $[-1, 1]$) alors on a que sa valeur moyenne vaut 0 tout en étant clairement non nulle.

5. FAUX, le polynôme caractéristique de cette EDL2 est $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire nous assure que les solutions de l'EDL2 homogène associée à cette EDL2 sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ae^x + Be^{2x}$$

où A, B sont des constantes réelles. Il est clair que la fonction constante égale à 1 est solution particulère et le principe de superposition nous assure que l'ensemble des solutions est alors le sous espace affine de dimension 2 de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivant

$$1 + Vect[x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}]$$

6. FAUX, comme en 1, la négation de cette assertion (fausse d'ailleurs !) est : il existe une suite réelle majorée qui ne converge pas.

7. VRAI, on a que pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}(-\frac{1}{7})^k$$

Comme $|-\frac{1}{7}| < 1$, la somme géométrique $(u_n)_n$ converge et sa limite vaut

$$\frac{1}{1-(-\frac{1}{7})} = \frac{7}{8} < 1$$

8. FAUX, il y a une erreur car on rajoute 45 kilomètre d'une semaine à une autre.. Le programme serait juste si l'on faisant à la ligne 7 : $S = S + 5$ (on a affaire ici à une suite arithmétique).

II-Géométrie

9. FAUX, La contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$ est $\neg Q \Rightarrow \neg P$ (et a même valeur de vérité que l'implication), la contraposée du théorème de Pythagore est : Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A.

10. VRAI, par définition deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.
Ici,

$$\begin{aligned}(x-y, x+y) &= ||x||^2 + (x,y) - (y,x) - ||y||^2 \text{ (par bilin. du p.s)}\\ &= ||x||^2 - ||y||^2 \text{ (par bilin. du p.s)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux.

11.FAUX, Au vu de comment est rédigée la question il faut comprendre qu'il y a écrit

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ [(x,z) = (y,z) \Rightarrow x = y]$$

écrite comme ça, l'assertion est fausse : prendre $E = \mathbb{R}^2$ muni de son p.s canonique, $z = (z_1, z_1)$ et $x = (1,0)$, $y = (0,1)$. Il est clair que $(x,z) = (y,z)$ et pourtant $x \neq y$.
En revanche, l'assertion

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ [\forall z \in \mathbb{R},\ (x,z) = (y,z) \Rightarrow x = y]$$

est vraie. Il suffit de prendre $z := x - y$, et d'utiliser la définie-positivité du p.s. Question batarde!!

12. FAUX, il suffit de calculer l'équation de droite de la médiatrice et voir qu'elle n'est pas égale à celle proposée. Pour ce faire, on utilise que le milieu de $[AC]$ est sur la médiatrice, et que la médiatrice est dirigée par un vecteur du plan normal à la droite (AC). Les calculs donnent que le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $J(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ et **un** vecteur directeur de la médiatrice est un vecteur normal à $(9,3)$. On peut prendre $(1,-3)$. L'équation paramétrique de la médiatrice est alors $\begin{cases} x &= \frac{1}{2} + t \\ y &= \frac{5}{2} - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Cette équation est équivalente à l'équation cartésienne

$$y + 3x = 4$$

qui n'est clairement pas équivalente à

$$x + y = 3$$

puisque B appartient à cette dernière, mais pas à celle d'avant!

13. FAUX, l'ensemble des points d'affixe z du plan complexe vérifiant

$$|z-a| = |z-b|$$

où a, $b \in \mathbb{C}$ est exactement l'ensemble des points M d'affixes z qui sont à même distance du point A d'affixe a et du point B d'affixe b, c'est-à-dire que ce sont l'ensemble des points M situés sur la médiatrice du segment

$[AB]$.

14. VRAI, On écrit les complexes donnés sous forme exponentielle. Il suffit de le faire pour un seul de ces deux nombres puisqu'ils sont conjugués et que $\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}+i &= (\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2})[\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2})} + \frac{1}{(\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2})}i] \\
&= 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) \\
&= 2e^{\frac{i\pi}{6}}
\end{aligned}$$

On a donc que $\overrightarrow{OB}$ a pour affixe $2e^{\frac{i\pi}{6}}$ et $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe $2e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ a donc bien une mesure de $\frac{\pi}{3}$ mod (2π).

15. FAUX, le plan et la droite sont perpendiculaires si et seulement si le vecteur directeur de la droite (D) et du plan (P) sont colinéaires. On lit directement ces vecteurs (qui sont respectivement $(1,-1,-1)$ et $(1,-2,3)$) et on voit qu'ils ne sont pas colinéaires, car puisqu'ils ont même première coordonnées, ils sont colinéaires à conditions d'être égaux, ce qui n'est pas.

III-Matrices

16. VRAI, on fixe la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. La matrice proposée par l'énoncé est alors la matrice de l'application linéaire qui transpose les vecteurs de base. Cette application linéaire vérifie trivialement qu'au carré elle vaut l'identité, et alors $X^2 - 1$ annule la matrice.

Ce polynôme est le polynôme caractéristique (et minimal !) de la matrice, car il est unitaire de degré 2 = la taille de la matrice. C'est le minimal car la matrice n'est pas $\pm I_2$ (on utilise ici que $K[X]$ est principal + C-H, même si on n'a pas besoin de justifier que c'est le polynôme minimal de la matrice). Par le lien racines du polynôme caractéristique/valeurs propres, on en déduit que 0 n'est pas valeur propre de la matrice, donc que l'endo associé est injectif, donc qu'il est bijectif (dim. finie), donc que la matrice est inversible. De plus elle est diagonalisable car ce polynôme est scindé à racines simples.

17 VRAI, Par l'absurde, si 1 et B sont inversibles, alors en multipliant successivement à gauche par A^{-1} puis B^{-1}, on aurait que $I_n = 0_n$ ce qui est absurde.

IV-Pourcentages

18. FAUX, notons x le prix du tabac en 2018.

A la date du 1^{er} janvier 2019, son prix était de $\frac{112}{100}x$ euros, à la date du 1^{er} janvier 2020, son prix était de $\frac{116}{100}[\frac{112}{100}x]$ euros, et enfin à date du 1^{er} janvier 2021, son prix était de $\frac{107}{100}[\frac{116}{100}\frac{112}{100}x]$ euros.

Après avoir fait les calculs, on trouve que le prix du tabac début 2022 était d'environ $1,39x$ euros. Il a donc subit une augmentation d'environ 39 pourcents entre 2018 et 2021.

19. FAUX, comme ils ne suivent pas les mêmes enseignements, il se peut que lors de la première semaine Armelle fasse 100 exercices, Boris 10 et que ce soit l'inverse la deuxième semaine.

Dans une telle situation et avec les données de l'exercice, on a que Boris aura réussi sur les deux semaines un total de $9+40=49$ exercices, tandis qu'Armelle en aura réussi $50+2=52$ exercices. Comme ils ont traité la même quantité d'exercices, Armelle a réussi un plus grand pourcentage d'exercices que Boris.

V-Arithmétique

20. VRAI, soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de n par 2, et n s'écrit de manière unique $n = 2q + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \{0,1\}$ (n est pair ou impair...).

Si $\varepsilon = 1$, alors par le binôme de Newton

$$n^3 = 2q' + \varepsilon$$

avec $q' \in \mathbb{N}$ et donc $n^3 - n$ est pair.

Si $\varepsilon = 0$, alors on utilise seulement que la différence de deux nombres pairs est paire.

21. FAUX, On sait que ce résultat est vrai si n est premier, puisqu'alors le problème revient à résoudre

$$(x-3)(x+3) = 0$$

dans le **corps** $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ (par le théorème de Bézout).

En revanche, si n n'est pas premier, l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ n'est plus intègre et on a de bonnes chances de trouver un cex. Le problème est équivalent à trouver n et x tels que

$$n \mid (x-3)(x+3)$$

tout en ayant

$$n \nmid (x-3) \text{ et } n \nmid (x+3)$$

avec n non premier. J'ai trouvé $n = 8 = 2^3$, et $x = 7$, puisqu'alors $x - 3 = 2^2$ et $x + 2 = 2 \times 5$.

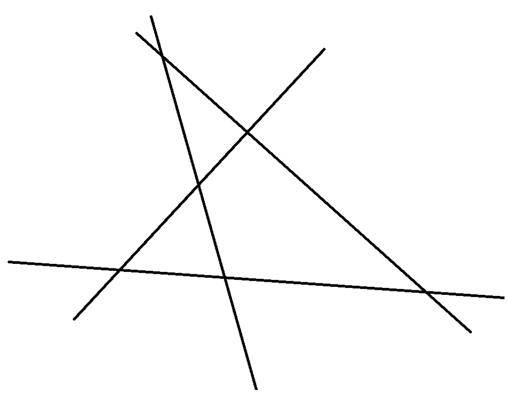
VI-Dénombrement

22. FAUX, on rappelle que si E est un ensemble de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal 2^n. Cela se prouve en dénombrant les parties à k éléments de E, qui sont au nombre de $\binom{n}{k}$ (on peut faire le lien avec les répétitions d'épreuves de Bernouilli en numérotant nos éléments de l'ensemble. Ainsi, le nombre de parties à k éléments sera exactement le nombre de branche où l'on a obtenu exactement k succès dans une succession de n épreuves de Bernouilli indépendantes, où un succès à la i-ème épreuve correspond au fait de prendre le i-ème élément de E).

On utilise ensuite le fait que $\mathcal{P}(E)$ se partitionne selon le cardinal de ses sous parties, et on utilise ensuite le binôme de Newton pour conclure.

Ici, $2^{10} = 1024 \neq 100$.

23. FAUX, ce cex le montre pour $n = 4$.



VII-Probabilités

24. VRAI, Le problème est équivalent à calculer $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2)$ où X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{6})$.

Comme $\mathcal{P}(X=1)=\frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X=2)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$, il vient

$$\mathbb{P}(X\geq 3)=1-\frac{1}{6}-\frac{5}{36}=\frac{36-6-5}{36}=\frac{5^2}{6^2}$$

25. VRAI, on va prouver seulement l'implication, puisqu'alors on appliquera l'implication à l'évènement $\tilde{A}=\bar{A}$ et $\tilde{B}=\bar{B}$ qui seront indépendants, et on obtiendra que $\bar{\tilde{A}}$ et $\bar{\tilde{B}}$ seront indépendants, c'est-à-dire que A et B sont indépendants.

($\Rightarrow$) Les évènements $\bar{A}\cap\bar{B}$ et $A\cup B$ partitionnent Ω (par les lois de Morgan) et alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{A}\cap\bar{B}) &= 1-\mathbb{P}(A\cup B)\\ &= 1-[\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)]\\ &= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \text{ (car A et B sont indépendants)}\\ &= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)(1-\mathbb{P}(A))\\ &= \mathbb{P}(\bar{A})-\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\bar{A})\\ &= \mathbb{P}(\bar{A})[1-\mathbb{P}(B)]\\ &= \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B})\end{aligned}$$

Problème n°2 : Equations fonctionnelles

I- Quelques résultats classiques

1-Dérivabilité Eh oh sayer gros je fais le prouveur mais j'vais pas faire la partie 1 quand même.

2 La fonction logarithme népérien

(a). Soit φ comme dans l'énoncé. Alors, par le théorème fondamental de l'analyse, ln est dérivable sur $]0,+\infty[$. En utilisant la formule de la dérivation de fonctions composées (que l'on peut utiliser car comme $y>0$, $xy>0\in D_{\ln}$, il vient pour tout $x>0$

$$\varphi'(x)=y\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}=0$$

Par un corollaire du TAF et le fait que φ est définie sur un intervalle, on en déduit que φ est constante. Il suffit d'évaluer en 1 pour trouver sa valeur, qui est alors 0 (vu la déf de ln) et alors on obtient la formule demandée.

(b).

Initialisation : La formule est vraie pour $n=1$ (rien à montrer).

Hérédité : Supposons l'existence de $n\geq 1$ tel que la formule soit vraie pour ce n.

Alors,

$$\begin{aligned}\ln(x^{n+1}) &= \ln(x^n\times x)\\ &\underset{\text{qu. (a).}}{=} \ln(x^n)+\ln(x)\\ &\underset{\text{HR}}{=} n\ln(x)+\ln(x)\\ &= (n+1)\ln(x)\end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n\geq 1$ par principe de récurrence.

On applique ensuite la formule à $y=\frac{1}{x}$, il vient

$$0=\ln(1)=\ln(x\times\frac{1}{x})=\ln(x)+\ln(\frac{1}{x})$$

(c).

(i). On a $g(1) = g(1 \times 1) = g(1) + g(1)$, donc $g(1) = 0$.

(ii). On considère la fonction $H_y : x \in]0, +\infty[\mapsto g(xy)$. H est dérivable par composition (g l'est par hypothèse) donc pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$H_y^{'}(x) = y \times g^{'}(xy)$$

Or, comme $H_y(x) = g(x) + g(y)$ on a aussi que $H_y^{'}(x) = g'(x)$.

Ainsi, on obtient ce qui est demandé.

(iii). Faire $x = 1$ donne $c = g^{'}(1)$

(iv). Soit $x > 0$. En intégrant l'égalité de (c).(iii) entre 1 et x, il vient par le théorème fondamental de l'analyse

$$g(x) - g(1) = c[\ln(x) - \ln(1)]$$

c'est-à-dire $g(x) = c\ln(x)$ (c.(i) nous assure que $g(1) = 0$).

(Il faut juste faire attention : si $x > 1$ c'est bon, mais si $x < 1$, il faut intégrer entre x et 1)

Ainsi, on a prouvé que si g est dérivable et vérifie l'équation fonctionnelle, c'est un multiple de ln. Réciproquement, une telle fonction est bien dérivable et vérifie l'équation fonctionnelle. Tout va bien!!

(d). La dérivée de ln est par définition $x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x}$. Cette fonction étant > 0, ln est strictement croissante (corollaire du TAF).

(e). L'existence d'un tel n est évidente, puisqu'il suffit de prendre $n := \lfloor \frac{a}{\ln(2)} \rfloor + 1$.

Soit $x \geq 2^n$. Alors, par croissance de ln : $\ln(x) \geq \ln(2^n) = n\ln(2) \geq A$.

(f). Par définition de la limite en $+\infty$ et la question précédente, on a prouvé que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Ensuite, on utilise la formule de la question 2.(b) et alors, par composition de limites

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = \lim_{X \to +\infty} \ln(\frac{1}{X}) = \lim_{X \to +\infty} -\ln(X) = -\infty$$

(cette composition de limites est licite sans utiliser la continuité de ln, mais seulement le fait que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, 1[$).

(g). Comme ln est strictement croissante, elle est injective. De plus, elle envoie

$$]0, +\infty[\text{ sur }]-\infty, +\infty[$$

par continuité + la question (f). Elle est donc surjective.

En effet, si $y \in \mathbb{R}$, alors on applique le TVI à ln sur $[u, v]$ où u et v sont tels que $\ln(u) < y$ et $\ln(v) > y$. (de tels éléments existent par le calcul des limites en 0 et $+\infty$ de ln).

(h). Facile :

$$\begin{aligned}
&\ln(\frac{a+b}{4}) = \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} \\
&\Leftrightarrow 2\ln(\frac{a+b}{4}) = \ln(ab) \text{ (qu. 2.(a))} \\
&\Leftrightarrow \ln(\frac{(a+b)^2}{16}) = \ln(ab) \text{ (qu. 2.(a))} \\
&\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{16} = ab \text{ (par bijectivité de ln)} \\
&\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 16ab
\end{aligned}$$

II-Première équation fonctionnelle de Cauchy

3-Résultats préliminaires

a. $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. D'où $f(0) = 0$.

b. On prend $y = -x$, cela donne

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

c. Récurrence évidente.

d.

$$f(x) = f(\frac{1}{n} \times n \times x) \underset{\text{qu. précédente}}{=} nf(\frac{1}{n}x)$$

d'où $f(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}f(x)$.

Maintenant, si r est rationnel, $r = \frac{m}{n}$ et donc

$$f(rx) = f(m \times \frac{1}{n}x) \underset{qu.prcdente}{=} mf(\frac{1}{n}x) \underset{\text{ci-dessus}}{=} m\frac{1}{n}f(x) = rf(x)$$

e. $x = 1$ donne $a = f(1)$.

4-Première méthode

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(q_n)_n$ telle que

$$q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$$

Comme f est continue, $f(\lim q_n) = \lim f(q_n)$ et alors

$$f(x) = f(\lim q_n) = \lim[f(q_n)] = \lim f(1 \times q_n) = \lim[q_n f(1)] = f(1) \lim q_n = ax.$$

5-Seconde méthode

a. Ces intégrales existent car f est continue sur $\mathbb{R}$. La linéarité de l'intégrale et l'additivité de f donnent

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 [f(x+t) - f(t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 \times f(x)\end{aligned}$$

b. La fonction $\varphi : t \in [0,1] \mapsto x + t \in [x, x+1]$ étant de $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective, on peut appliquer le théorème de changement de variable. On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi^{-1}(x)}^{\varphi^{-1}(x+1)} f(\varphi(t)) \times 1\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi^{-1}(x)}^{\varphi^{-1}(x+1)} f(\varphi(t)) \times \varphi^{'}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(\varphi^{-1}(x))}^{\varphi(\varphi^{-1}(x+1))} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_x^{x+1} f(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Par la question d'avant, on aboutit au résultat demandé.

c. Soit $h \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \int_{x+h}^{x+h+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - [\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t] \\ &= \int_{x+h}^{x+h+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(1) &= \frac{1}{h}(\int_{x+1}^{x+h+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+h} f(1)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{h}(\int_{x+1}^{x+h+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+h} [f(t)+f(1)]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{h}(\int_{x+1}^{x+h+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+h} f(t+1)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{h}(\int_{x+1}^{x+h+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x+1}^{x+h+1} f(u)\,\mathrm{d}u \text{ (changement de variables)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc f est dérivable avec $f'(x) = f(1)$ pour tout x.

d. On conclut que f est affine, et nécessairement $f(0) = 0$ par 3.a., donc $f(x) = f(1)x$ pour tout x.

III-Restriction des hypothèses

6-Continuité en un point

a. $f(x) = f(-x_0) + f(x+x_0) = -f(x_0) + f(x+x_0)$ (f est impaire).

Comme f est continue en x_0, $x \mapsto f(x+x_0)$ admet une limite en 0 (qui sera $f(x_0)$) et alors f admet une limite en 0, qui est $-f(x_0) + f(x_0) = 0 = f(0)$. f est donc bien continue en 0.

b. Soit a un point de $\mathbb{R}$. $f(x) = f(a) + f(x-a)$. Comme f est continue en 0, $\lim\limits_{x \to a} f(x-a) = f(0)$ et alors f admet une limite en a, qui sera $f(a) + f(0) = f(a)$. f est donc continue en a, et donc f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

c. On applique les parties précédentes et on s'assure qu'alors f est linéaire.

7-Monotonie

a. C'est une question délicate, si on sait, on peut poser $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = \frac{\lceil 10^n x \rceil}{10^n}$. On voit facilement que ces suites sont resp. croissantes et décroissantes, et qu'elles convergent vers x.

b. f étant monotone, on a

$$f(a_n) \leq f(x_0) \leq f(b_n)$$

a_n et b_n étant rationnels, l'inégalité devient

$$a_n f(1) \leq f(x_0) \leq b_n f(1)$$

et on conclut par le théorème des gendarmes.

c. On applique ce raisonnement à tout x_0 de $\mathbb{R}$. Cela nous donne que f est linéaire.

8-Encadrement

a. Comme $\alpha < \beta$ on a que

$$-\beta + nx < -\alpha + nx$$

En appliquant la question 7.(i) au milieu de $-\beta + nx$ et $-\alpha + nx$ (que l'on note u), on trouve un rationnel r_n tel que

$$-\beta + nx < r_n < u < -\alpha + nx$$

r_n vérifie donc

$$\alpha < nx - r_n < \beta$$

b. On a

$$\begin{aligned} n|f(x) - ax| &= |f(nx) - f(n)x| \\ &= |f(nx - r_n) + f(r_n) - f(n)x| \\ &\leq |f(nx - r_n)| + |f(1)||r_n - nx| \end{aligned}$$

ce qui conclut en réordonnant.

c. On divise par n et comme f est majorée et que $nx - r_n$ aussi, on a :

$$|f(x) - ax| \leq \frac{1}{n}(|f(nx - r_n)| + |a||nx - r_n|) \leq \frac{1}{n}[\sup(f) + |a| \max(|\alpha|, |\beta|)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

IV-D'autres équations fonctionnelles

9-Deuxième équation fonctionnelle de Cauchy

a. On a $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$, donc $f(0)$ est racine de $X^2 - X$ sur $\mathbb{R}$ et donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0 + x) = f(0) \times f(x) = 0 \times f(x) = 0$ et f est nulle.

On a bien prouvé ce qui était demandé.

b.

(i). On a $f(0) = 1$, donc $f(x)f(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vient donc de prouver que f ne s'annule jamais. Ainsi, comme $f(0) = 1 > 0$ et que f est continue, elle est de signe constant strictement positif (sinon, TVI et f s'annule...) et alors $f > 0$.

(ii). Simple vérif où on utilise successivement les propriétés de morphie de ln et f.

(iii). Comme g est continue par composition de fonctions continues, on a par la partie précédente que g est linéaire. Elle s'écrit donc $g(x) = ax$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$, pour tout x de $\mathbb{R}$. En passant à l'exponentielle, on en déduit que $f = \exp(a.)$

10-Equation fonctionnelle de Jensen

a. Cette propriété dit que f transforme la moyenne de deux nombres en la moyenne de "f de ces deux nombres".

b. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Posons $X = x + y$ et $Y = 0$. Il vient :

$$f(\frac{x+y}{2}) = f(\frac{X+Y}{2}) \underset{\text{hyp. sur } f}{=} \frac{f(X) + f(Y)}{2} = \frac{f(x+y) + f(0)}{2}$$

Cela nous donne $f(x+y) = 2f(\frac{x+y}{2}) - f(0)$, et l'hypothèse sur f permet de remplacer $2f(\frac{x+y}{2})$ par $f(x)+f(y)$ et cela conclut.

c. Il vient facilement pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$g(x + y) = f(x + y) - b \underset{\text{qu. précédente}}{=} [f(x) + f(y) - b] - b = f(x) - b + f(y) - b = g(x) + g(y)$$

On en déduit (puisque g est continue car f l'est) que g est linéaire, et donc que f est affine. Réciproquement, toute fonction affine vérifié l'inégalité de Jensen puisqu'alors si $f(x) = mx + p$

$$m\frac{x+y}{2} + p = \frac{mx}{2} + \frac{my}{2} + p = \frac{mx}{2} + \frac{my}{2} + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = \frac{mx+p}{2} + \frac{my+p}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

11

a.

(i). g est dérivable par produit de fonctions dérivables. On a donc par les formules de dérivations usuelles, pour tout $x > 0$

$$g'(x) = \frac{2x \times 2x - 2 \times (x^2+16)}{4x^2} = \frac{x^2-16}{2x^2}$$

Ainsi, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ (car $x > 0$). On dresse facilement le tableau de variations de g et les limites sont faciles à calculer en 0^+ et $+\infty$ (ce sera $+\infty$ pour les 2). Le minimum de g est $g(4) = 4$.

(ii). $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq x \Leftrightarrow x^2 + 16 \geq 2x^2 \Leftrightarrow x \leq 4$

Ainsi, h est strictement positive sur $]0,4[$, s'annule en 4 et est strictement négative sur $]4,+\infty[$.

b.

(i). Comme 4 est un point fixe pour g et que g est croissante sur $[4,+\infty[$, on s'assure par une récurrence évidente que $u_n \geq 4$ pour tout n.

De plus, $u_1 - u_0 = h(u_0) \leq 0$. Comme g est croissante, on conclut par récurrence simple que $(u_n)_n$ est une suite décroissante. Par le théorème des suites monotones, elle admet une limite (ou bien finie, ou bien $-\infty$). Comme elle est minorée par 4, sa limite est nécéssairement finie.

Sa limite étant un point fixe de g, c'est un point d'annulation de h et c'est alors nécessairement 4 par la question a.(ii).

(ii). Si $x \geq 4$ alors vu l'hypothèse sur f on a

$$f(x) = f(\frac{x^2+16}{2x}) = f(u_1) = f(\frac{u_1^2+16}{2u_1}) = f(u_2) = \cdots = f(u_n)$$

(on prouve ça par récurrence simple..) pour tout n. Comme f est continue et que (u_n) converge vers 4, on peut passer à la limite et on obtient

$$f(x) = f(4)$$

c. Soit $x \in]0,4[$. Alors, $u_1 \geq 4$ puisque $g \geq 4$. On réapplique tout ce qui précède à la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ où $v_n = u_{n+1}$ et on conclut de même que $f(x) = f(4)$.

d. On vient de prouver qu'une telle fonction est constante. Réciproquement, toutes les fonctions constantes vérifient cette égalité fonctionnelle...