

Ex 3.

1) Un polynôme P de degré 1 est une fonction affine; sa courbe représentative C_P est une droite. Puisque les sommets d'un triangle équilatéral ne sont pas alignés, ils ne peuvent pas appartenir à C_P .

2) a) On a

$$AB^2 = 2^2 + 0^2 = 4$$

$$BC^2 = 1^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4$$

$$CA^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4$$

et donc $AB = BC = CA$: ABC est un triangle équilatéral. Par ailleurs, on a

$$OA^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$OB^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$OC^2 = 0^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

Ainsi $OA = OB = OC$: le point O est bien le centre du ABC .

b) On vérifie que $Q(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $Q(-1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $Q(0) = -2\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ainsi $A, B, C \in C_Q$.

2) On pose $S(x) = x(x^2 - 1)$. Alors

$$S(1) = S(-1) = S(0) = 0, \text{ et donc}$$

$$P_1(1) = Q(1) + S(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$P_1(-1) = Q(-1) + S(-1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$P_1(0) = Q(0) + S(0) = -i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On a donc $A, B, C \in \mathbb{C}\mathbb{Q}$.

2d) \mathbb{Q} est de degré 2 et $A, B, C \in \mathbb{C}\mathbb{Q}$.

Pour tout $d \geq 1$, le polynôme

$$P_d : x \mapsto Q(x) + x^d(x^2 - 1)$$

est de degré $d+2$ et vérifie

$$P_d(1) = Q(1)$$

$$P_d(-1) = Q(-1)$$

$$P_d(0) = d(0).$$

Ainsi $A, B, C \in \mathbb{C}_{P_d}$.

3a) On note R_θ la matrice de rotation

d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\overrightarrow{OB} = R_{\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_A \\ x_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = R_{\pi} \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_A \\ -y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = R_{\frac{3\pi}{2}} \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_A \\ -x_A \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{cases} x_B = -y_A \\ y_B = x_A \end{cases}, \quad \begin{cases} x_C = -x_A \\ y_C = -y_A \end{cases}, \quad \begin{cases} x_D = y_A \\ y_D = -x_A \end{cases}.$$

Supposons par l'absurde que $x_A = 0$.

Alors $x_A = -x_A$ et donc

$$\begin{aligned} y_A &= P(x_A) && \text{car } A \in C_P \\ &= P(-x_A) && \text{car } x_A = -x_A = 0 \\ &= P(x_C) && \text{car } x_C = -x_A \\ &= y_C && \text{car } C \in C_P \\ &= -y_A && \text{car } y_C = -y_A \end{aligned}$$

et donc $y_A = -y_A$, d'où $y_A = 0$.

Or cela entraîne que $A(0;0)$, et donc

$B(0;0)$, $C(0;0)$ et $D(0;0)$. $ABCD$ ne serait plus un carré !

Ainsi $x_A \neq 0$.

On montre de même que $y_A \neq 0$:

par l'absurde, si $y_A = 0$, on a

$$\begin{aligned} -x_A &= y_D = P(x_D) = P(y_A) = P(-y_A) = P(x_B) \\ &= y_B \end{aligned}$$

d'où $-x_A = x_A$, d'où $x_A = 0$, etc. absurde.

Ainsi $x_A \neq 0$, $y_A \neq 0$, et donc $-x_A \neq 0$ et $-y_A \neq 0$, ce qui fait voir que les abscisses de A , B , C et D sont toutes non nulles. Montrons enfin qu'elles sont distinctes.

On procède de nouveau par l'absurde.

Supposons $x_A = y_A$. Alors

$$\begin{aligned} y_A &= P(x_A) && \text{car } A \in \mathcal{C}_P \\ &= P(y_A) && \text{car } x_A = y_A \\ &= P(x_D) && \text{car } x_D = y_A \\ &= y_D && \text{car } D \in \mathcal{C}_P \\ &= -x_A && \text{car } y_D = -x_A \\ &= -y_A && \text{car } x_A = y_A \end{aligned}$$

et donc $y_A = 0$, ce qui est absurde.

On montre de même que si $x_A = -y_A$, alors $y_A = 0$, ce qui est absurde. Ainsi x_A , $-y_A$, $-x_A$ et y_A sont tous distincts, ce qui revient à dire que x_A , \mathcal{C}_P , x_C et x_D sont tous distincts.

36) Puisque $y_A \neq 0$ et que $P(x_A) = y_A$, P n'est pas le polynôme nul.
 Par ailleurs, quitte à permuter les noms des sommets de manière cyclique, on peut supposer $x_A > 0$ et $y_A > 0$.

Deux possibilités s'offrent alors à nous :

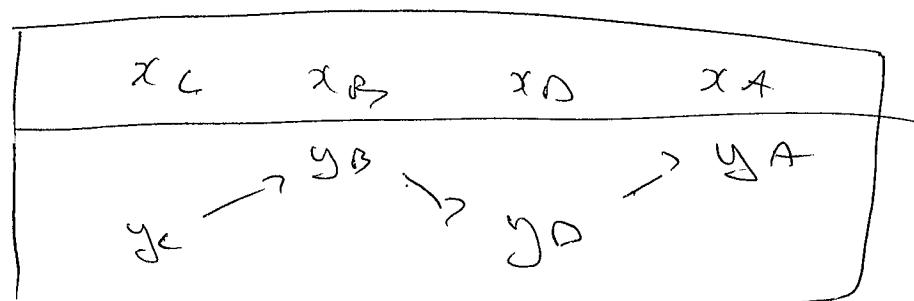
i) $x_A > y_A$, alors on a

$$-x_A < -y_A < y_A < x_A$$

d'où $x_C < x_B < x_D < x_A$

et $y_D < y_C < y_A < y_B$

d'où le tableau schématique.



P ne peut alors pas être de degré 1 (droite) ni de degré 2 (parabole) car P n'est pas strictement monotone, et ne possède pas non plus deux intervalles de monotonie.

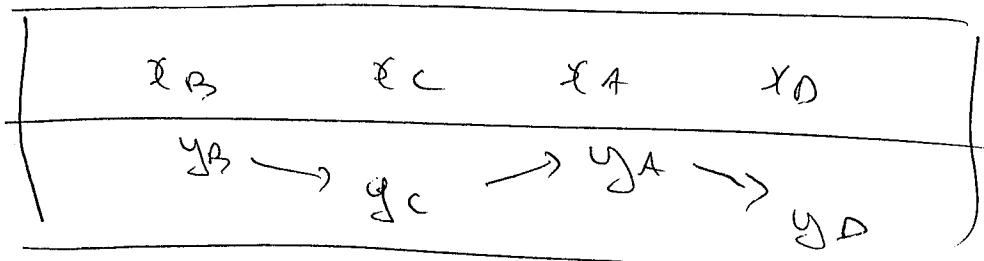
ii) De manière analogue, si $y_A > x_A$, alors

$$-y_A < -x_A < x_A < y_A$$

d'où $x_B < x_C < x_A < x_D$

et $y_C < y_D < y_B < y_A$

obtenu le tableau schématique



Qui montre de même que C_P n'est ni une droite, ni une parabole. Puisque P est un polygone son degré est donc supérieur ou égal à 3.

4a) On a $P(x_A) = y_A$ et $P(-x_A) = -y_A$,

d'où $0 = P(x_A) + P(-x_A)$

$$= x_A^3 + ax_A^2 + bx_A + c$$

$$-x_A^3 + ax_A^2 - bx_A + c$$

d'où $0 = ax_A^2 + c$.

On montre de même que

$$0 = ax_B^2 + c$$

Par différence, on obtient

$$\begin{aligned}0 &= a(x_A^2 - x_B^2) \\&= a(x_A - x_B)(x_A + x_B) \\&= a(x_A - x_B)(x_A - y_A) \quad \text{car } x_B = -y_A \\&= a(x_A - x_B)(x_A - x_D) \quad \text{car } x_D = y_A\end{aligned}$$

Or puisque $x_A \neq x_B$ et $x_A \neq x_D$, on peut diviser par $(x_A - x_B)(x_A - x_D)$ pour obtenir

$$0 = a.$$

En reportant dans $ax_A^2 + c = 0$, on trouve $c = 0$.

4b) On a

$$P(P(x_A)) = P(y_A) = P(x_D) = y_D = -x_A$$

$$P(P(x_B)) = P(y_B) = P(x_A) = y_A = -x_B$$

$$P(P(x_C)) = P(y_C) = P(x_B) = y_B = -x_C$$

$$P(P(x_D)) = P(y_D) = P(x_C) = y_C = -x_D$$

Ainsi (chaque de ces assertions vériфиé)
 $P(P(x)) = -x$, ce qui est équivalent
à $P(P(x)) + x = 0$.

4(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
 P(P(x)) + x &= (P(x))^3 + bP(x) + x \\
 &= (x^8 + bx^6)^3 + b(x^8 + bx^6) + x \\
 &= x^8 + 3x^6bx + 3x^8b^2x^2 + b^3x^3 \\
 &\quad + bx^3 + b^2x + x \\
 &= x(x^8 + 3bx^6 + 3b^2x^4 + b(b^2+1)x^2 \\
 &\quad + b^3 + 1)
 \end{aligned}$$

Or nous savons que $P(P(x)) + x$ admet pour racines x_A, x_B, x_C, x_D . On en déduit par exemple,

$$\begin{aligned}
 0 &= P(P(x_A)) + x_A \\
 &= x_A(x_A^8 + 3bx_A^6 + 3b^2x_A^4 + b(b^2+1)x_A^2 + b^3 + 1) \\
 &= x_A((x_A^2)^4 + 3b(x_A^2)^3 + 3b^2(x_A^2)^2 + b(b^2+1)x_A^2 + b^3 + 1).
 \end{aligned}$$

Puisque $x_A \neq 0$, on peut diviser cette égalité par x_A , ce qui montre que x_A^2 est racine de \mathbb{Q} .

De même, x_B^2, x_C^2, x_D^2 sont racines de \mathbb{Q} .

Puisque $x_A = -x_C$, et que $x_B = -x_D$, et que les nombres x_A, x_B, x_C et x_D sont distincts, on sait que $x_A^2 \neq x_B^2$: on a donc trouvées deux racines distinctes.

4d) Si $b > 0$, alors Q est un polynôme dont les coefficients sont positifs.

Or nous avons vu que ce polynôme admet des racines strictement positives.

Si α est une telle racine, on a donc

$$0 \leq \alpha^4 + 1 \leq Q(\alpha) \quad \text{puisque } b > 0, \alpha > 0 \\ = 0 \quad \text{puisque } Q(\alpha) = 0$$

Ainsi $0 < 0$, ce qui est absurde.

On en déduit que $b < 0$.

4e) On développe Q :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - \alpha)^2(x - \beta)^2 \\ &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x^2 - 2\beta x + \beta^2) \\ &= x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 \\ &\quad + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x^2 \\ &\quad - 2(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta)x + \alpha^2\beta^2 \end{aligned}$$

En comparant les coefficients, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} 3b = -2(\alpha + \beta) \\ 3b^2 = \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 \\ -2\alpha\beta(\alpha + \beta) = b(b^2 + 1) \\ b^2 + 1 = \alpha^2\beta^2 \end{array} \right.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} b(b^2+1) &= \alpha\beta(-2(\alpha+\beta)) \\ &= 3b\alpha\beta \end{aligned}$$

d'où $\frac{b^2+1}{3} = \alpha\beta$ puisque $b \neq 0$.

ainsi $\left(\frac{b^2+1}{3}\right)^2 = \alpha^2\beta^2$
 $= b^2+1$

d'où $b^2+1 = 9$

d'où $b^2 = 8$

d'où $b = \pm \sqrt{8}$ or $b < 0$, et donc
 $b = -\sqrt{8}$

On en déduit

$$\begin{cases} \alpha+\beta = \frac{3}{2}\sqrt{8} = 3\sqrt{2} \\ \alpha^2\beta^2 = 9 \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} \alpha+\beta = 3\sqrt{2} \\ \alpha\beta = ? \end{cases}$ puisque $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

On en déduit $\alpha(3\sqrt{2}-\alpha) = 3$, d'où

en résolvant l'équation de degré 2 obtenue:

$$\alpha = \sqrt{6} \left(\frac{\sqrt{3} \pm 1}{2} \right) \text{ or } \text{puisque } 0 < \alpha < \beta, \text{ on}$$

$$\text{en déduisant enfin que } \alpha = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$\text{et } \beta = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Sa) les nombres α et β sont positifs ; ils admettent donc des racines carrees. On pose $x_A = -\sqrt{\alpha}$ et $y_A = \sqrt{\beta}$, puis on construit le cercle de coordonnées

$$A(x_A; y_A), \quad B(-y_A; x_A), \quad C(-x_A; -y_A), \quad D(y_A; -x_A).$$

$$\text{On pose enfin } P(x) = x^3 - \sqrt{8}x.$$

On prétend que $A, B, C, D \in \mathcal{C}_P$.

En effet, on a

$$\alpha^2 = \left(\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2} \right)^2 = 6 - 3\sqrt{3}$$

$$\beta^2 = \left(\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{2} \right)^2 = 6 + 3\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } \alpha^2 + 8 = 14 - 3\sqrt{3}, \quad \beta^2 + 8 = 14 + 3\sqrt{3}$$

Par ailleurs, on a

$$2\sqrt{8}\alpha = \underbrace{2\sqrt{8}\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}_{2} = 12 - 4\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{8}\beta = \underbrace{2\sqrt{8}\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}_{2} = 12 + 4\sqrt{3}$$

$$\text{Ainsi } \alpha^2 + 8 - 2\sqrt{8}\alpha = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{et } \beta^2 + 8 - 2\sqrt{8}\beta = 2 - \sqrt{3}$$

D'où enfin

$$\alpha(\alpha^2 + 8 - 2\sqrt{8}\alpha) = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$= \beta,$$

$$\text{et } \beta(\beta^2 + 8 - 2\sqrt{8}\beta) = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$= \alpha.$$

$$\text{Or } [\sqrt{\alpha}(\alpha - \sqrt{8})]^2 = \alpha(\alpha^2 + 8 - 2\sqrt{8}\alpha)$$

$$\text{et } [\sqrt{\beta}(\beta - \sqrt{8})]^2 = \beta(\beta^2 + 8 - 2\sqrt{8}\beta).$$

On a donc montré

$$[\sqrt{\alpha}(\alpha - \sqrt{8})]^2 = \beta$$

$$\text{et } [\sqrt{\beta}(\beta - \sqrt{8})]^2 = \alpha.$$

On vérifie que $\alpha - \sqrt{8} < 0$ et $\beta - \sqrt{8} > 0$, d'où

$$-\sqrt{\alpha}(\alpha - \sqrt{8}) = \sqrt{\beta},$$

$$\text{et } \sqrt{\beta}(\beta - \sqrt{8}) = \sqrt{\alpha}$$

On a donc

$$P(x_A) = P(-\sqrt{\alpha})$$

$$= -\sqrt{\alpha}(\alpha - \sqrt{\beta})$$

$$= \sqrt{\beta}$$

$$= y_A; \quad \text{d'où } (x_A; y_A) \in C_P$$

$$P(y_A) = P(\sqrt{\beta})$$

$$= \sqrt{\beta}(\beta - \sqrt{\alpha})$$

$$= \sqrt{\alpha}$$

$$= -x_A \quad \text{d'où } (y_A; -x_A) \in C_P.$$

et puisque P est impair,

$$P(-x_A) = -y_A \quad \text{et} \quad P(-y_A) = x_A$$

$$\text{d'où } (-x_A; -y_A) \in C_P \text{ et } (-y_A; x_A) \in C_P.$$

5 b) On prend P le polynôme de degré 4

trouvé au a) et on note

$$Q(x) = (x - x_A)(x - y_A)(x + x_A)(x + y_A).$$

Alors Q est de degré 4 et s'annule sur

$x_A, y_A, -x_A$ et $-y_A$, et donc pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $P + x^n Q$ est un polynôme de

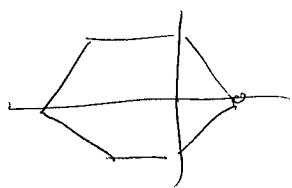
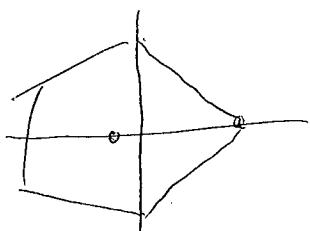
degré 4+n dont la courbe représentative

passe par A, B, C et D . Réponse : tout d'abord

6.a) Quand à renommer les points, on peut appeler M_1 le point d'abscisse minimale. Alors les points du polygone appartiennent à \mathcal{C}_p si et seulement si les points de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses appartiennent à \mathcal{C}_{-p} . On peut donc se ramener à la situation où l'ordonnée de M_1 est négative.

6.b) Si deux abscisses coïncident, disons $x_i = x_j$, alors $P(x_i) = P(x_j)$, et donc $y_i = y_j$, ce qui contredit le fait que les points sont distincts.

Si une des ordonnées est nulle, disons $y_j = 0$, alors les points M_{j-1} et M_{j+1} (où les indices sont pris modulo k) se trouvent sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées puisqu'ils se trouvent sur une perpendiculaire à la droite passant par M_i et par le centre, à savoir l'axe des abscisses.



Ceci provient du fait que le triangle M_{j-1}, M_j, M_{j+1} est isocèle.

Or les abscisses de M_{i-1} et M_{i+1} seraient donc égales, ce qui est absurde.

Gc) Considérons d'abord que si les x_i étaient tous strictement positifs, tous les points du polygone seraient à droite de l'axe des ordonnées, ce qui est absurde puisque le polygone est centré en O. Il existe donc un x_i strictement négatif, et puisque $x_i < x_1$, on en déduit que $x_1 < 0$. On rappelle par ailleurs que $y_i > 0$.
 Posons $R^2 = x_1^2 + y_1^2$. Alors
 $\left(\frac{x_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{R}\right)^2 = 1$, et il existe donc $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $\left|\frac{x_1}{R}\right| = \cos \theta$ et $\left|\frac{y_1}{R}\right| = \sin \theta$.
 Puisque $\left|\frac{x_1}{R}\right| > 0$ et $\left|\frac{y_1}{R}\right| > 0$, on a $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
 Enfin puisque $|x_1| = -x_1$ et $|y_1| = -y_1$, on a $x_1 = -R \cos \theta$ et $y_1 = -R \sin \theta$.

Il reste à voir que $\theta < \frac{\pi}{k}$. Remarquons que puisque les M_k sont obtenus à partir de M_1 par des rotations d'angle $\frac{2\pi}{k}$, on a $x_{i+1} = \omega > (\theta + \frac{2\pi}{k})$

Il reste à voir que $\theta \in \mathbb{Z}$. Considérons d'abord que puisque chacun des M_i s'obtient à partir de M_1 par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{k} l$ dans le sens antihoraire et que θ est mesuré dans ce même sens, on a les relations

$$x_{l+1} = -R \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{k}(l+1)\right)$$

$$\text{et } y_{l+1} = -R \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{k}(l+1)\right)$$

pour tout $l \in [0, k-1]$.

On suppose par l'absurde que $\frac{\pi}{k} < \theta < \frac{\pi}{2}$, et on distingue selon deux cas :

cas 1) $\frac{2\pi}{k} < \theta$: on a alors

$$0 < \theta - \frac{2\pi}{k} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

et par la dérivation de la fonction cosinus sur $[0; \frac{\pi}{2}]$,

$$\cos \theta < \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{k}\right) = \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{k}(k-1)\right)$$

d'où en multipliant par $-R$,

$$x_k < x_1,$$

contre disant le résultat trouvé en g).

$$\cos z = \frac{\pi}{k} < \theta < \frac{2\pi}{k} \quad \text{Alors on a } -\frac{4\pi}{k} < \theta - \frac{2\pi}{k} < 0,$$

$$\text{d'où } 0 < \frac{2\pi}{k} - \theta < \frac{\pi}{k} \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \text{et donc}$$

par le même argument de décroissance,

$$\begin{aligned}\cos \theta &< \cos\left(\frac{2\pi}{k} - \theta\right) \\ &= \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{k}\right) \\ &= \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{k}(k-1)\right)\end{aligned}$$

d'où en multipliant par $-k$,

$$x_k < x_1,$$

ce qui est de nouveau contradictoire

avec le résultat trouvé en a).

6d) Considérons d'abord qu'il s'agit de démontrer les théorèmes

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_k < x_2 \\ x_2 < x_{k-1} < x_3 \\ x_3 < x_{k-2} < x_4 \\ \vdots \end{array} \right\} \rightarrow \text{c'est à dire} \quad x_{l+1} < x_k - \epsilon < x_{l+2} \quad \text{pour } l+1 \in \left[0, \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \right].$$

$$\text{On a } 0 < \theta < \frac{\pi}{k}$$

$$\text{d'où } -\frac{\pi}{k} < -\theta < 0$$

$$\text{d'où } \frac{\pi}{k} < \frac{2\pi}{k} - \theta < \frac{2\pi}{k}$$

$$\text{Or } \omega < \frac{\pi}{k} \text{ et } \frac{2\pi}{k} < \theta + \frac{2\pi}{k}, \text{ d'où enfin}$$

$$\theta < \frac{2\pi}{k} - \theta < \frac{2\pi}{k} + \theta$$

Or pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a en ajoutant $\frac{2\pi l}{k}$

$$0 < \theta + \frac{2\pi l}{k} < \frac{2\pi(l+1)}{k} - \theta < \frac{2\pi(l+1)}{k} + \theta < \frac{2\pi(l+2)}{k}$$

en particulier, pour $\frac{2\pi(l+2)}{k} \leq \pi$,

c'est à dire pour $l+1 \leq \frac{k-1}{2}$, on a par démonstration

de cos sur $(0, \pi)$,

$$\cos\left(\frac{2\pi(l+1)}{k} + \theta\right) \leq \cos\left(\frac{2\pi(l+1)}{k} - \theta\right) \leq \cos\left(\frac{2\pi l}{k} + \theta\right)$$

d'où

$$\underbrace{-R \cos\left(\frac{2\pi l}{k} + \theta\right)}_{= x_{l+1}} \leq \underbrace{-R \cos\left(\frac{2\pi(l+1)}{k} - \theta\right)}_{= x_{k-l}} \leq \underbrace{-R \cos\left(\frac{2\pi(l+1)}{k} + \theta\right)}_{= x_{l+2}}$$

Seule l'affirmation concernant $x_{k-\ell}$ nécessite
justification:

$$\cos\left(\frac{2\pi(l_1)}{k} - \theta\right)$$

$$= \cos\left(\theta - \frac{2\pi(l_1)}{k}\right)$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{2\pi(l_1)}{k} + \theta\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi(k-l-1)}{k} + \theta\right)$$

$$\text{d'où } -R \cos\left(\frac{2\pi(l_1)}{k} - \theta\right)$$

$$= -R \cos\left(\frac{2\pi(k-l-1)}{k} + \theta\right)$$

$$= x_{k-\ell}.$$

On a donc montré toutes les égalités recherchées.

6e) On constate que les ordonnées des points x_j sont négatives pour $1 \leq j \leq \frac{k}{2}$ et positives pour $\frac{k}{2} + 1 \leq j \leq k$. En effet, pour tout $j \in \{1, k\}$, on a

$$\begin{aligned} (-\vec{i}, \overrightarrow{OM_j}) &= (-\vec{i}, \overrightarrow{OM_1}) + \sum_{l=1}^{j-1} (\overrightarrow{OM_l}, \overrightarrow{OM_{l+1}}) \quad [2\pi] \\ &\equiv \theta + \frac{(j-1)\pi}{k} \end{aligned} \quad [2\pi]$$

On constate que cette valeur est comprise entre 0 et π lors que $1 \leq j \leq \frac{k}{2}$ et entre π et 2π lorsque $\frac{k}{2} + 1 \leq j \leq k$.

Ainsi pour $1 \leq j \leq \frac{k}{2}$,

$$\text{on a } \sin(-\vec{i}, \overrightarrow{OM_j}) > 0$$

$$\text{d'où } -\sin(-\vec{i}, \overrightarrow{OM_j}) < 0$$

$$\text{d'où } y_j < 0$$

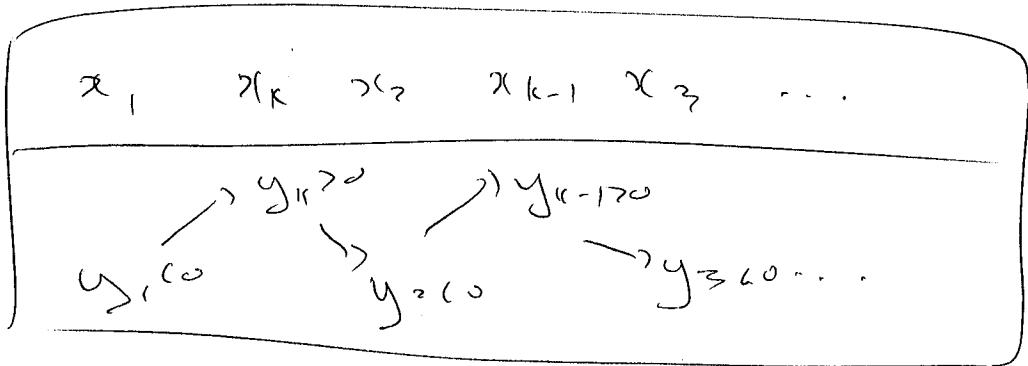
et pour $\frac{k}{2} + 1 \leq j \leq k$,

$$\text{on a } \sin(-\vec{i}, \overrightarrow{OM_j}) \leq 0$$

$$\text{d'où } -\sin(-\vec{i}, \overrightarrow{OM_j}) > 0$$

$$\text{d'où } y_j > 0.$$

On en déduit le tableau schématique suivant.



On vérifie que sur l'intervalle $[x_1, x_k]$,
 $[x_k, x_2]$, etc., f admet une racine, par
continuité et par le TVI.

f) Puisque f admet au moins $k-1$
racines, on a $\deg(f) \geq k-1$.

7a) On a $OA^2 = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$

$$OC^2 = \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$OA \cdot OC = -\cos a \sin a + \sin a \cos a = 0$$

et donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est orthogonale.

7b) On a, puisque $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est orthogonale,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \overrightarrow{OC} \\ &= (\cos a \cos(a+h) + \sin a \sin(a+h)) \overrightarrow{OA} \\ &\quad + (-\sin a \cos(a+h) + \cos a \sin(a+h)) \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

les coordonnées de \overrightarrow{OB} sont donc

$$\begin{pmatrix} \cos a \cos(a+h) + \sin a \sin(a+h) \\ \sin a \cos(a+h) - \cos a \sin(a+h) \end{pmatrix}$$

qui est ce
niveau.

7b) les coordonnées de B dans le repère R'
 sont $(\cos b, \sin b)$ puisque $\overrightarrow{OB} > \text{obtient}$
 à partir de \overrightarrow{OA} par une rotation d'angle b .

7c) On a donc

$$\begin{pmatrix} \cos(a+b) \\ \sin(a+b) \end{pmatrix} = \cosh \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} + \sinh \begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cosh - \sin a \sinh \\ \sin(a+b) = \sin a \cosh + \cos a \sinh \end{array} \right.$$

Ceci étant vrai pour tous quelconques, c'est le cas en particulier pour $-b$:

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) \\ &= \cos a \cosh + \sin a \sinh. \end{aligned}$$

Sol Par récurrence. Initialisation:

$$T_0(\cos \theta) = 1, \quad \cos(0\theta) = 1$$

$$T_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad \cos(1\theta) = \cos \theta.$$

Hérédité: Supposons vrai au rang $n+1$. Alors

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos \theta) &= 2 \cos \theta T_n(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos((n-1)\theta) \\ &= 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta \end{aligned}$$

$$= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta$$

$$= \cos(n+1)\theta$$

Conclusion: Vrai par récurrence.

8b) On a

$$\begin{aligned} T_{k-1} \left(\cos \left(\theta + \frac{2j\pi}{e} \right) \right) &= \cos \left((k-1) \left(\theta + \frac{2j\pi}{e} \right) \right) \\ &= \cos \left(k\theta - \theta + \frac{(k-1)2j\pi}{e} \right) \\ &= \cos \left(k\theta - \theta - \frac{2j\pi}{e} + 2j\pi \right) \\ &= \cos \left(k\theta - \left(\theta + \frac{2j\pi}{e} \right) \right) \\ &= \cos(k\theta) \cos \left(\theta + \frac{2j\pi}{e} \right) \\ &\quad + \sin(k\theta) \sin \left(\theta + \frac{2j\pi}{e} \right) \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à l'égalité demandée.

8c) On prend $\theta = k$ dans le résultat du 8b).

On peut montrer par récurrence que $\deg T_{k-1} = k-1$.

On prend θ tel que $x_1 = -P \cos \theta$ et on

pose $a = \cos k\theta$ et $b = \sin k\theta$. Alors le polynôme $P: x \mapsto \frac{T_{k-1}\left(\frac{-x}{P}\right) + \frac{a}{P}x}{b}$ vérifie pour tout $j \in \{1, k\}$,

$$P(x_j) = y_j \quad \text{par construction.}$$

En effet, si $j \in \{1, k\}$, on a

$$\begin{aligned}
 P(x_i) &= P\left(-P \cos(\omega + \frac{2j\pi}{k})\right) \\
 &= -\frac{P}{b} \left[T_{k-1}(\omega, \dots) + a \cos(\dots) \right] \\
 &= -\frac{P}{b} \left[b \sin(\dots) \right] \\
 &= -P \sin(\dots) \\
 &= y_{i+1}.
 \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé un polynôme de degré $k-1$ dont la courbe passe par les points voulus.

On considère désormais le polynôme

$$Q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k)$$

de degré k . Alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, le polynôme $S = P + x^r Q$ est de degré $k+r$ et vérifie pour tout $j \in \{1, k\}$,

$$\begin{aligned}
 S(x_j) &= P(x_j) + \underbrace{(x_j)^r Q(x_j)}_{=0} \\
 &= y_j + 0
 \end{aligned}$$

CQFD