Soit Ω l'ensemble des $x \in E$ tels que $\langle x, \sigma(x)\rangle \leqslant 0$ et $\langle x, u\rangle \geqslant 0$. On désigne par N l'ensemble des endomorphismes α de E tels que, $\alpha(\Omega) \subset \Omega$ et par N_+ l'ensemble des endomorphismes de la forme $\beta + \gamma$, où β et γ sont deux éléments de N *linéairement indépendants* dans l'espace des endomorphismes de E. On dira qu'un endomorphisme de E est *extrémal* s'il appartient à N et n'appartient pas à N_+.

I. — 1° Comparer Ω et l'ensemble des éléments $y \in E$ tels que $\langle y, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$.

2° Déterminer les endomorphismes extrémaux de rang inférieur ou égal à 1.

3° Existe-t-il des endomorphismes extrémaux de rang 2?

4° L'endomorphisme identité est-il extrémal?

5° Soit α un endomorphisme de E tel que $\alpha(\Omega) = \Omega$ et soit β un endomorphisme extrémal. Les endomorphismes composés $\alpha \circ \beta$ et $\beta \circ \alpha$ sont-ils extrémaux? L'endomorphisme α est-il extrémal?

II. — 1° Soit y un élément de E non nul et soit $m = \langle y, \sigma(y)\rangle$. Pour tout nombre réel t, on désigne par $\alpha_{t,y}$ l'endomorphisme de E tel que

$$\alpha_{t,y}(x) = x + \left(\int_0^t e^{m\theta}\, d\theta\right) \langle x, \sigma(y)\rangle y$$

pour tout $x \in E$. Montrer que, quel que soit t, $\alpha_{t,y}$ est de rang 3 et calculer l'endomorphisme inverse.

2° Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $\alpha_{t,y} \in N$ ainsi que les valeurs de t pour lesquelles $\alpha_{t,y} \in N_+$.

3° Montrer que, si $\alpha_{t,y} \in N$, alors $\alpha_{t,y}$ est somme d'un nombre fini d'endomorphismes extrémaux.

4° Soit P le plan, ensemble des $x \in E$ tels que $\langle x, u\rangle = 1$ et soit S une ellipse du plan P contenue dans Ω. Montrer que, si S n'est pas le cercle de centre u et de rayon 1 du plan P, il existe un nombre réel t et un élément $y \in E$ non nul tels que $\alpha_{t,y} \in N_+$ et $S \subset \alpha_{t,y}(\Omega)$.

III. — 1° Soit α et β deux endomorphismes de E tels que $\beta(\Omega) \subset \alpha(\Omega) \subset \Omega$. Montrer que, si β est de rang 3 et si $\alpha \in N_+$, alors $\beta \in N_+$.

2° Déterminer les endomorphismes extrémaux de rang 3 (on utilisera les résultats de II). Le composé de deux endomorphismes extrémaux (de rangs quelconques) est-il un endomorphisme extrémal?

3° Tout endomorphisme de E appartenant à N est-il la somme d'un nombre fini d'endomorphismes extrémaux? [On pourra commencer par étudier le cas d'un endomorphisme $\alpha \in N$ de rang 3 tel que l'intersection de $\alpha(\Omega)$ et du plan P défini en II, 4° soit un cercle et son intérieur. On montrera que, dans ce cas, il existe un $z \in \Omega$ tel que $\alpha(\Omega)$ soit l'image de Ω par l'endomorphisme qui transforme tout $x \in E$ en $x + \langle x, u\rangle z$.]

4° L'endomorphisme γ de E défini par $\gamma(x) = -x + \frac{5}{2}\langle x, u\rangle u$ est-il la somme d'un nombre fini d'endomorphismes extrémaux de rang 1?

Deuxième composition de mathématiques. (1966

5751. — Soit **R** l'ensemble des nombres réels. On désignera par :

$C^0(\mathbf{R})$, l'espace vectoriel réel de toutes les fonctions à valeurs réelles, définies sur **R** et continues.

$C^p(\mathbf{R})$ [respectivement $C^\infty(\mathbf{R})$] le sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbf{R})$ formé des fonctions p fois continûment dérivables (respectivement indéfiniment dérivables).

$C^0(\mathbf{R}^2)$, l'espace vectoriel de toutes les fonctions à valeurs réelles, définies sur $\mathbf{R}^2$ et continues.

$C^p(\mathbf{R}^2)$ [respectivement $C^\infty(\mathbf{R}^2)$] le sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbf{R}^2)$ formé des fonctions admettant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p inclusivement (respectivement des dérivées partielles continues de tous ordres).

A) Dans tout le problème, on considérera les fonctions f, g, h de la variable t définies par

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \leqslant 0, \\ f(t) = e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)} \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R},$$

$$h(t) = g(2t+2)g(-2t+2) \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

1° Étudier les variations de f, g, h; préciser le signe de $\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}$; construire les graphes de f, g, h; montrer que ces trois fonctions appartiennent à $C^\infty(\mathbf{R})$.

2° Soit u_1, u_2, v_1, v_2 des nombres réels tels que $u_1 < u_2$; montrer qu'on peut trouver des constantes A_1, A_2, A_3, A_4 de façon que la fonction $m(t) = A_1 + A_2 g\left(\frac{t - A_3}{A_4}\right)$ satisfasse aux conditions :

$$m(t) = v_1 \quad \text{pour } t \leqslant u_1, \qquad m(t) = v_2 \quad \text{pour } t \geqslant u_2$$
$$\text{Inf}(v_1, v_2) \leqslant m(t) \leqslant \text{Sup}(v_1, v_2) \quad \text{pour } u_1 < t < u_2.$$

3° Soit t_1, t_2, t_3 des nombres réels tels que $t_1 < t_2 < t_3$. Montrer que l'on peut déterminer les constantes a_1, a_2, a_3, a_4 de façon que la fonction $k(t) = g\left(\frac{a_1 - t}{a_2}\right) g\left(\frac{a_3 - t}{a_4}\right)$ appartienne à $C^\infty(\mathbf{R})$, soit différente de 0 pour $t_1 < t < t_3$, présente un maximum strict égal à 1 pour $t = t_2$ et soit nulle en dehors de l'intervalle $[t_1, t_3]$.

4° Soit φ une fonction continue à valeurs réelles sur l'intervalle $[0, +1]$. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe une fonction φ_n indéfiniment dérivable sur $[0, +1]$, telle que $\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right) = \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$ et que φ_n soit monotone sur chacun des intervalles

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \quad (\text{pour } k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Montrer que la suite des fonctions φ_n converge uniformément vers φ sur l'intervalle $[0, +1]$.

Montrer que pour tout $\varphi \in C^0(\mathbf{R})$, il existe une suite de fonctions $\varphi_n \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que, pour tout intervalle fermé borné, I, la suite φ_n converge vers φ uniformément sur I.

5° On considère la fonction $g_n \in C^\infty(\mathbf{R})$ définie par $g_n(t) = g(nt)$. Pour $\varphi \in C^0(\mathbf{R})$, on pose

$$I_n(\varphi) = \int_0^1 \frac{dg_n}{dt}(t)\varphi(t)\, dt.$$

Montrer que $I_n(\varphi)$ admet une limite, que l'on calculera, lorsque $n \to +\infty$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, les suites $g_n(t)$ et $\frac{dg_n}{dt}(t)$ admettent des limites quand $n \to +\infty$. Examiner si les suites de fonctions g_n et $\frac{dg_n}{dt}$ convergent uniformément ou non sur l'intervalle $[0, +1]$. Comparer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{dg_n}{dt}(t)\varphi(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{dg_n}{dt}(t)\right) \varphi(t)\, dt.$$

B) Soit D une application linéaire de $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que

$$(1) \qquad D(FG) = D(F)G + FD(G) \quad \text{quels que soient } F, G \in C^\infty(\mathbf{R}^2).$$

1° Soit U l'ensemble des points (x, y) de $\mathbf{R}^2$ satisfaisant aux inégalités $|x| < a$, $|y| < b$, où a et b sont des nombres positifs donnés. Montrer [en utilisant (A), 3°] qu'il existe des fonctions $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ telles que

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{pour tout point } (x, y) \text{ extérieur à U}; \quad \Phi(u, v) = 1 \quad \text{où } (u, v) \text{ est un point donné de U}.$$

En déduire que, si $F \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ est nulle en tout point $(u, v) \in U$, alors $D(F) = 0$ en tout point (u, v) de U. Pour cela, on déterminera la valeur au point $(u, v) \in U$ de $D(F\Phi)$, où Φ est la fonction considérée plus haut.

2° Soit $\alpha, \beta, \gamma \in C^0(\mathbf{R}^2)$. On suppose qu'en tout point (x, y) de $\mathbf{R}^2$ tel que $y \neq 0$, la fonction α est différentiable et que l'on a

$$(2) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, y) = \beta(x, y), \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y) = \gamma(x, y).$$

Montrer que $\alpha \in C^1(\mathbf{R}^2)$ et que (2) est encore valable pour $y = 0$. Pour montrer que α admet β comme dérivée partielle par rapport à x au point $(x_0, 0)$, on pourra par exemple écrire

$$\alpha(x_0 + a, 0) - \alpha(x_0, 0) = \alpha(x_0 + a, 0) - \alpha(x_0 + a, a^2) + \alpha(x_0 + a, a^2) - \alpha(x_0, 0).$$

3° Soit $F \in C^{n+1}(\mathbf{R}^2)$ [avec $n \geqslant 1$]. On suppose que F et toutes ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n s'annulent en tout point $(x, 0)$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ et soit a et b deux nombres réels positifs. Montrer que, pour tout couple d'entiers p et $q \geqslant 0$, avec $p + q \leqslant n + 1$, il existe une constante K telle que

$$(3) \qquad \left|\frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p\, \partial y^q}(x, y)\right| \leqslant K|y|^{n+1-p-q}$$

pour $|x - x_0| \leqslant a$ et $|y| \leqslant b$.

On définit une fonction G sur $\mathbf{R}^2$ par les formules

$$(4) \qquad G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{F(x, y)}{y} & \text{pour } y \neq 0, \\ 0 & \text{pour } y = 0. \end{cases}$$

Montrer que $G \in C^n(\mathbf{R}^2)$. Pour cela, on pourra observer que G admet des dérivées partielles continues d'ordre inférieur ou égal à $n + 1$ au voisinage de tout point (x, y) avec $y \neq 0$ et que l'on a en ce point

$$(5) \qquad \frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p\, \partial y^q}(x, y) = y \frac{\partial^{p+q} G}{\partial x^p\, \partial y^q}(x, y) + q \frac{\partial^{p+q-1} G}{\partial x^p\, \partial y^{q-1}}(x, y),$$

pour p, q entiers positifs avec $p + q \leqslant n + 1$. On en déduira en utilisant (3) que les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n de G se prolongent en des fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$ tout entier.

4° Soit $F \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ et soit $y_0 \in \mathbf{R}$. On pose

$$(6) \qquad G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{F(x, y) - F(x, y_0)}{y - y_0} & \text{pour } y \neq y_0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) & \text{pour } y = y_0. \end{cases}$$

Montrer que $G \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$. Pour cela, on pourra utiliser la formule de Taylor pour écrire F comme somme d'un polynôme en $(y - y_0)$ à coefficients fonctions indéfiniment dérivables de x et d'une fonction $R_n \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n s'annulent pour $y = y_0$. On utilisera alors le 3° pour montrer que $G \in C^n(\mathbf{R}^2)$ pour tout entier n.

5° Soit $F \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$. Montrer qu'il existe des fonctions φ et ψ appartenant à $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ telles que

$$(7) \qquad F(x, y) = F(x_0, y_0) + (x - x_0)\varphi(x, y) + (y - y_0)\psi(x, y),$$

où (x_0, y_0) est un point donné de $\mathbf{R}^2$. Pour cela, on pourra écrire

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + [F(x, y_0) - F(x_0, y_0)] + [F(x, y) - F(x, y_0)].$$

Calculer $\varphi(x_0, y_0)$ et $\psi(x_0, y_0)$. Montrer que, si les dérivées partielles premières de F s'annulent au point (x_0, y_0), alors les fonctions φ et ψ s'annulent également en ce point.

6° Soit P le point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ et soit D_P une forme linéaire sur $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que

$$(8) \qquad D_P(FG) = F(P)D_P(G) + G(P)D_P(F) \quad \text{quels que soient} \quad F, G \in C^\infty(\mathbf{R}^2).$$

Montrer que $D_P(F) = 0$ si F est une fonction constante. Montrer que la forme linéaire D_P [satisfaisant à (8)] est bien déterminée si l'on se donne $D_P(x) = X_P$ et $D_P(y) = Y_P$ et que $D_P(F)$ [pour $F \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$] ne dépend que de X_P, Y_P et des dérivées partielles premières de F au point P.

7° Soit V un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^2$, de composantes $X(x, y)$ et $Y(x, y)$, avec X et $Y \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$. Soit θ_V l'application de $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même définie par

$$(9) \qquad \theta_V(F) = \frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial y} Y.$$

Calculer $\theta_V(FG)$. Montrer réciproquement que toute application linéaire D de $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même satisfaisant à (1) détermine un champ de vecteurs V et un seul tel que $D = \theta_V$.

Peut-on retrouver ainsi les résultats de (B) 1°?

N. B. — La partie B, à l'exception du 1°, est indépendante de la partie A.

Physique.

Question de cours. — Température thermodynamique : sa relation avec l'échelle thermométrique des gaz parfaits.

5752. — Problème. — Dans tout ce qui suit, les résultats doivent être donnés dans le système MKSA. On rappelle que, dans ce système, rationalisé,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ farad par mètre}, \qquad \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ henry par mètre}, \qquad \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-16}\ \text{m}^{-2}.\text{s}^2.$$

I. 1. — On considère un cylindre de révolution, d'axe $z'Oz$, de longueur pratiquement infinie par rapport au rayon a de sa base. Ce cylindre est un conducteur, éloigné de tout autre et porte une charge q par unité de longueur. L'air a une constante diélectrique, par rapport au vide, égale à 1.

Déterminer le potentiel en tout point de l'espace.

I. 2a. — On considère maintenant deux lignes parallèles de dimensions transversales négligeables, séparées par une distance $2b$. L'une porte une densité linéaire de charge q, l'autre $-q$. Déterminer le potentiel créé par cet ensemble.

Quelles sont les surfaces équipotentielles et les lignes de champ?

Donner une expression simple du potentiel en un point éloigné de l'ensemble des lignes (ligne de dipôles).

I. 2b. — On admet que, si l'on a un équilibre électrostatique, la métallisation d'une surface équipotentielle

III. 1*b*. — On place en série n éléments de ce genre. Le premier élément sera noté E_0, avec les bornes extérieures A_0 et B_0, le dernier E_{n-1} avec les bornes extérieures A_n et B_n.

Établir la relation entre V_n, i_n et V_0, i_0.

Il sera utile de considérer les quantités suivantes :

$$X_p^{\pm} = V_p \mp \rho i_p \operatorname{sh} \varphi.$$

III. 1*c*. — Les bornes A_n et B_n sont reliées par une résistance R_S. Calculer dans ce cas la résistance équivalente à tout le circuit, la force électromotrice étant appliquée entre A_0 et B_0.

Étudier plus particulièrement les cas $R_S = 0$, $R_S = \infty$.

Quelle est la résistance équivalente si $n \to \infty$?

III. 2. — On considère, en régime de courant continu, les conducteurs parallèles étudiés dans (I, 2*b*) et (II, 1*b*). Leur longueur est L, mais $L \gg d$, et l'on néglige les perturbations apportées par les extrémités. On tient compte de la conductivité de l'air, considérée en I, 3. Chaque conducteur a d'autre part une résistance par unité de longueur de $1{,}7.10^{-4}$ ohm par mètre.

En adaptant les résultats des trois questions précédentes et en passant à la limite, calculer la résistance équivalente à la double ligne, supposée fermée à une de ses extrémités par la résistance R_S.

Application numérique: $L = 10$ km, 100 km, $R_S = 100$ ohms.

Déterminer la perte de charge entre les deux extrémités de la ligne, c'est-à-dire :

— le rapport de la différence de potentiel entre les deux conducteurs à la sortie de la ligne et de la différence de potentiel à l'entrée;

— le rapport des courants correspondants.

Montrer que tout au long de la ligne, les distances étant comptées à partir d'une extrémité, on a

$$I(x) = Ae^{-\Gamma x} + Be^{+\Gamma x},$$
$$V(x) = R_i[Ae^{-\Gamma x} - Be^{+\Gamma x}].$$

Déterminer A, B, R_i et Γ en fonction des diverses résistances et de la différence de potentiel appliquée à l'entrée de la double ligne.

III. 3. — On néglige les phénomènes de résistance, mais on est en régime de courant alternatif sinusoïdal. On tiendra donc compte des capacités et des inductances. Une différence de potentiel $v = V_0 \cos \omega t$ est appliquée entre les conducteurs à une extrémité de la ligne. A l'autre extrémité, la résistance R_S est égale à 0.

Calculer le courant débité par la source en fonction de la longueur L de la ligne. Discuter.

Groupe B. 1966

Mathématiques.

5753. — **R** désignant l'ensemble des nombres réels, soit (x, y) un point de $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$; on lui associe le nombre complexe $z = x + iy$ et le nombre complexe conjugué $\bar{z} = x - iy$. Si f est une fonction, à valeurs complexes, de deux variables réelles x et y et si f est dérivable, on pose

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

on appelle $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ les dérivées partielles premières de f par rapport à z et $\bar{z}$; on note $\frac{\partial^{r+s} f}{\partial z^r \partial \bar{z}^s}$ la fonction déduite de f en prenant r fois la dérivée par rapport à z et s fois la dérivée par rapport à $\bar{z}$. On désigne par $\rho = |z|$ le module et par θ l'argument de z, de sorte que $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$.

On rappelle que l'intégrale d'une fonction de partie réelle f_1 et de partie imaginaire f_2 sur un domaine A de $\mathbf{R}^2$ est égale à

$$\iint_A f_1\, dx\, dy + i \iint_A f_2\, dx\, dy.$$

I. — 1° Si f est une fonction de x et de y n fois continûment dérivable dans $\mathbf{R}^2$, on admettra que le reste de son développement de Taylor d'ordre n, au voisinage de $(0, 0)$, est $\sum_{\substack{r+s=n \\ r,s \geq 0}} B_{r,s} x^r y^s$ où les $B_{r,s}$ sont des fonctions continues de (x, y).

Montrer qu'il existe des fonctions $C_{r,s}$ continues de (x, y) [pour $r, s \geqslant 0$, $r + s = n$] telles que

$$f(x, y) = \sum_{r+s\leqslant n-1} \frac{1}{r!s!} \frac{\partial^{r+s} f}{\partial z^r \partial \bar{z}^s}(0, 0) z^r \bar{z}^s + \sum_{r+s=n} C_{r,s} z^r \bar{z}^s.$$

2° E et ε étant des nombres réels tels que $0 < \varepsilon < E$, calculer $J_{r,s} = \iint_{\varepsilon \leqslant |z| \leqslant E} z^r \bar{z}^s \, dx\, dy$, pour r et s entiers positifs ou négatifs; pour quelles valeurs de r et de s, $J_{r,s}$ est-elle nulle?

3° Soit $\varphi(x, y)$ une fonction indéfiniment dérivable dans $\mathbf{R}^2$, on pose

$$I_{n,\varepsilon}(\varphi) = \iint_{\varepsilon \leqslant |z| \leqslant E} \frac{\varphi}{z^n} \, dx\, dy.$$

Montrer que $I_{n,\varepsilon}(\varphi)$ tend vers une limite, qu'on notera $I_n(\varphi)$, quand ε tend vers 0.

4° Calculer $\int_{\gamma_\varepsilon} z^r \bar{z}^s (dx - i\, dy)$, où r et s sont des entiers et γ_ε le cercle de centre $(0, 0)$, de rayon ε, décrit une fois dans un sens qu'on choisira.

On suppose désormais que φ *est nulle en dehors du disque* $|z| \leqslant E$. A l'aide d'une intégration par parties et en appliquant la formule de Riemann, former une relation entre $I_n\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ et $I_{n+1}(\varphi)$.

5° Établir la formule

$$I_n\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\right) = -\frac{\pi}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial z^{n-1}}(0, 0).$$

II. — a et b étant des nombres réels $(a \neq 0)$, ζ étant un nombre complexe variable : $\zeta = \xi + i\eta$ (ξ et η réels), on considère

$$z = \zeta(a + b\bar{\zeta}).$$

1° Montrer que la fonction $\zeta \to z$ établit une correspondance biunivoque, telle que ξ et η soient des fonctions indéfiniment dérivables de x et y, entre un domaine Δ du plan des ζ contenant O et un domaine D du plan des z contenant O, que l'on déterminera. On désignera désormais par $\zeta(z)$ la fonction définie sur D, à valeurs dans Δ, telle que $z = \zeta(a + b\bar{\zeta})$ pout tout $z \in D$.

Quand le point d'affixe ζ décrit la courbe $|\zeta| = \varepsilon$ (pour $\varepsilon > 0$), quelle est la courbe δ_ε décrite par le point d'affixe z ?

Calculer, au troisième ordre près, en fonction de $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, l'aire décrite par le point z quand ζ décrit le rectangle de sommets (ξ, η), $(\xi + \Delta\xi, \eta)$, $(\xi, \eta + \Delta\eta)$, $(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$. En déduire l'expression de $\iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy$, où D_1 est contenu dans D, quand on prend comme variables ξ et η.

2° Soit $J_{n,\varepsilon}(\varphi) = \iint_{|\zeta| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi}{z^n} \, dx\, dy$, où la notation $\iint_{|\zeta| \geqslant \varepsilon}$ désigne l'intégrale étendue au complémentaire, dans $\mathbf{R}^2$, de l'ensemble des $z \in D$ tels que $|\zeta(z)| < \varepsilon$. Établir que $J_{n,\varepsilon}(\varphi)$ tend vers une limite quand ε tend vers 0; on notera cette limite $J_n(\varphi)$.

3° Calculer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_\varepsilon} z^{r-n} \bar{z}^s (dx + i\, dy)$, δ_ε étant décrite dans un sens que l'on précisera.

4° Établir $J_n\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\right) = -\frac{\pi}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial z^{n-1}}(0, 0)$.

III. — Si f et ψ sont deux fonctions indéfiniment dérivables dans $\mathbf{R}^2$, la fonction ψ étant nulle en dehors d'un disque fermé, on pose

$$f * \psi(u, v) = \iint f(x, y) \psi(u - x, v - y)\, dx\, dy,$$

$\iint$ désignant l'intégrale étendue à $\mathbf{R}^2$.

1° Soit g une fonction indéfiniment dérivable dans $\mathbf{R}^2$ telle que $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$; soit C_E le cercle de centre O et de rayon E; C_E étant parcouru dans le sens trigonométrique, établir

$$2\pi E g(0, 0) = \int_{C_E} g\, ds \quad (ds \text{ étant l'élément de longueur sur } C_E)$$

$\Big[$on pourra calculer $\int_{C_E} \frac{g}{z}(dx + i\, dy) - \int_{C_\varepsilon} \frac{g}{z}(dx + i\, dy)$ et faire tendre ε vers $0\Big]$.

2° Soit $w = u + iv$ (u et v réels); soit α une fonction indéfiniment dérivable de u et v nulle en dehors d'un disque centré à l'origine, ne dépendant que de $|w|$ et telle que $\iint \alpha(u, v)\, du\, dv = 1$.

Établir $g \ast \alpha(u, v) = \iint g(u - x, v - y)\, \alpha(x, y)\, dx\, dy = g(u, v)$.

3° Pour toute fonction φ indéfiniment dérivable dans $\mathbf{R}^2$, nulle en dehors d'un disque fermé, on pose $H_n(\varphi) = I_n(\varphi) - J_n(\varphi)$.

Pour $x, y, u, v \in \mathbf{R}$, on pose $\check{\varphi}(x, y) = \varphi(-x, -y)$, $\varphi_{u,v}(x, y) = \varphi(x - u, y - v)$.

On désigne par $(H_n \ast \check{\varphi})$ la fonction définie par

$$(H_n \ast \check{\varphi})(u, v) = H_n(\varphi_{u,v}).$$

On admettra que $(H_n \ast \check{\varphi})$ est une fonction indéfiniment dérivable, satisfaisant à

$$\frac{\partial}{\partial w}(H_n \ast \check{\varphi}) = \left(H_n \ast \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial z}\right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}}(H_n \ast \check{\varphi}) = \left(H_n \ast \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial \bar{z}}\right) \quad (\text{avec } w = u + iv).$$

Établir les résultats suivants :

$$H_n(\varphi) = (H_n \ast \check{\varphi})(0, 0),$$

$$(H_n \ast \check{\varphi}) \ast \check{\alpha} = (H_n \ast \check{\alpha}) \ast \check{\varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}}(H_n \ast \check{\varphi}) = 0 \quad (\text{en utilisant I. 5° et II. 4°}),$$

$$H_n(\varphi) = \iint (H_n \ast \check{\alpha})(x, y)\varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Comparer $I_n(\varphi)$ et $J_n(\varphi)$.

Physique.

Question de cours. — Preuves et conséquence du caractère discontinu de l'électricité. Charge électrique des particules élémentaires.

Problème. — Théorie de l'atmosphère statique. — On utilisera les unités mécaniques du système MKS à l'exception toutefois des cas où l'usage a imposé une autre unité. Ainsi, les pressions seront mesurées en millibars (mb). Un millibar est égal à 100 pascals. Le candidat aura à utiliser la constante des gaz parfaits, R, la constante J et le rapport γ des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants des gaz parfaits diatomiques.

Atmosphère sèche. — 1° Rappeler sous sa forme différentielle la loi fondamentale de l'hydrostatique applicable à un milieu de masse volumique ρ soumis à un champ de pesanteur uniforme. On adoptera la valeur $g = 10$ m/s².

2° On se propose de déterminer l'état d'équilibre hydrostatique d'une atmosphère de température uniforme (isotherme) dans un champ de pesanteur uniforme, étant entendu que l'air est assimilable à un gaz parfait diatomique de masse moléculaire M = 29 grammes.

On adoptera désormais les notations et valeurs numériques suivantes : z est l'altitude; p, ρ, T sont la pression, la masse volumique et la température absolue de l'air à l'altitude z; $p_0 = 1\,000$ mb est la pression à la base de l'atmosphère pratiquement égale à la pression normale de 760 mm de mercure.

$T_0 = 273$ °K est la température à la base de l'atmosphère.

Montrer que l'équilibre correspond à une variation exponentielle de la pression en fonction de l'altitude : $p = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$, où H est une longueur nommée « hauteur d'échelle » de l'atmosphère. Calculer la hauteur d'échelle dans l'atmosphère isotherme $T = T_0$. Représenter graphiquement la variation de la pression en fonction de l'altitude. Préciser la pente de la tangente pour $p = 0$ et $p = p_0$.

Échelle horizontale : 1 cm pour 50 mb.
Échelle verticale : 1 cm pour 2 km.

3° On étudiera de même l'équilibre d'une atmosphère où le gradient vertical de température, $\frac{dT}{dz} = K$, est constant. Indiquer dans quel domaine d'altitude un tel modèle atmosphérique est acceptable.

Déterminer les expressions de la température et de la pression dans une telle atmosphère, en fonction de l'altitude. Représenter graphiquement la variation de la pression sur le diagramme du paragraphe précédent en adoptant la valeur K = — 6 °C/km. On précisera la pente de cette courbe pour $p = p_0$ et $p = 0$.

4° On dit que l'atmosphère est en équilibre adiabatique lorsque la relation $\frac{p}{\rho^\gamma}$ = constante est satisfaite à toute altitude. Déterminer, dans ces conditions, comment varient p et T en fonction de l'altitude. Calculer le gradient vertical de température K_a correspondant à l'équilibre adiabatique.

GROUPE C. 1966

Mathématiques.

I. — 1° a étant un nombre réel non nul, étudier les variations de la fonction

$$(1) \qquad g(x) = \log(1 + ax)$$

et construire la courbe représentative.

2° b étant un nombre réel, $b > 0$, on considère la fonction

$$(2) \qquad h(x) = \log(1 - b^2x^2).$$

Montrer, par récurrence sur k, que h admet des dérivées d'ordre k vérifiant $h^{(k)}(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1 - b^2x^2)^k}$, où P_k est un polynôme en x.

Établir une relation entre P_k, P_{k-1} et P'_{k-1}; calculer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_k. Montrer que la fonction $P_k(x)$ est paire ou impaire suivant que k est pair ou impair.

3° Étudier les variations de la fonction h et construire la courbe représentative.

4° On considère l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} + \gamma h'(x)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0,$$

dans laquelle s est la variable, γ une constante réelle et où h' désigne la dérivée première de la fonction h de la variable x.

Si $x(s)$ est une solution de l'équation (3) admettant des dérivées de tous ordres, montrer que la dérivée d'ordre k de $x(s)$ est égale à

$$\frac{d^kx}{ds^k} = \frac{Q_k(x)}{(1 - b^2x^2)^{k-1}}\left(\frac{dx}{ds}\right)^k,$$

où Q_k est un polynôme en x, dont les coefficients sont les polynômes en γ. Établir une relation entre Q_k, Q_{k-1} et Q'_{k-1}; pour $\gamma > 0$, calculer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de Q_k. Pour quelles valeurs de γ, le polynôme Q_k est-il de degré inférieur à $k - 1$)? La fonction $Q_k(x)$ est-elle paire ou impaire?

II. — Soit f une fonction de la variable réelle x, ayant une dérivée première continue f' dans un intervalle I contenant 0. On considère l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} + f'(x)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0,$$

dans laquelle s est la variable.

1° Soit $x = \varphi(s)$ une solution de (4) et λ une constante réelle; la fonction $\varphi(\lambda s)$ est-elle solution de (4)?

2° Soit $F(x)$ la primitive de la fonction $e^{f(x)}$ qui s'annule pour $x = 0$. Montrer que la fonction réciproque de toute solution de (4) strictement monotone dans un intervalle satisfait à l'équation différentielle [qu'on notera équation (5)] dont les solutions sont $s = s_0 + KF(x)$ [s_0 et K constantes].

3° Dans les questions 3° et 5°, on prend pour f la fonction γg où g est définie par la formule (1) et où γ est une constante réelle.

Intégrer (5) dans ce cas; en déduire les solutions de (4) strictement monotones, puis toutes les solutions de (4); il sera commode d'introduire les constantes : $C = \dfrac{a(\gamma + 1)}{K}$ et $D = 1 - Cs_0$. Pour chaque solution, on indiquera l'intervalle de définition.

4° A partir du développement en série entière de $\dfrac{1}{1 - t}$, calculer, en dérivant $(n - 1)$ fois, le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1 - t)^n}$; quel est son intervalle de convergence?

5° On considère les solutions $x(s)$ de (4) qui s'annulent pour $s = 0$; on désigne par x'_0 la valeur de la dérivée de $x(s)$ pour $s = 0$. Former les développements en série entière de ces solutions, en fonction de $\sigma = x'_0 s$ dans le cas où $\dfrac{1}{\gamma + 1}$ est un entier m positif ou négatif; en déterminer l'intervalle de convergence suivant les valeurs de m.

6° On prend pour f la fonction $-h$, où h est définie par la formule (2). Intégrer l'équation (5), puis l'équation (4) dans ce cas.

7° Dans cette question, on suppose que la fonction f a des dérivées continues jusqu'à l'ordre 4. En fonction des valeurs des dérivées de f pour $x = 0$, former un développement limité, en x, d'ordre 4, des solutions de (5) qui s'annulent pour $x = 0$; puis un développement limité, d'ordre 4, en $\sigma = x'_0 s$ des solutions de (4) qui s'annulent pour $\sigma = 0$ (comme au 5°, x'_0 désigne la valeur de la dérivée de la solution $x(s)$ pour $s = 0$).

Calculer les coefficients de ces deux développements en fonction des nombres réels a, b et γ dans les deux cas suivants :

$$f = \gamma g \quad \text{et} \quad f = \gamma h.$$

Physique.

Question de cours. — Preuves et conséquence du caractère discontinu de l'électricité. Charge électrique des particules élémentaires.

Problème. — Le problème proposé aux candidats du Groupe C était, jusqu'au 10° inclus, exactement le même que celui proposé aux candidats du Groupe B (voir page 338). Par contre les 11°, 12° et 13° étaient différents et étaient à remplacer par les 11° et 12° suivants :

11° Lorsqu'une parcelle d'air saturée d'humidité s'élève sans échanger de chaleur avec l'atmosphère, cette parcelle subit une expansion et un refroidissement qui provoquent la condensation et la précipitation d'une partie de l'eau qu'elle contient. On considère le cycle (OABO) de transformations suivant :

(OA) une parcelle d'air saturée dans les conditions initiales p_0, T_0 s'élève sans échanger de chaleur avec l'atmosphère jusqu'à une altitude où la quasi-totalité de la vapeur d'eau est condensée;

(AB) la parcelle d'air redescend jusqu'au sol sans échanger de chaleur avec l'atmosphère. A la suite des transformations (OAB), la température de la parcelle est T_B;

(BO) l'équilibre thermique entre la parcelle et l'atmosphère se rétablit lentement à la température T_0 et la pression p_0.

Quelle est la quantité de chaleur ΔQ absorbée par 1 gramme d'air de la parcelle pendant la phase (OA)? Donner une estimation approximative du travail de la pression atmosphérique au cours de cycle (OABO). En déduire une valeur approchée de l'écart de température : $\Delta T = T_B - T_0$. On pourra se contenter d'encadrer ΔT entre deux valeurs limites inférieure et supérieure.

12° Quelle condition doivent satisfaire les paramètres atmosphériques pour que l'atmosphère soit absolument exempte de condensation? On admettra que la température minimale atteinte dans l'atmosphère est — 60 °C.

Chimie.

Question de cours. — Le glucose.

Problème. — Même problème que celui proposé aux candidats du Groupe C, avec toutefois les modifications suivantes :
1° Remplacer le texte entre parenthèses à la fin du tableau I par le suivant
(On négligera (H^+) et (OH^-) devant c.)
2° Supprimer la question d) dans la *Deuxième partie* du problème.

Sciences naturelles.

Les vitamines.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Première composition de mathématiques.

5755. — Préambule. — 1° On considère le plan $\mathcal{A}$ de la géométrie affine à deux dimensions sur le corps des réels **R**. Soit $\mathcal{T}_0 = (O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ un repère particulier de $\mathcal{A}$: O est l'origine, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ les vecteurs de base.

On appelle repère *adapté* (sous-entendu, vis-à-vis de $\mathcal{T}_0$) tout repère $(O', \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ tel que, si

$$\boldsymbol{e}'_1 = a_1\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{e}'_2 = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2, \qquad \text{on ait} \qquad a_1b_2 - a_2b_1 = 1.$$

On remarquera que, à partir d'un repère quelconque $(O', \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$, on peut définir une infinité de repères adaptés de même origine et dont les vecteurs de base sont colinéaires à $\boldsymbol{e}'_1$ et à $\boldsymbol{e}'_2$.

Étant donné deux vecteurs quelconques $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ on représente par $|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}|$ le déterminant de leurs composantes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans un repère adapté quelconque :

$$|\boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{v}| = x_1y_2 - x_2y_1.$$

On vérifie immédiatement que le scalaire ainsi défini est indépendant du repère adapté choisi.