EX4 Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $\varphi_{A,B} : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$, $M \longrightarrow AM - MB$.

Montrer que $\varphi_{A,B}$ est diagonalisable si et seulement si A et B le sont dans $M_n(\mathbb{K})$.

Examiner la même question dans le cas où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif quelconque.

Solution [FS & JCF]

Soit $\mathbb{K}$ est un corps commutatif quelconque et supposons tout d'abord que A et B soient diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$. On note $(X_i)_{1\le i\le n}$ une base de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$, de même on note $(Y_i)_{1\le i\le n}$ une base de vecteurs propres de ${}^tB$ associés respectivement aux valeurs propres $(\mu_i)_{1\le i\le n}$. Rappelons que la transposition de la diagonalisation de B donne celle de ${}^tB$. Pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on pose $M_{ij} = X_i{}^tY_j$ et il vient $\varphi_{A,B}(M_{ij}) = (\lambda_i - \mu_j)M_{ij}$. Pour conclure à la diagonalisation de $\varphi_{A,B}$ il suffit de prouver que la famille $(M_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est libre. Soit donc $\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}M_{ij} = 0$, une combinaison linaire nulle de la famille $(M_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Il vient $\sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}{}^tY_j = 0$, et puisque la famille $(X_i)_{1\le i\le n}$ est libre, en travaillant colonne par colonne on conclut que pour tout $1\le i\le n$ $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}Y_j = 0$.

La famille $(Y_i)_{1\le i\le n}$ étant libre , le résultat est donc acquis .

Réciproquement, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, supposons que A ne soit pas diagonalisable (le cas où B n'est pas diagonalisable se traite de la même manière) . On en déduit l'existence d'un vecteur colonne non nul X , d'une valeur propre λ et d'un entier $k > 1$ tels que $(A - \lambda I)^{k-1}X \neq 0$ et $(A - \lambda I)^kX = 0$. Choisissons alors un vecteur propre Y de ${}^tB$ associé à une valeur propre μ . Soit F le sous- espace de $M_n(\mathbf{C})$ engendré par la famille $((A - \lambda I)^iX^tY)_{0<i<k-1}$. On pose $A' = A - \lambda I$ et $B' = B - \mu I$; il vient par une récurrence immédiate : $\forall i \in \{1,\dots k\}$, $\varphi_{A',B'}{}^i(X^tY) = A'^iX^tY$. On a donc trouvé un sous espace F de $M_n(\mathbb{C})$ qui est stable par $\varphi_{A',B'}$ tel que la restriction de $\varphi_{A',B'}$ à F ne soit pas diagonalisable (utiliser la base de F précédemment définie - on vérifie sans difficulté qu'il s'agit d'une famille libre ! -, la matrice de $\varphi_{A',B'}$ restreinte à F est nilpotente non nulle et donc non diagonalisable) . Or, on le sait, si $\varphi_{A',B'}$ était diagonalisable, alors sa restriction à tout sous espace stable le serait aussi (par exemple, cette restriction annulerait un polynôme scindé à racines simples…). Ainsi $\varphi_{A',B'}$ n'est pas diagonalisable et $\varphi_{A',B'} = \varphi_{A,B} - (\lambda - \mu)Id$, ce qui permet de conclure que $\varphi_{A,B}$ n'est pas diagonalisable . Bien entendu, cette démonstration s'étend à tout corps commutatif $\mathbb{K}$ algébriquement clos.

Traitons la réciproque pour un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle quelconque , le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ n'étant pas vraiment différent . Considérons $\mathbb{L}$ la clôture algébrique de $\mathbb{K}$. On suppose A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ et $\varphi_{A,B}$ diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$. D'après ce qui précède A et B sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{L})$ et si $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ et $(\mu_i)_{1\le i\le n}$ désignent leurs valeurs propres respectives , $(\lambda_i - \mu_j)_{1\le i,j\le n}$ sont exactement les valeurs propres de $\varphi_{A,B}$. En particulier , on a : $\forall 1\le i,j\le n$, $\lambda_i - \mu_j \in \mathbb{K}$; sommons ces relations sur $1 \le j \le n$; il vient : $\forall i \in \{1,\dots,n\}, \sum_{j=1}^n (\lambda_i - \mu_j) = n\lambda_i - \mathrm{Tr}\, B \in \mathbb{K}$. Comme $\mathrm{Tr}\, B \in \mathbb{K}$ qui est de caractéristique nulle , on en déduit que les valeurs propres de A appartiennent à $\mathbb{K}$. De même on établirait que les valeurs propres de B appartiennent à $\mathbb{K}$. Mais alors , les vecteurs propres de A et B étant issus de la résolution de système linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ appartiennent à $\mathbb{K}^n$.

En conclusion A et B sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$.

Le résultat est faux pour $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque . Prenons $\mathbb{K}= F_2$ et considérons $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; on contrôle que $A^2= A+I_2$ et par suite que A n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{K}$. Cependant on vérifie que $\varphi_{A,A}$ est un projecteur , donc est diagonalisable

Remarque : signalons que dans le corps $\mathbb{K} = F_p$, une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $A^p = A$.
