PROBLÈMES D'ÉTENDAGE DE CHAUSSETTES

Réalisé en LaTeX

CAS D'UN FIL LINÉAIRE

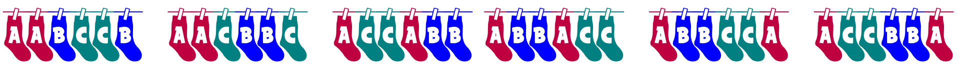
On dispose d'un stock de n paires de chaussettes toutes différentes et d'un fil d'étendage linéaire.

On pose $\Lambda(n,p)$ = Nombre de façons d'étendre n paires de chaussettes de sorte que les deux chaussettes de p de ces paires soient côte à côte (une telle paire sera appelée « appariée », ci-dessous), et $\Lambda(n) = \sum_{p=0}^{n} \Lambda(n,p)$.

Par exemple, pour $n = 5$, $p = 3$ une solution est :

Quelques exemples simples :

- $\Lambda(0,0) = 1$: Il n'y a qu'une seule façon de ne pas étendre de chaussettes (aucune paire n'est appariée).
- $\Lambda(1,0) = 0$: Impossible d'étendre une seule paire de chaussettes sans qu'elle soit appariée.
- $\Lambda(1,1) = 1$: Une seule façon d'étendre une paire de chaussettes, et elle est appariée.
- $p > n \Rightarrow \Lambda(n,p) = 0$: Il ne peut y avoir plus de paires appariées que de paires de chaussettes.
- $\Lambda(3,2) = 18$ (ci-dessous seules les solutions commençant par  sont représentées.)



Pour fabriquer une solution de type $(n+1,0)$, on peut procéder de 3 façons différentes :

1. Partir d'une solution de type $(n,0)$ et placer la nouvelle paire de telle sorte qu'elle ne soit pas appariée.
2. Partir d'une solution de type $(n,1)$ et casser une paire appariée.
3. Partir d'une solution de type $(n,2)$ et casser les deux paires appariées.

Nous appellerons ≪ Schéma Tenaille ≫, le schéma suivant :  où  est dite : en Tenaille.

Dans le cas 1 aucune des deux nouvelles chaussettes ne sera placée en Tenaille
Dans le cas 2 une et une seule des nouvelles chaussettes sera placée en Tenaille
Dans le cas 3 les deux nouvelles chaussettes seront placées en Tenaille

Ces trois cas sont donc exclusifs et complets, il suffit donc de compter le nombre de solutions pour chacun de ces cas et les additionner.

Remarque quand n paires de chaussettes sont placées sur le fil, elles définissent $2n+1$ intervalles (ne pas oublier les extrémités).

La description du tableau ci-dessous, permet de compter le nombre de cas pour chacune des configuration d'Origine.

N°	Origine	Description	Comptage
1	$\Lambda(n,0)$	Il faut choisir 2 intervalles parmi les $2n+1$ disponibles pour y placer les deux chaussettes	$\binom{2n+1}{2}$
2	$\Lambda(n,1)$	Il faut placer une chaussette en Tenaille dans la seule paire appariée (1 possibilité) et placer la deuxième chaussette dans n'importe quel autre intervalle parmi les $2n+1$ disponibles moins l'intervalle définie par la paire appariée	$2n$
3	$\Lambda(n,2)$	Il faut placer les 2 chaussettes en Tenaille dans les 2 paires appariées (1 possibilité)	1

In fine, on obtient la formule de récurrence valide[1] pour tout $n \geq 0$

$$\begin{array}{lcr} \Lambda(0,0) & = & 1 \\ \Lambda(n+1,0) & = & \binom{2n+1}{2} \cdot \Lambda(n,0) \\ & + & 2n \cdot \Lambda(n,1) \\ & + & 1 \cdot \Lambda(n,2) \end{array}$$

Pour fabriquer une solution de type $(n+1,p)$ pour $p>0$, on peut procéder de cinq façons différentes :

1. Partir d'une solution de type $(n,p-1)$ et placer la nouvelle paire de telle sorte qu'elle soit appariée, mais pas en Tenaille.
2. Partir d'une solution de type (n,p) et placer la nouvelle paire de telle sorte qu'elle ne soit pas appariée, sans casser de paires.
3. Partir d'une solution de type (n,p) et placer la nouvelle paire en Tenaille dans une paire appariée.

1. Avec la convention usuelle que si $n<p$ alors $\binom{n}{p}=0$.

4. Partir d'une solution de type $(n, p+1)$ et casser une et une seule paire appariée sans placer la nouvelle paire en Tenaille.
5. Partir d'une solution de type $(n, p+2)$ et casser deux paires appariées.

Nous devons montrer que ces cas sont disjoints :

Dans le cas 1, les nouvelles chaussettes sont appariées mais pas en Tenaille.
Dans le cas 2, les nouvelles chaussettes ne sont ni appariées ni en Tenaille.
Dans le cas 3, les nouvelles chaussettes sont appariées et en Tenaille.
Dans le cas 4, une et une seule des nouvelles chaussettes est en Tenaille.
Dans le cas 5, les deux nouvelles chaussettes sont en Tenaille et non appariées.

Ces cinq cas sont donc exclusifs et complets, il suffit donc de compter le nombre de solutions pour chacun de ces cas et les additionner.

La description du tableau ci-dessous, permet de compter le nombre de cas pour chacune des configuration d'Origine.

N°	Origine	Description	Comptage
1	$\Lambda(n, p-1)$	Il faut choisir 1 intervalle parmi les $2n+1$ disponibles moins les $(p-1)$ intervalles correspondant à des paires appariées.	$(2n-p+2)$
2	$\Lambda(n, p)$	Il faut placer les 2 nouvelle chaussettes dans 2 intervalles différents parmi $2n+1$ disponibles moins les p intervalles correspondant à des paires appariées	$\binom{2n-p+1}{2}$
3	$\Lambda(n, p)$	Il faut placer la nouvelle paire de chaussettes en Tenaille dans une paire appariée (p possibilité)	p
4	$\Lambda(n, p+1)$	Il faut placer une chaussette en Tenaille ($p+1$ possibilités) et l'autre dans un des intervalles parmi les $2n+1$ moins les $(p+1)$ intervalles correspondant à des paires appariées	$(p+1)(2n-p)$
5	$\Lambda(n, p+2)$	Il faut placer les 2 chaussettes en Tenaille dans 2 des $(p+2)$ paires appariées	$\binom{p+2}{2}$

In fine, on obtient la formule de récurrence pour tout n et tout p compris entre 1 et n

$$
\begin{array}{lcc}
\Lambda(0,0) & = & 1 \\
\Lambda(n,0) & = & \text{Formule précédente} \\
\Lambda(n+1,p) & = & (2n-p+2)\cdot\Lambda(n,p-1) \\
 & + & \binom{2n-p+1}{2}\cdot\Lambda(n,p) \\
 & + & p\cdot\Lambda(n,p) \\
 & + & (p+1)(2n-p)\cdot\Lambda(n,p+1) \\
 & + & \binom{p+2}{2}\cdot\Lambda(n,p+2)
\end{array}
$$

On peut noter que si on pose (arbitrairement) $\Lambda(n,-1) = 0$ on peut considérer que cette dernière formule est valide même pour $p = 0$.

Le calcul de $\Lambda(n)$ ne pose pas de problème, il suffit de placer les $2n$ chaussettes disponibles n'importe où, mais de diviser par 2 le résultat pour chacune des paires soit, finalement la formule :

$$\Lambda(n) = \frac{2n!}{2^n}.$$

$\Lambda(n,p)$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	2	30	864	39 480	2 631 600
1	0	1	2	36	984	43 800	2 868 480
2	0	0	2	18	504	22 200	1 447 200
3	0	0	0	6	144	6 600	439 200
4	0	0	0	0	24	1 200	86 400
5	0	0	0	0	0	120	10 800
6	0	0	0	0	0	0	720
$\Lambda(n)$	1	1	6	90	2 520	113 400	7 484 400

Certaines sous-suites (parfois à $n!$ près) sont plus ou moins bien connues :

Sous Suite	Condition	Formule	OEIS
$\Gamma(n,n)$	$n \geq 0$	$n!$	*A000142*
$\Gamma(n,n-1)$	$n > 0$	$n!\binom{n}{2}$	*A001804*
$\Gamma(n,n-2)$	$n > 1$	$n!\dfrac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}$	*A002817*
$\Gamma(n,0)$	$n \geq 0$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{\binom{n}{k}(n+k)!}{2^k}$	*A114938*
$\Gamma(n,0)$	$n \geq 0$	$n!\lvert B_n(-1)\rvert$	*A000806*
$\Gamma(n,1)$	$n \geq 0$	$\displaystyle n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\binom{n-1}{k}(2n-1-k)!}{2^{n-k-1}}$	*A006198*
$\Gamma(n,2)$	$n > 0$	$n!\lvert B'_{n-1}(-1)\rvert$	*A006199*
$\Gamma(n,3)$	$n > 2$	$n!A006200(n-2)$	*A006200*

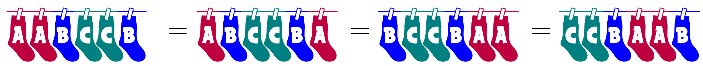
B_n étant le polynome de Bessel d'ordre n et B'_n sa dérivée.

Les six premiers résultats sont démontrables par récurrence, les deux derniers sont basés sur les quinze premières valeurs.

Cas d'un fil circulaire

Le problème est à peu près le même que dans le cas linéaire, sauf que les deux extrémités du fil sont identifiées, donc l'étendage n'est pas sensible aux rotations.

Nous représenterons un exemple d'étendage de la même façon que dans le cas linéaire, par exemple les écritures suivantes représentent **le même** étendage circulaire :

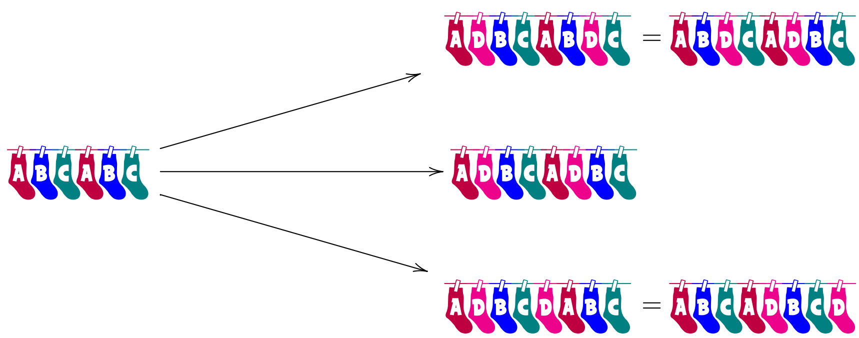


Par contre, le sens est significatif, par exemple ABBDADCC != ACCDADBB

On placera systématiquement un chaussette distinguée (notée A ci-dessous) à gauche dans nos représentation linéaires, elle représente « l'origine » du cercle.

Sur un fil circulaire, les configurations périodiques (sur le schéma $A\overline{X}A\overline{X}$ (où $\overline{X}$ représente une suite quelconque de chaussettes toutes différentes, donc il n'y a aucune paire appariée)) sont à traiter, spécifiquement, en effet ajouter une paire de chaussettes (notée B), sous la forme $A\overline{Y}B\overline{Z}A\overline{U}B\overline{V}$ donne le même résultat que $A\overline{U}B\overline{V}A\overline{Y}B\overline{Z}$. Il est immédiat qu'il existe $(n-1)!$ configurations périodiques.

Par exemple :



D'autre part les configurations non périodiques apparaissent sous deux formes, alors que les périodiques n'apparaissent que sous une seule forme :

$=$


$=$


est unique.

Pour fabriquer une solution de type $(n+1,0)$, on peut procéder de quatre façons différentes :

1. Partir d'une solution de type $(n,0)$ périodique et placer les deux chaussettes sans les apparier.
2. Partir d'une solution de type $(n,0)$ non périodique et placer les deux chaussettes sans les apparier.
3. Partir d'une solution de type $(n,1)$ et casser la paire appariée, et placer l'autre chaussette ailleurs.
4. Partir d'une solution de type $(n,2)$ et casser les deux paires appariées.

Ces quatre méthodes donnent des résultats disjoints :

Dans le cas 1, aucune des nouvelles chaussettes n'est en Tenaille, mais en enlevant la dernière paire on obtient une configuration périodique.
Dans le cas 2, aucune des nouvelles chaussettes n'est en Tenaille, mais en enlevant la dernière paire on obtient une configuration non périodique.
Dans le cas 3, une et une seule des nouvelles chaussettes est en Tenaille.
Dans le cas 4, les deux nouvelles chaussettes sont en Tenaille et non appariées.

N°	Origine	Description	Comptage
1	$(n-1)!$	En partant d'une configuration périodique, il faut choisir l'un des n^2 couples $(x,y) \in [1,n]^2$, si $x < y$, on place les deux nouvelles chaussettes dans la première période (aux places x et y), sinon on place une chaussette à la place x dans la première période et une chaussette à la place y dans la deuxième période.	n^2
2	$\Gamma(n,0)-(n-1)!$	Il faut placer les deux nouvelles chaussettes dans deux intervalles différents dans les configurations non périodiques	$\binom{2n}{2}$
3	$\Gamma(n,1)$	Il faut placer une chaussette en Tenaille (1 possibilité) et l'autre dans un des intervalles parmi les $2n$ moins l'intervalle correspondant à la paire appariée	$(2n-1)$
4	$\Gamma(n,2)$	Il faut placer les 2 chaussettes en Tenaille dans les 2 paires appariées	1

$$\begin{array}{rcl}\Gamma(n+1,0) & = & n^2\cdot(n-1)! \\ & + & \binom{2n}{2}\cdot(\Gamma(n,0)-(n-1)!) \\ & + & (2n-1)\cdot\Gamma(n,1) \\ & + & 1\cdot\Gamma(n,2)\end{array}$$

Pour $p = 1$

Pour fabriquer une solution de type $(n+1,1)$, on peut procéder de six façons différentes :

1. Partir d'une solution de type $(n,0)$ périodique et placer la nouvelle paire n'importe où.
2. Partir d'une solution de type $(n,0)$ non périodique et placer la nouvelle paire n'importe où.
3. Partir d'une solution de type $(n,1)$ et placer les deux chaussettes non côte à côte, sans casser de paire appariée.
4. Partir d'une solution de type $(n,1)$ et placer la nouvelle paire en Tenaille dans une paire appariée.
5. Partir d'une solution de type $(n,2)$ et casser une des deux paires appariéees, et placer l'autre chaussette ailleurs.
6. Partir d'une solution de type $(n,3)$ et casser deux paires appariées.

Ces six méthodes donnent des résultats disjoints :

Dans le cas 1 la nouvelle paire de chaussettes n'est pas en Tenaille, mais elle est appariée, mais en enlevant la dernière paire on obtient une configuration périodique
Dans le cas 2 la nouvelle paire de chaussettes n'est pas en Tenaille, mais elle est appariée, mais en enlevant la dernière paire on obtient une configuration non périodique.
Dans le cas 3 aucune des nouvelles chaussettes n'est en Tenaille ni appariée.
Dans le cas 4 la nouvelle paire de chaussette est en Tenaille et appariée
Dans le cas 5 une et une seule des nouvelles chaussettes est en Tenaille.
Dans le cas 6 les deux nouvelles chaussettes sont en Tenaille mais non appariées.

N°	Origine	Description	Comptage
1	$(n-1)!$	Il faut placer la nouvelle paire dans un intervalle de la première période	n
2	$\Gamma(n,0)-(n-1)!$	Il faut placer la nouvelle paire dans un quelconque des intervalles	$2n$
3	$\Gamma(n,1)$	Il faut placer les 2 nouvelles chaussettes hors de la paire appariée ($2n-1$ intervalles)	$\binom{2n-1}{2}$
4	$\Gamma(n,1)$	Il faut placer la nouvelle paire de chaussettes en Tenaille dans la paire appariée (1 possibilité)	1
5	$\Gamma(n,2)$	Il faut placer une chaussette en Tenaille (2 possibilités) et l'autre dans un des intervalles parmi les $2n-2$ possibles	$4(n-1)$
6	$\Gamma(n,3)$	Il faut placer les 2 chaussettes en Tenaille dans 2 des 3 paires appariées	$\binom{3}{2}$

$$
\begin{array}{rcr}
\Gamma(n+1,1) & = & n\cdot(n-1)! \\
& + & 2n\cdot(\Gamma(n,0)-(n-1)!) \\
& + & (\binom{2n-1}{2}+1)\cdot\Gamma(n,1) \\
& + & 4(n-1)\cdot\Gamma(n,2) \\
& + & 3\cdot\Gamma(n,3)
\end{array}
$$

Pour $p > 1$

Pour fabriquer une solution de type $(n+1,p)$, on peut procéder de cinq façons différentes :

1. Partir d'une solution de type $(n,p-1)$ et placer la nouvelle paire n'importe où sans casser de paire existante.
2. Partir d'une solution de type (n,p) et placer les deux chaussettes non côte à côte, sans casser de paire appariée.
3. Partir d'une solution de type (n,p) et placer la nouvelle paire en Tenaille dans une paire appariée.
4. Partir d'une solution de type $(n,p+1)$ et casser une des deux paires appariéees, et placer l'autre chaussette ailleurs.
5. Partir d'une solution de type $(n,p+2)$ et casser deux paires appariées.

Ces cinq méthodes donnent des configurations disjointes :

La nouvelle paire de chaussettes n'est pas en Tenaille, mais elle est appariée.
Aucune des nouvelles chaussettes n'est en Tenaille ni appariée.
La nouvelle paire de chaussette est en Tenaille et appariée
Une et une seule des nouvelles chaussettes est en Tenaille.
Les deux nouvelles chaussettes sont en Tenaille mais pas appariées.

N°	Origine	Description	Comptage
1	$\Gamma(n,p-1)$	Il faut choisir 1 intervalle parmi les $2n+1$ disponibles moins les $(p-1)$ intervalles correspondant à des paires appariées.	$(2n-(p-1))$
2	$\Gamma(n,p)$	Il faut placer les 2 nouvelle chaussettes dans 2 intervalles différents parmi $2n+1$ disponibles moins les p intervalles correspondant à des paires appariées	$\binom{2n-p}{2}$
3	$\Gamma(n,p)$	Il faut placer la nouvelle paire de chaussettes en Tenaille dans une paire appariée (p possibilité)	p
4	$\Gamma(n,p+1)$	Il faut placer une chaussette en Tenaille ($p+1$ possibilités) et l'autre dans un des intervalles parmi les $2n+1$ moins les $(p+1)$ intervalles correspondant à des paires appariées	$(p+1)(2n-(p+1))$
5	$\Gamma(n,p+2)$	Il faut placer les 2 chaussettes en Tenaille dans 2 des $(p+2)$ paires appariées	$\binom{p+2}{2}$

$$
\begin{array}{rcr}
\Gamma(n+1,p) & = & (2n-p+1)\cdot\Gamma(n,p-1) \\
& + & (\binom{2n-p}{2}+p)\cdot\Gamma(n,p) \\
& + & (p+1)(2n-p-1)\cdot\Gamma(n,p+1) \\
& + & \binom{p+2}{2}\cdot\Gamma(n,p+2)
\end{array}
$$

Pour calculer $\Gamma(n)$, pour $n > 0$, on peut placer la première chaussette n'importe où sur le cercle où elle servira d'origine (1 possibilité), on choisit la position des $(2n-1)$ chaussettes différentes de la première ($(2n-1)!$ possibilités), mais chaques éléments de chacune des $(n-1)$ paires différentes de la première peuvent être interchangés, donc on divise par 2 pour chacune des $(n-1)$ paires (donc par 2^{n-1}), mais chaque configuration non périodique est comptée deux fois, on divise par 2 le nombre total de configurations (y compris les périodiques), mais il faut ajouter la moitié des configurations périodiques (soit $(n-1)!$ configurations), soit :

$$\Gamma(n) = \frac{(2n-1)!}{2^n} + \frac{(n-1)!}{2}$$

Ce qui correspond à la suite de l'OEIS : *A137729*

$\Gamma(n,p)$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	1	5	96	3 528	199 620
1	0	1	0	6	120	4 320	236 880
2	0	0	1	3	72	2 460	131 400
3	0	0	0	2	24	840	44 400
4	0	0	0	0	6	180	9 900
5	0	0	0	0	0	24	1 440
6	0	0	0	0	0	0	120
$\Gamma(n)$	1	1	2	16	318	11 352	623 760

On peut noter que pour $n > 1$, la suite $\Gamma(n, n-1) = \dfrac{n!(n-2)}{2}$, et qu'elle correspond à la suite *A181967 de l'OEIS* (il serait intéressant de savoir pourquoi).

Cas général pour un fil linéaire

$\Lambda_k(n,p)$ = Nombre d'étendages de n k-ssettes tels que p soient appariées.

$I_k(n,p)$ = Nombre d'intervalles déterminés par n k-ssettes dont p sont appariés sans compter les intervalles à l'intérieur des k-ssettes appariées.

$P_i(j)$ = Nombre de façons de placer i objets dans j intervalles.

$K_k(p,i)$ = Nombre de façons de casser p k-ssettes avec i chaussettes sans en créer un nouveau.

$Q_k(p,i)$ = Nombre de façons de casser p k-ssettes avec i chaussettes.

$\Lambda_k(n,n) = n!$
$\Lambda_k(n,n-1) = n!\left(\binom{n+k-1}{k} - n\right)$
$\Lambda_k(n) = \dfrac{(kn)!}{(k!)^n}$

(en posant $L_k(n,-1) = 0$)

$$\begin{aligned}
\Lambda_k(n+1,p) \;=\; & \quad I_k(n,p-1)\cdot\Lambda_k(n,p-1) \\
+ & \quad p(k-1)\cdot\Lambda_k(n,p) \\
+ & \quad (P_k(I_k(n,p)) - I_k(n,p))\cdot\Lambda_k(n,p) \\
+ & \quad \sum_{i=1}^{k}\binom{p+i}{i}\left(\sum_{j=i}^{k} K_k(i,j)\cdot\binom{k(n-p-i+1)+p+i-j}{k-j}\right)\cdot\Lambda_k(n,p+i)
\end{aligned}$$

cas particulier : on ne peut pas casser une 2-ssettes avec 2 chaussettes
$I_k(n,p) = k(n-p)+p+1$
$P_i(j) = \dbinom{i+j-1}{i}$
$(i,j) \neq (1,k) \Rightarrow K_k(i,j) = Q_k(i,j)$
$K_k(1,k) = Q_k(1,k) - (k-1)$

Il n'y a plus qu'a calculer $K_k(i,j)$ (ou, plus naturel, $Q_k(i,j)$)

La récurrence est facile à établir :
$Q_k(1,q) = \dbinom{k+q-2}{q}$
Pour $i > 1$:
$Q_k(i,j) = \displaystyle\sum_{q=1}^{j-i+1} Q_k(1,q)\cdot Q_k(i-1,j-q)$

Cas des 3-ssetes pour un fil linéaire

En appliquant les formules précédentes :

$$
\begin{array}{rcr}
\Lambda_3(n+1,p) & = & (3n-2p+3)\cdot\Lambda_k(n,p-1) \\
 & + & 2p\cdot\Lambda_k(n,p) \\
 & + & \left(\binom{3n-2p+3}{3} - (3n-2p+1)\right)\cdot\Lambda_k(n,p) \\
 & + & \binom{p+1}{1}\left(K_3(1,1)\cdot\binom{3n-2p}{2} + K_3(1,2)\cdot\binom{3n-2p-1)}{1} + K_3(1,3)\right)\cdot\Lambda_k(n,p+1) \\
 & + & \binom{p+2}{2}\left(K_3(2,2)\cdot\binom{3n-2p-3}{1} + K_3(2,3)\right)\cdot\Lambda_k(n,p+2) \\
 & + & \binom{p+3}{3}\left(K_k(3,3)\right)\cdot\Lambda_k(n,p+3)
\end{array}
$$

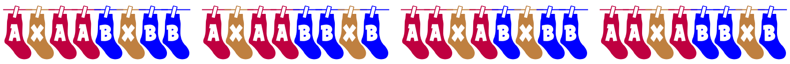
$K_3(1,1) = 2$

$K_3(1,2) = 3$

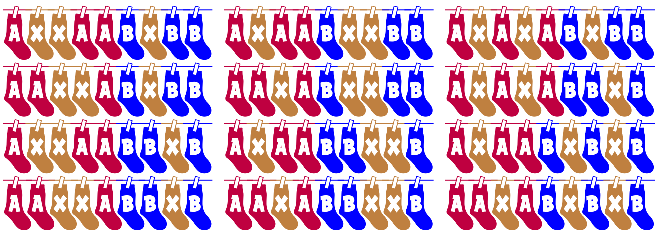
$K_3(1,3) = 2$

$Q_3(1,3) = 4$

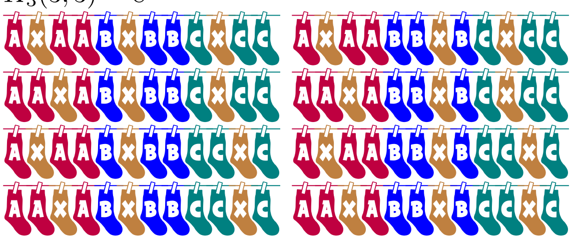
$K_3(2,2) = 4$



$K_3(2,3) = 12$



$K_3(3,3) = 8$



$\Lambda_3(n,p)$	0	1	2	3	4	5	6
-1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	14	1 314	308 664	145 895 280	122 047 088 400
1	0	1	4	318	55 104	20 614 200	14 253 317 280
2	0	0	2	42	5 424	1 569 600	884 631 600
3	0	0	0	6	384	85 200	38 692 800
4	0	0	0	0	24	3 600	1 321 200
5	0	0	0	0	0	120	36 000
6	0	0	0	0	0	0	720
$\Lambda_3(n)$	1	1	20	1 680	369 600	168 168 000	137 225 088 000