Concours Centrale - Supélec 1996

Épreuve : MATHÉMATIQUES I Option TA

Pour tout entier $k \geq 2$ et tout réel x, on pose

$$f_k(x) = x^k + x + 1,$$

et on se propose d'étudier certaines propriétés des fonctions ainsi définies. On note C_k la courbe représentant f_k dans un repère orthonormal.

Partie I - Étude de f_2 et de f_3

I.1) Étudier f_2. On remarquera que C_2 est une parabole dont on précisera l'axe et le sommet.

I.2) Étudier f_3.

I.3) Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f_3(x) - f_2(x)$? En déduire les points d'intersection de C_2 et C_3 (dont on précisera les coordonnées) et la position relative des deux courbes.

I.4) Tracer, sur une même figure, C_2 et C_3.

Partie II - Étude de f_k lorsque k est pair ($k = 2n$, $n \geq 1$)

II.1) Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f_{2n+2}(x) - f_{2n}(x)$? En déduire que C_{2n} et C_{2n+2} admettent trois points d'intersection (dont on précisera les coordonnées). Quelle est la position relative des deux courbes ?

II.2) Étudier la fonction f_{2n}. Montrer qu'elle admet un minimum m_n atteint pour la valeur α_n de x, où

$$\alpha_n = -\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}$$

$$m_n = \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}} - \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}} + 1.$$

II.3) Montrer que $-1 < \alpha_n < 0$ et $m_n > 0$.

II.4) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} m_n$.

II.5) On se propose d'étudier la monotonie de la suite (α_n). À cet effet on définit sur l'intervalle $[2, +\infty[$ la fonction auxiliaire φ par

$$\varphi(u) = -\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{u-1}} = -e^{-\frac{\ln u}{u-1}}.$$

a) Montrer que $\varphi'(u)$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{\varphi(u)\psi(u)}{(u-1)^2}$, où ψ est une fonction que l'on explicitera.

b) Déterminer le signe de $\psi'(u)$, puis celui de $\varphi'(u)$.

c) Conclure quant à la monotonie de la suite (α_n).

II.6) Tracer, sur une même figure, C_{2n} et C_{2n+2}. On précisera notamment la tangente à chacune des deux courbes en son point d'abscisse 0.

Partie III - Étude de f_k lorsque k est impair ($k = 2n+1$, $n \geq 1$)

III.1) Montrer que C_{2n+1} admet le point de coordonnées $(0, 1)$ comme centre de symétrie.

III.2) Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f_{2n+3}(x) - f_{2n+1}(x)$? En déduire que C_{2n+1} et C_{2n+3} admettent trois points d'intersection (dont on précisera les coordonnées). Quelle est la position relative des deux courbes ?

III.3) Étudier la fonction f_{2n+1}. Montrer qu'elle s'annule pour une valeur a_n, et une seule, de x et que a_n vérifie

$$-1 < a_n < -\frac{1}{2}.$$

MATHÉMATIQUES I

III.4) Écrire l'équation de la tangente T à C_{2n+1} au point I d'abscisse 0. Étudier la position de C_{2n+1} par rapport à T. Qu'en déduit-on pour le point I ?

III.5) Tracer, sur une même figure, C_{2n+1} et C_{2n+3}.

Partie IV - Étude de la suite (a_n) et de suites et séries qui lui sont liées

IV.1) Montrer que $f_{2n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^{2n+1} - a_{n+1}^{2n+3}$.

En déduire que $f_{2n+1}(a_{n+1}) < 0$ puis que la suite (a_n) est décroissante.

IV.2) Montrer que la suite (a_n) converge vers -1.

IV.3) Montrer que les suites (a_n^{2n}) et (a_n^n) convergent vers 0.

IV.4) Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} f_{2n+1}\left(-1+\frac{1}{n}\right)$. En déduire l'existence d'un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ -1+\frac{1}{n} < a_n .$$

IV.5) Montrer que les trois séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (1+a_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{2n}$, et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|^n$ sont divergentes.

IV.6) Déterminer les rayons de convergence des deux séries entières

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{2n} x^n \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^n x^n .$$

••• FIN •••