VI.4.6 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Au lieu de donner une définition utilisant les machines de Turing, on aurait pu donner d'autres définitions équivalentes utilisant la notion de fonctions récursives (ce qui nécessite une définition formelle) :

1. Un nombre réel α est *calculable* s'il existe une fonction récursive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ elle produise un entier k tel que :
$$\frac{k-1}{n} \leq \alpha \leq \frac{k+1}{n}$$
2. Un nombre réel α est *calculable* s'il existe une fonction récursive telle que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^\star$ elle produise un rationnel a tel que :
$$|\alpha - a| \leq \varepsilon$$
3. Un nombre réel α est *calculable* s'il existe une suite récursive de rationnels $(r_i)_{i\in\mathbb{Q}}$ convergeant vers α telle que pour tout i
$$|r_{i+1} - r_i| < 2^{-i}$$

Autrement dit il existe une fonction récursive qui permet d'approcher α avec la précision que l'on veut.

Une autre définition (qui donne le même résultat) utilise les « coupures de Dedekind calculable », c'est-à-dire les fonctions calculables Ded vérifiant :

- $\mathrm{Ded} : \mathbb{Q} \mapsto \{0, 1\}$
- $\exists x (\mathrm{Ded}(x) = 0)$
- $\exists x (\mathrm{Ded}(x) = 1)$
- $\forall x\, \forall y\, (((\mathrm{Ded}(x) = 0) \land (\mathrm{Ded}(y) = 1)) \Rightarrow (x < y))$
- $\forall x\, ((\mathrm{Ded}(x) = 0) \to \exists y\, ((y > x) \land (\mathrm{Ded}(y) = 0)))$

Par exemple la fonction qui à un rationnel $\dfrac{p}{q}$, renvoie 0 si $p^2 < 2q^2$ et 1 sinon, est une Coupure de Dedekind qui montre que $\sqrt{2}$ est calculable.

On aurait pu aussi donner des définitions pour les nombres complexes : un nombre complexe est définissable ou calculable, si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

VI.4.7 Fonctions récursives

On appelle fonctions de base, les fonctions (qui peuvent être partielles) suivantes [145] :

- Les fonctions nulles $\mathrm{o} : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ définies par $\mathrm{o}(\overline{\alpha}) = 0$.
- La fonction successeur $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $s(n) = n + 1$.
- Les fonctions $i^{\text{ième}}$ projection $\pi_i : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ définies par $\pi_i(\overline{\alpha}) = \alpha_i$.

On appelle fonctions récursives primitives la plus petite classe contenant les fonctions de base et close pour l'application un nombre fini de fois des opérateurs suivants :

- La composition d'application : si $(f_i : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N})_{0<i\leq l}$ et $g : \mathbb{N}^l \mapsto \mathbb{N}$, alors la composée des f_i et de g est l'application : $c : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ définie par $c(\overline{\alpha}) = g(f_1(\overline{\alpha}), f_2(\overline{\alpha}), \cdots, f_l(\overline{\alpha}))$.
- La récursion primitive : soit $f : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N}^{k+2} \mapsto \mathbb{N}$, alors la *récursée* de f et g est la fonction $h : \mathbb{N}^{k+1} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $\begin{cases} h(\overline{\alpha}, 0) &= f(\overline{\alpha}) \\ h(\overline{\alpha}, p+1) &= g(\overline{\alpha}, p, h(\overline{\alpha}, p)) \end{cases}$.

La classe des fonctions primitives récursives contient des fonctions qui sont calculables, mais il existe des fonctions calculables qui ne sont pas primitives récursives : par exemple la fonction d'Ackermann (cf. *Fonctions récursives et machine de Turing*).

On appelle classe des fonctions récursives la plus petite classe contenant les fonctions primitives récursives et close par minimisation non bornée :

145. les éléments de $\mathbb{N}^k$ sont notés $\overline{\alpha}$