

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----------|
| Partie I – Propos préliminaires | 1 |
| Partie II – Introduction | 6 |

CHAPITRE 1

INTRODUCTION MOTIVÉE PAGE 13

| | |
|--|----|
| 1.1 Entrées en la matière | 13 |
| 1.1.1 Qu'est-ce que quoi?!..... | 14 |
| 1.1.2 Motivations historiques et philosophiques..... | 14 |
| 1.1.3 La place de l'apprentissage | 14 |
| 1.1.4 La place de l'enseignement | 16 |
| 1.1.5 La place de la recherche | 16 |
| 1.2 Débuts de fondations | 18 |
| 1.2.1 Structures et fondations | 18 |
| 1.2.2 Logiques mathématiques et axiomatiques | 18 |
| 1.2.3 Introduction à la théorie des ensembles | 18 |
| 1.2.4 Introduction rudimentaire à la théorie des catégories..... | 25 |
| 1.2.5 (Petit) Panorama..... | 33 |

CHAPITRE 2

LE LANGAGE MATHÉMATIQUE PAGE 41

| | |
|---|----|
| 2.1 La notion de langage | 41 |
| 2.1.1 Présentation (linguistique, informatique, mathématique) | 41 |
| 2.1.2 Évolutions du langage mathématique? | 41 |
| 2.2 Aspects pratiques | 43 |
| 2.2.1 Le raisonnement et les raisonnements..... | 43 |

| | | |
|-------|---|----|
| 2.2.2 | La notion de méthode | 43 |
| 2.2.3 | L'esprit d'un problème..... | 43 |
| 2.2.4 | Rigueur et rédaction – compilation de conseils et directives..... | 43 |

CHAPITRE 3

LA NOTION D'ESPACE PAGE 47

| | | |
|-------|--|----|
| 3.1 | Le cadre intuitif : la géométrie | 50 |
| 3.1.1 | Postulats d'Euclide | 50 |
| 3.1.2 | Au-delà de la géométrie euclidienne, premiers pas..... | 51 |
| 3.2 | Au-delà de l'intuition : (quelques) espaces abstraits..... | 51 |
| 3.2.1 | Espace métrique..... | 51 |
| 3.2.2 | Espace topologique..... | 52 |
| 3.2.3 | Groupe..... | 55 |
| 3.2.4 | Anneau, Corps..... | 63 |
| 3.2.5 | Espace vectoriel | 63 |
| 3.2.6 | Espace de probabilité..... | 63 |
| 3.3 | Éléments caractéristiques d'espaces | 64 |
| 3.3.1 | Base et dimension | 64 |
| 3.3.2 | Volume et mesure? | 64 |
| 3.3.3 | Symétries?..... | 64 |
| 3.3.4 | Trous?..... | 64 |

CHAPITRE 4

ACTIONS SUR L'ESPACE PAGE 65

| | | |
|-------|---|----|
| 4.1 | Objets géométriques et "algébriques"..... | 66 |
| 4.1.1 | Géométrie (élémentaire) dans l'espace | 66 |
| 4.1.2 | Trigonométrie | 66 |
| 4.1.3 | Polynômes..... | 66 |
| 4.1.4 | Équations algébriques dans un repère orthonormé | 67 |
| 4.1.5 | Propriétés géométriques (longueur, orthogonalité) | 67 |
| 4.1.6 | Représentations géométriques (généralités : vecteurs, droites, plans) | 67 |
| 4.1.7 | Nombres complexes (et construction des nombres) | 67 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 4.1.8 | Représentation géométrique d'un nombre complexe | 67 |
| 4.2 | Objets analytiques | 67 |
| 4.2.1 | Suites | 67 |
| 4.2.2 | Fonctions usuelles | 79 |
| 4.2.3 | Limites | 79 |
| 4.2.4 | Convergence, divergence | 79 |
| 4.2.5 | Dérivation | 79 |
| 4.2.6 | Intégration | 79 |
| 4.2.7 | Équations différentielles | 102 |
| 4.2.8 | Convexité et concavité | 102 |
| 4.2.9 | Approximation et optimisation | 102 |
| 4.3 | Objets probabilistes | 102 |
| 4.3.1 | Généralités, probabilités conditionnelles et indépendance | 102 |
| 4.3.2 | Variables aléatoires réelles dans un univers fini | 102 |
| 4.3.3 | Loi des grands nombres | 102 |
| 4.4 | Objets arithmétiques | 102 |
| 4.4.1 | Divisibilité dans \mathbb{Z} | 102 |
| 4.4.2 | Congruences | 102 |
| 4.4.3 | Quelques éléments d'arithmétique élémentaire | 102 |
| 4.4.4 | Combinatoire et dénombrement | 102 |
| 4.5 | Introduction aux matrices (sans l'algèbre linéaire) | 102 |
| 4.5.1 | Généralités | 104 |
| 4.5.2 | Quelques éléments de calcul matriciel | 119 |
| 4.5.3 | Suites de matrices et marches aléatoires | 134 |
| 4.6 | Introduction à la théorie des graphes | 134 |

Partie III – Études et développements – Première et Terminale

136

CHAPITRE 5

GÉOMÉTRIE

PAGE 139

| | | |
|-----|---|-----|
| 5.1 | Identités trigonométriques (approfondissements) | 140 |
| 5.2 | Volume d'une n -sphère | 140 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.3 | Barycentre..... | 140 |
| 5.3.1 | Fonctions scalaires et vectorielles de Leibniz | 140 |
| 5.3.2 | Suites barypolygonales | 140 |
| 5.4 | Intersection(s) : courbes paramétrées et tangentes paramétrées | 140 |
| 5.5 | Coniques | 140 |
| 5.6 | Triangulation et optimalité | 140 |
| 5.7 | Empilements de sphères..... | 140 |
| 5.8 | Dans l'espace tout entier | 140 |
| 5.9 | Courte introduction à la géométrie projective..... | 140 |

CHAPITRE 6

ALGÈBRE PAGE 141

| | | |
|--------|--|-----|
| 6.1 | Racines nièmes de l'unité (complexes)..... | 142 |
| 6.2 | Racines nièmes de l'unité (matrices)..... | 142 |
| 6.3 | Racines de polynômes : calcul (degré 3 et 4)..... | 142 |
| 6.4 | Théorème fondamental de l'algèbre | 142 |
| 6.5 | Factorisations | 142 |
| 6.6 | Relations de Viète..... | 142 |
| 6.7 | Théorème de Sturm | 142 |
| 6.8 | Classes de polynômes | 142 |
| 6.8.1 | Polynômes de Bernstein | 142 |
| 6.8.2 | Polynômes de Chebychev..... | 142 |
| 6.9 | Fractions rationnelles..... | 142 |
| 6.10 | Au-delà des nombres complexes : quaternions, octonions, sédénions..... | 142 |
| 6.11 | Irrationalité..... | 142 |
| 6.11.1 | Irrationalité de π | 142 |
| 6.11.2 | Irrationalité de $\exp(1)$ | 142 |
| 6.11.3 | Irrationalité des racines nièmes de l'unité | 142 |
| 6.11.4 | Irrationalité de $\zeta(3)$ | 142 |
| 6.12 | Formule BCH (découverte) | 142 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 7.1 | TVI (approfondissements) | 148 |
| 7.2 | TAF et Rolle (approfondissements) | 148 |
| 7.3 | Théorème des bornes atteintes | 148 |
| 7.4 | Exemples de suites | 148 |
| | 7.4.1 Suites adjacentes | 148 |
| | 7.4.2 Suites de Cauchy | 148 |
| | 7.4.3 Suites récurrentes du second ordre | 148 |
| | 7.4.4 Suite audioactive de Conway | 148 |
| 7.5 | Exemples de fonctions | 148 |
| | 7.5.1 Fonction de Weierstrass | 148 |
| | 7.5.2 Fonction gamma et G de Barnes | 148 |
| | 7.5.3 Fonction bêta | 148 |
| | 7.5.4 Fonction zêta | 148 |
| | 7.5.5 Fonction elliptique | 152 |
| 7.6 | Séries, calculs | 155 |
| | 7.6.1 Lemme de Grönwall | 155 |
| | 7.6.2 Calculs de $\zeta(2)$ | 155 |
| | 7.6.3 Introduction aux séries de Fourier | 155 |
| | 7.6.4 Des séries divergentes? | 155 |
| 7.7 | Tables de dérivées (approfondissements) | 156 |
| 7.8 | Calcul intégral | 156 |
| | 7.8.1 Lemme de Grönwall | 156 |
| | 7.8.2 Young et Hölder | 156 |
| | 7.8.3 Wallis | 159 |
| 7.9 | Équations différentielles | 162 |
| | 7.9.1 Lemme de Grönwall | 162 |
| | 7.9.2 Équations différentielles à variables séparables | 162 |
| | 7.9.3 Équation différentielle d'Euler | 162 |
| | 7.9.4 Équation différentielle de Bernoulli | 162 |
| | 7.9.5 Équation différentielle de Riccati | 162 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 7.9.6 | Équation différentielle de Lagrange et Clairaut..... | 162 |
| 7.9.7 | Équations de Legendre et de Bessel..... | 162 |
| 7.9.8 | Système de Lotka-Volterra..... | 162 |
| 7.9.9 | Pendule sans et avec frottement..... | 162 |
| 7.9.10 | Un peu d'astronomie..... | 162 |
| 7.9.11 | Introduction à une équation aux dérivées partielles hyper-classique : l'équation de la chaleur..... | 162 |
| 7.10 | Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles simples et idées..... | 162 |
| 7.11 | Que la force soit avec f | 162 |
| 7.12 | Dérivée discrète..... | 162 |
| 7.13 | Logarithme discret..... | 162 |
| 7.14 | Abel, Cesàro, Silverman-Toeplitz..... | 164 |
| 7.15 | Fubini et les sommes; théorème de sommation par paquet..... | 164 |
| 7.16 | Stabilité géométrique..... | 164 |

CHAPITRE 8

PROBABILITÉS _____ PAGE 165

| | | |
|-----|--------------------------------------|-----|
| 8.1 | Vecteurs et matrices aléatoires..... | 165 |
| 8.2 | Marches aléatoires..... | 165 |
| 8.3 | Fonction d'onde..... | 165 |

CHAPITRE 9

ARITHMÉTIQUE _____ PAGE 167

| | | |
|-----|--|-----|
| 9.1 | Crible des nombres premiers..... | 168 |
| 9.2 | Fonctions de comptage..... | 168 |
| 9.3 | Triplets pythagoriciens..... | 168 |
| 9.4 | Grand théorème de Fermat, $n = 3$ | 168 |
| 9.5 | Polynôme de Polya et théorème de Moreau-Jablonski..... | 168 |
| 9.6 | Introduction au théorème des nombres premiers..... | 168 |
| 9.7 | Nombres pointus..... | 168 |
| 9.8 | Les premiers sont les derniers..... | 168 |

| | | |
|------|--|-----|
| 10.1 | Vers les récurrences faibles, fortes et au-delà..... | 169 |
| 10.2 | <i>Pigeonhole principle</i> | 170 |
| 10.3 | Introduction à la théorie des nœuds..... | 170 |
| 10.4 | Introduction aux équations fonctionnelles..... | 170 |
| 10.5 | Introduction aux spécificités de l'analyse complexe..... | 170 |
| 10.6 | Introduction à la dynamique holomorphe..... | 170 |

Partie IV – Études et développements – Licence 1