Corrigé CAPES externe 2024

par Lily Gallois

Problème 1

1) **FAUX**
Pour $m = -5$ le tableau est proportionnel.

2) **FAUX**
On a $(1 + \frac{55}{100})(1 - \frac{28}{100}) \neq 1 + \frac{27}{100}$

3) **FAUX**
On a $(1 + \frac{22}{100})^2 \neq 1 + \frac{44}{100}$

4) **FAUX**
$\forall t \in]0, 1[,\ t^2 < t$
donc $e^{-t} < e^{-t^2}$
donc $\int_0^1 e^{-t}dt < \int_0^1 e^{-t^2}dt$
donc $1 - \frac{1}{e} < F(1)$
Note de l'auteur : on prendra garde au fait que l'intervalle est ouvert au départ pour que le raisonnement fonctionne.

5) **VRAI**
On a $A(t) = \int_1^t x^2 \ln(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^t - \int_1^t \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}dx = \frac{t^3\ln(t) - \frac{t^3}{3}}{3}$
Donc $\frac{A(t)}{t^2} = t \times \frac{\ln(t) - \frac{1}{3}}{3} \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$

6) **VRAI**
Note de l'auteur : On va montrer qu'aucune suite ne vérifie cette assertion. En mathématiques, le Faux implique n'importe quelle proposition. C'est le principe d'explosion ou ex falso quodlibet. Formellement : $\forall \phi, \perp \Rightarrow \phi$. Mais entre nous je soupçonne que la difficulté n'a pas été anticipée en voyant la "qualité" du sujet de cette année.
Soit (u_n) une suite qui vérifie l'assertion.

Il existe n_0 tel que $\forall A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A)$
Soit $n = n_0$, on a $n_0 \geq n_0$ donc $\forall A \in \mathbb{R}, u_{n_0} \geq A$
Or $\mathbb{R}$ n'admet pas de majorant, donc un tel u_{n_0} n'existe pas.
La suite n'est pas définie en n_0.
Ainsi, par principe d'explosion, la suite tend vers $+\infty$.

7) **FAUX**
On a $0,272727272727 = \frac{272727272727}{10^{12}}$ décimal.
Or $\frac{3}{11}$ n'est pas décimal :
S'il était, il existerait $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{3}{11} = \frac{a}{10^n}$
Donc $3 \times 10^n = 11a$ donc 11 divise $10^n \times 3$
Comme 11 est premier avec 10 on a 11 qui divise 3, contradiction.

8) **FAUX**
On a $\sqrt{2}$ irrationnel et $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ rationnel.

9) **FAUX**
La contraposée est n non pair $\Rightarrow n^2$ non pair.
Note de l'auteur : On ne demande pas si une propriété est vraie ou non, on demande la contraposée formellement. Je ne sais pas si écrire "impair" était correct ou non, théoriquement non.

10) **FAUX**
La somme des chiffres de 6 est 6 qui est divisible par 3 mais 6 n'est pas divisible par 9.

11) **FAUX**
Pour $n = 2$, $a = 2$ et $b = 0$ on a :
$2a \equiv 4 \equiv 0 \pmod 4$ mais on n'a pas $2 \equiv 0 \pmod 4$

12) **FAUX**
Pour $n = 1$ on a $1^2 \neq 2 \times 1 + 1$.

13) **VRAI**
Supposons que 5 ne divise ni b, ni c.
Les carrés de $1, 2, 3$ et 4 modulo 5 sont 1 et -1.
La somme de deux de ces carrés appartient donc à $\{-2, 0, 2\}$.
Donc a^2 appartient à $\{-2, 0, 2\}$.
Or a^2 est un carré donc il appartient à $\{-1, 0, 1\}$.
Donc, par intersection, a^2 appartient à $\{0\}$, donc $a^2 \equiv 0[5]$.

Or le seul carré nul est celui de 0 donc $a \equiv 0[5]$, donc a divisible par 5.

14) **VRAI**
Soit a le plus petit angle, il est positif donc $a \leq 2a \leq 3a$.
Donc les trois angles sont $a, 2a$ et $3a$.
La somme des angles vaut 180 degrés donc $6a = 180$ donc $a = 30$. On a donc $3a = 90$ degrés, donc le triangle est rectangle.

15) **VRAI**
Soit r la rotation de centre A qui transforme C et E.
Comme ACE est équilatéral l'angle de rotation est $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$.
Puisque ABD est équilatéral, on a $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$.
On a donc $r(D) = B$.
Une rotation étant une isométrie on a $BE = r(D)r(C) = DC$.

16) **VRAI**
On a $\forall t \in \mathbb{R}, 5 - 2t = -5t - 1 \iff t = -2$
Donc $P(-1, 5, 9) \in D \cap D'$
Donc D et D' sont coplanaires.

17) **VRAI**
A, B et G ont pour coordonnées respectives $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)$.
On vérifie facilement que ces points appartiennent au plan d'équation $x + z - 1 = 0$. Donc $x + z - 1$ est une équation de (ABG).
Or $9 + (-8) - 1 = 0$ donc K appartient à (ABG).
Note de l'auteur : on peut trouver l'équation avec un système, des vecteurs directeurs, un vecteur normal...

18) **VRAI**
Le nombre de parties sans a est le nombre de parties de $E \setminus \{a\}$ donc $2^{|E|-1}$.
Or le nombre de parties avec a est $2^{|E|} - 2^{|E|-1} = 2^{|E|-1}$
donc le nombre de parties avec a est égale au nombre de parties sans a.

19) **VRAI**
Les chemins les plus courts sont de longueurs 10.
Parmi les 10 segments unitaires parcourus il faut et il suffit d'en choisir 3 verticaux.
Il y a donc $\binom{10}{3} = 120$ chemins.

20) **FAUX**
L'espérance d'une loi de Poisson est son paramètre.
Soit λ le paramètre de cette loi de Poisson, on a $\lambda = 8$.
On a $P(X \geq 3) = 1 - P(X \in \{0,1,2\}) = 1 - e^{-8}(1 + 8 + \frac{8^2}{2}) > 0,95$.

21) **VRAI**
$P(\overline{A})P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$
$\iff (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A \cup B})$
$\iff 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A \cup B)$
$\iff 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(A) + P(A \ \cap B)$
$\iff P(A)P(B) = P(A \cap B)$

22) **VRAI**
Soit X_i la variable aléatoire représentée par une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$. $X_i = 1$ ssi la boule i est dans l'urne i, et $X_i = 0$ si la boule i est dans une autre urne.
Le nombre de coïncidence est donné par $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
On a $\mathbb{E}(X_1 + \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = n \times \frac{1}{n} = 1$.
à
23) **FAUX**
m n'est jamais mis à jour, ainsi si $b - a > 2\varepsilon$ l'algorithme ne termine pas.

Problème 2

1) f_a est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], f_a'(x) = a - 2ax$.
Comme $a > 0$ on a f_a' est positive sur $[0, \frac{1}{2}]$ et négative sinon.
Donc f_a est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sinon.
On a $f_a(0) = f_a(1) = 0$ et $f_a(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$.
Tableau à dessiner (flemme).

2) Pour tout n naturel, posons H_n : "$v_n \in [0,1]$".
- Initialisation : $v_0 \in]0,1[\subseteq [0,1]$ donc H_0 vraie.
- Hérédité : Supposons, pour un n entier naturel que H_n est vraie.
On a $v_{n+1} = f_a(v_n)$ or d'après H_n on a $v_n \in [0,1]$
donc $f_a(v_n) \in [0, \frac{a}{4}] \subseteq [0,1]$ donc H_{n+1} vraie.
- Ainsi, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,1]$.

3) La fonction f_a est continue sur $[0,1]$ donc $(f_a(v_n))$ converge vers $f_a(l)$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f_a(v_n)$ et (v_{n+1}) converge vers l donc $l = f_a(l)$.

4) Soit $l \in [0,1]$, l est un point fixe de f_a ssi $l = f_a(l)$
ssi $l = al(1-l)$
ssi $l = 0$ ou $1 = a(1-l)$
ssi $l = 0$
L'égalité $1 = a(1-l)$ n'étant pas possible car :
si $l \neq 0$ on a $1-l < 1$ et donc $a(1-l) < 1$ (a et $1-l$ étant positifs).

5) g_a ne s'annule pas sur $]0,1[$, par théorème des valeurs intermédiaires elle est soit strictement positive soit strictement négative.
Or $g_a(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4} - \frac{1}{2} < 0$ car $\frac{a}{4} \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.
Donc g_a est strictement négative sur $]0,1[$.

6) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = f_a(v_n) - v_n = g_a(v_n) < 0$ donc (v_n) décroissante.

7) (v_n) est décroissante et est minorée par 0 (question 2)
Ainsi, (v_n) converge.
Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq 1$,
on a (v_n) qui converge vers un réel l tel que $0 \leq l \leq 1$.
Donc l est un point fixe de f_a (question 3) et ainsi $l = 0$ (question 4).
Ainsi, (v_n) converge vers 0.

8) On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Mv_n$ donc (u_n) converge vers 0.
Il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $u_N < 1$, comme u_n est une suite d'entiers on a donc $u_n = 0$, *id est*, la population s'éteint inexorablement.

9) On a $\forall x \in [0,1]$,
$f(x) = x$
$\iff \frac{5}{2}x(1-x) = x$
$\iff x = 0$ ou $x = \frac{3}{5}$
Donc f admet exactement deux points fixes sur $[0,1]$.

10) On a $v_1 = 0,625$; $v_2 \approx 0,586$; $v_3 \approx 0,607$; $v_4 \approx 0,597$.

11) *Note de l'auteur (suite) : L'énoncé est assez mal posé, veut-on un algorithme qui affiche juste les 10 premiers termes ? Un algorithme qui calcule le n-ième terme ? Un algorithme qui retourne une liste avec les n premiers termes ? On pourrait être de mauvaise foi et proposer v, f(v), f(f(v)), etc. Mais j'imagine que la réponse attendue était :*

```
def f(x):
    return 5*x*(1-x)/2

def calculv(n):
    v = 1/2
    L = [v]
    for i in range(n):
        v = f(v)
        L.append(v)
    return L

L = calculv(10)
print(L)
v10 = f(L[-1])
print(v10)
```

Note de l'auteur : ou peut-être un algorithme qui calcule le n-ième terme puis on exécute l'algorithme sur les 10 premiers termes (je propose une version impérative et récursive) :

```
def f(x):
    return 5*x*(1-x)/2

def calculv(n):
    v = 1/2
    for i in range(n):
        v = f(v)
    return v

def calculvrec(n):
    if n == 0:
        return 1/2
    else:
        return f(calculvrec(n-1))

L = [calculv(i) for i in range(10)]
print(L)
v10 = f(L[-1])
print(v10)
```

Note de l'auteur (suite) : je ne suis même pas sûre de l'attendu pour v_{10}*...*

12) Un dessin... No comment (une bonne idée proposée par un candidat était de recopier la figure par transparence).

13) On a $\forall x \in [0,1]$,
$h(x) = f(f(x)) - x$
$= \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}x(1-x) \times \left(1 - \frac{5}{2}x(1-x)\right) - x$
$= \frac{25}{8} \times x(1-x) \times (2 - 5x(1-x)) - \frac{8x}{8}$
$= \frac{x}{8}(-125x^3 + 250x^2 - 175x + 50 + 8)$
$= -\frac{x}{8}(125x^3 - 250x^2 + 175x - 42)$
De plus on a $\forall x \in [0,1]$,
$(5x-3)(25x^2 - 35x + 14) = 125x^3 - 250x^2 + 175x - 42$
Ainsi, $\forall x \in [0,1], h(x) = -\frac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}$

14) Le discriminant de $25X^2 - 35X + 14$ vaut -175 est qui strictement négatif. Donc h s'annule si et seulement $x = 0$ ou $5x - 3 = 0$, soit $x = 0$ ou $x = \frac{3}{5}$. On a : $\forall x \in [0,1]$,
x point fixe de $f \circ f$ ssi $h(x) = 0$ ssi $x \in \{0, \frac{3}{5}\}$ ssi x point fixe de f.

15) $\forall x \in [0, \frac{3}{5}], x \geq 0, 25x^2 - 35x + 14 \geq 0$ et $5x - 3 \leq 0$
donc h positive sur $[0, \frac{3}{5}]$.

16) Pour tout n naturel, posons H_n : "$v_{2n} \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$".
- Initialisation : $v_0 = \frac{1}{2} \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$ donc H_0 vraie.
- Hérédité : Supposons, pour un n entier naturel que H_n est vraie.
On a $v_{2(n+1)} = (f \circ f)(v_{2n})$ or d'après H_n on a $v_n \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$,
comme $f \circ f$ laisse stable $[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$,
on a $v_{2n+2} \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$ donc H_{n+1} vraie.
- Ainsi, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, v_{2n} \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$.
On a h négative sur $[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, h(v_{2n}) \geq 0$,
donc $(f \circ f)(v_{2n}) - v_{2n} \geq 0$
donc $v_{2n+2} \geq v_{2n}$
donc (v_{2n}) croissante.

17) (v_{2n}) est croissante et majorée par $\frac{3}{5}$ donc convergente.
Soit l la limite, on a $l \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$ On a $f \circ f$ continue sur $[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$ et
$v_{2n+2} = (f \circ f)(v_{2n})$ donc $l = (f \circ f)(l)$ donc $l \in \{0, \frac{3}{5}\}$
Or $0 \notin [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$ donc $l = \frac{3}{5}$.
Ainsi, (v_{2n}) converge vers $\frac{3}{5}$.

18) On a $\forall n \in \mathbb{N}, v_{2n+1} = f(v_{2n})$.
Or f continue en $\frac{3}{5}$ donc $f(v_{2n})$ converge vers $f(\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$.
Ainsi, (v_{2n+1}) converge vers $\frac{3}{5}$.

19) On a (v_{2n}) et (v_{2n+1}) qui convergent vers la même limite donc (v_n) converge vers cette limite, soit $\frac{3}{5}$.
Donc (u_n) converge vers $\frac{3}{5}M$.
La population tend vers 60% du double de sa population initiale (car $v_0 = \frac{1}{2}$).

20)a) On a $\forall z \in]0, M[$:
$\frac{1}{z(M-z)} = \frac{1-\frac{z}{M}+\frac{z}{M}}{z(M-z)} = \frac{\frac{M-z}{M}+\frac{z}{M}}{z(M-z)} = \frac{1}{M} \times \frac{1}{z} + \frac{1}{M} \times \frac{1}{M-z}$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}_+, y(t) \in]0, M[$ et $y'(t) = ay(t)(M - y(t))$
Donc $\frac{y'(t)}{y(t)(M-y(t))} = a$
Donc $y'(t)\left(\frac{1}{M}\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{M}\frac{1}{M-y(t)}\right) = a$
Donc y vérifie l'équation $\frac{1}{M}\frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{1}{M}\frac{y'(t)}{M-y(t)} - a = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

20)b) Comme $\forall t \in \mathbb{R}_+, y(t) > 0$,
Une primitive de $t \mapsto \frac{y'(t)}{y(t)}$ est $t \mapsto \ln(y(t))$
Et une primitive de $t \mapsto \frac{y'(t)}{M-y(t)}$ est $t \mapsto -\ln(M - y(t))$
Ainsi, $t \mapsto \frac{1}{M}\ln(y(t)) - \frac{1}{M}\ln(M - y(t)) - at$ est une primitive de la fonction demandée.

21) Comme $\mathbb{R}_+$ est connexe, il existe $K \in R$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+$,
$\frac{1}{M}\ln(y(t)) - \frac{1}{M}\ln(M - y(t)) - at = K$
soit $\ln(y(t)) - \ln(M - y(t)) - aMt = MK$
soit $\frac{y(t)}{M-y(t)} = e^{MK+aMt} = ce^{aMt}$ en posant $c = e^{MK} > 0$
soit $y(t) = \frac{Mce^{aMt}}{1+ce^{aMt}}$.
Ainsi, il existe $c > 0$, tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+, y(t) = \frac{Mce^{aMt}}{1+ce^{aMt}}$.

22) *Note de l'auteur : évidemment la variable de la limite était un t. Je me demande si une personne de mauvaise foi qui répondrait que la limite est $y(t)$ aurait les points...*
On a $\forall t \in \mathbb{R}_+, y(t) = \frac{Mce^{aMt}}{1+ce^{aMt}} = \frac{Mc}{e^{-aMt}+c} \longrightarrow \frac{MC}{c} = M$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

23) La population se développe jusqu'à son maximum théorique (on a imposé que la la population ne pouvait pas dépasser une certaine valeur M).

24)a) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - \alpha y_n \\ y_n + \alpha x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$

24)b) Pour tout n naturel, posons "$H_n : \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$"

- Initialisation : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ donc H_0 vraie.
- Hérédité : Supposons, pour un n entier naturel que H_n est vraie.

On a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = AA^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ donc H_{n+1} est vraie.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

25)a) Le polynôme caractéristique de A est $\det(XI_2 - A) = (X-1)^2 + \alpha$ dont les racines simples sont $\lambda = 1 + \alpha i$ et $\mu = 1 - \alpha i$. Ainsi, λ et μ sont les valeurs propres de A.

25)b) Soit r le module de λ et θ son argument principal. On a $\mu = \overline{\lambda}$ donc le module de μ est r et un argument est $-\theta$. On a $r = \sqrt{1+\alpha} > 0$ donc il existe $r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in]0, 2\pi]$ tels que $\lambda = re^{i\theta}$ et $\mu = re^{-i\theta}$.
*Note de l'auteur : on prendra garde à l'utilisation des articles comme **l'**argument principal qui est dans le bon intervalle et **un** argument.*

26)) Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, donc le polynôme minimal qui le divise (théorème de Caylay-Hamilton) est scindé à racines simples donc A est diagonalisable (avec λ et μ en valeurs propres), *i.e.* il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

27) *Note de l'auteur : il y a une erreur d'énoncé, il y a une infinité de matrices qui vérifient la propriété de la question 26). Il faut montrer que la matrice convient. On peut faire le simple calcul de PDP^{-1} et obtenir A pour répondre mais on peut aussi faire :*

On a $A \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha i \\ \alpha - i \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ, de même $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à μ. Ainsi la matrice de changement de base $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ convient.

On a $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

28) Pour tout n naturel, posons "$H_n : A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}$"

- Initialisation : On a $A^0 = I_2 = P \begin{pmatrix} \lambda^0 & 0 \\ 0 & \mu^0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
- Hérédité : Supposons, pour un n entier naturel que H_n est vraie.

On a $A^{n+1} = AP \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1}P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1} = PD \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & 0 \\ 0 & \mu^{n+1} \end{pmatrix} P^{-1}$ donc H_{n+1} est vraie.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

29) On rappelle que $\mu = \overline{\lambda}$ donc $\mu^n = \overline{\lambda^n}$.
On a donc $\frac{\lambda^n + \mu^n}{2} = \Re(\lambda^n)$ et $\frac{\lambda^n - \mu^n}{2i} = \Im(\lambda^n)$.
On a $\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^n & i\lambda^n \\ \mu^n & -i\mu^n \end{pmatrix}$
Donc $A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^n + \mu^n & i(\lambda^n - \mu^n) \\ -i(\lambda^n - \mu^n) & \lambda^n + \mu^n \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \Re(\lambda^n) & -\Im(\lambda^n) \\ \Im(\lambda^n) & \Re(\lambda^n) \end{pmatrix}$ car $i = -\frac{1}{i}$.
Or $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
donc $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(\lambda^n) & -\Im(\lambda^n) \\ \Im(\lambda^n) & \Re(\lambda^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(\lambda^n)x_0 - \Im(\lambda^n)y_0 \\ \Im(\lambda^n)x_0 + \Re(\lambda^n)y_0 \end{pmatrix}$.
Comme $\Re(\lambda^n) = \Re(r^n e^{in\theta}) = r^n \cos(n\theta)$ et $\Im(\lambda^n) = \Im(r^n e^{in\theta}) = r^n \sin(n\theta)$
On a finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^n \left(\cos(n\theta)x_0 - \sin(n\theta)y_0\right) \\ r^n \left(\sin(n\theta)x_0 + \cos(n\theta)y_0\right) \end{pmatrix}$

30) La courbe décrit une spirale qui va vers l'extérieur, ainsi les populations décrivent un phénomène pseudo-périodique : lorsque les proies augmentent, les prédateurs prospèrent et se multiplient et quand les prédateurs se multiplient les proies sont mangées en grande quantité et diminuent ce qui réduit la population des prédateurs, etc.
Note de l'auteur : le graphique n'indiquait pas la direction suivie par la spirale, je trouve cela dommageable pour un concours.

31) On a, pour tout entier naturel n :
$x_n^2 + y_n^2 = r^{2n} \left((\cos(n\theta)x_0 - \sin(n\theta)y_0)^2 + (\cos(n\theta)x_0 - \sin(n\theta)y_0)^2 \right)$

$= r^{2n}(\cos(n\theta)^2 x_0^2 + \sin(n\theta)^2 y_0^2 - 2\cos(n\theta) sin(n\theta) x_0 y_0 +$
$\sin(n\theta)^2 x_0^2 + \cos(n\theta)^2 y_0^2 + 2\cos(n\theta) sin(n\theta) x_0 y_0)$
$= 2r^{2n}(x_0^2 + y_0^2)$ car $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$.
Si les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux bornées alors, par translation respectivement par $-\overline{u}$ et $-\overline{v}$ les suites (x_n) et (y_n) sont bornées, donc la suite $(x_n^2 + y_n^2)$ est bornée. Or cette dernière est une suite géométrique de raison $r^2 > 1$ or $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ donc la suite n'est pas bornée, contradiction.
Ainsi, les populations peuvent croître indéfiniment, c'est peu réaliste.
Note de l'auteur : Encore une fois il y avait une erreur d'énoncé, à aucun moment il était précisé que x_0 et y_0 ne sont pas simultanément nuls, et si c'est le cas les suites (u_n) et (v_n) sont constantes, donc bornées...