des nombres transfinis

possible, il le nomme infini *actuel* ou *en acte*. Une distinction du même ordre intervient dans d'autres domaines que l'arithmétique. Dire que le temps se prolonge indéfiniment – chaque jour possède un lendemain – n'est pas considérer l'éternité en acte ; dire qu'un segment peut toujours être divisé en deux n'est pas dire qu'il est actuellement constitué d'une infinité de points. Il paraît impossible de mettre en doute la capacité de certains processus à être indéfiniment poursuivis ; la possibilité de considérer comme authentiques les objets que ces processus engendrent à la limite est, quant à elle, très problématique. Car il est essentiel à un objet d'être fini : un objet in-fini n'est pas comme un objet vert, ou rond. En disant qu'il est in-fini, on dit ce qu'il n'est pas, mais on ne dit pas ce qu'il est. Ainsi que l'écrit Aristote dans sa « Physique » (III, 7), l'infini *« est une privation, non pas une perfection, mais l'absence de limite »*.

Ce qui est frappant, c'est que cette réticence à considérer les totalités actuellement infinies comme d'authentiques objets a survécu jusqu'à nos jours, alors que tant d'autres idées aristotéliciennes, sur la chute des corps, sur le mouvement, sur la reproduction sont caduques. Que s'est-il passé dans l'intervalle, et pourquoi l'idée même d'infini actuel est-elle encore considérée avec circonspection par beaucoup ?

Les mathématiques classiques sont parsemées de références à l'infini. Pourtant, cet infini classique, que l'on rencontre en analyse, n'est qu'une manière de parler, et n'est pas le *véritable infini*, c'est-à-dire l'infini en acte. Ce dernier, on va le voir, est tout autre chose.

Une formule – appelons-la (A) – comme : la limite de $x/2$ quand x tend vers l'infini est égale à l'infini, est familière à tout le monde. Il n'y a là aucun problème métaphysique sérieux. L'expression « tendre vers l'infini », qui semble à cet égard pleine de promesses, est d'un prosaïsme décevant lorsqu'on analyse les choses de plus près. (A) signifie seulement ceci : être en position de justifier que (A) est correct, c'est être en mesure de triompher d'un diable qui vous proposerait le défi suivant. Présomptueux mortel, tu affirmes que $x/2$ croît sans limite lorsque x en fait autant. Entendu. Alors, je vais t'indiquer un entier M, aussi grand que je voudrai – c'est moi seul qui décide-rai de sa taille –, et je te défie de m'indiquer un entier N – il pourra évidemment dépendre du M que j'ai choisi – tel que, si x est plus grand que N, alors $x/2$ sera nécessairement plus grand que M.

Dans ce jeu avec le diable, dont il est aisé, dans le cas qui nous occupe, de triompher – si vous prenez x plus grand que 2 M, il est clair que $x/2$ sera plus grand que M –, l'infini n'intervient tout simplement pas. On parle d'infini, mais par simple abus de langage, car dans le contenu véritable de (A) il est simplement question de nombres entiers finis, et de quantificateurs : pour tout M il existe N tel que, si x majore N, alors $f(x)$ majore M. Rien de plus, même s'il a fallu attendre des siècles pour que Karl Weierstrass, dans ses cours des années 1860, écrive ces choses proprement, justifiant par là même les propos d'allure aristotélicienne que tenait déjà le grand mathématicien Friedrich Gauss (1777-1855) : *« Je proteste avant tout contre l'usage d'une quantité infinie conçue comme complète, laquelle n'est jamais permise en mathématiques. L'infini n'est qu'une manière de parler, dans laquelle en fait il est simplement question de limites. »* Or quelques années après, dans un contexte où il est donc devenu clair que l'analyse mathématique n'a pas besoin de l'infini véritable, un élève de Weierstrass, Georg Cantor, change la donne en créant, de toutes pièces, une théorie mathématique de l'infini *actuel*.

Admettons la notion d'une collection infinie d'objets C, prise comme une totalité achevée. La mauvaise idée, l'idée stérile, c'est de vouloir immédiatement lui associer un nombre, qui serait à C ce que l'entier 3 est à un sac de trois pommes. Car ce nombre, c'est entendu, ne peut être que l'*infini* (∞), ce qui n'avance pas à grand-chose – on a un symbole, mais pas de théorie. En revanche, on peut se demander efficacement si deux collections C et C′ de ce genre ont ou non même nombre d'éléments, à la condition de ne pas vouloir répondre à cette question en comptant d'abord le nombre d'éléments de C, puis le nombre d'éléments de C′ et en comparant ensuite les deux résultats : le processus de comptage pour C durerait une éternité, et la comparaison ne viendrait jamais !

La bonne idée, l'idée féconde, vient au contraire de l'observation suivante : dans le cas général, on peut parfaitement savoir si deux collections ont même nombre d'éléments sans avoir besoin de les dénombrer chacune. Il suffit de procéder comme on fait pour savoir d'un seul coup d'œil si un am-

La diagonale de Cantor

Pour établir que le segment [0,1] n'est pas dénombrable, Cantor utilise la méthode dite « de la diagonale ». Cette méthode, qui a connu d'autres usages après lui, consiste à montrer qu'il est impossible de faire la liste des éléments d'un ensemble E en établissant, une liste putative L de ces éléments étant donnée, qu'il existe nécessairement des éléments qui devraient figurer dans L et qui n'y figurent pas. Le mot « diagonale » s'explique aisément par le cours de la preuve de Cantor. Supposons donnée une liste de tous les éléments du segment [0,1] *(voir l'illustration ci-contre)*. Considérons le nombre suivant, appelé « nombre diagonal » : $0, b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots$, où les chiffres b_i successifs ont été choisis de façon à différer de a_{ii} – par exemple en prenant $b_i = a_{ii} + 1$ si $a_{ii} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou 8 et $b_i = 0$ si $a_{ii} = 9$. A propos de ce nombre diagonal, deux choses sont claires : 1) Ce nombre devrait figurer sur la liste des réels compris entre 0 et 1, puisqu'il est de la forme « zéro, suivi d'une virgule, suivie de chiffres entre 0 et 9 ». 2) En fait, il ne figure pas sur la liste, puisqu'il diffère du premier élément de cette liste par sa première décimale, du deuxième par sa deuxième décimale et, plus généralement, du i-ème élément par sa i-ème décimale.

Comme le raisonnement pourrait s'appliquer à n'importe quelle autre liste de nombres réels compris entre 0 et 1, on en conclut qu'il n'existe aucune liste les contenant tous. **J. D.**

ILLUSTRATION : SYLVIE DESSERT

La méthode de la diagonale consiste, après avoir établi une liste des éléments d'un ensemble, à montrer qu'il existe au moins un élément de cet ensemble qui n'appartient pas à ladite liste.