Exercice 1

1. Exprimer, a étant un réel, $h_a(x) = \int_0^a \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ à l'aide de la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
   En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 1

1. La fonction $f : (x,t) \mapsto \frac{\cos(tx))}{1+t^2}$ est C^2 sur $\mathbb{R}$ donc h_a de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et

$$h'_a(x) = -\int_0^a \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad h''_a(x) = -\int_0^a \frac{t^2\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

En notant que $h_a(0) = \arctan a$, $j'_a(0) = 0$ on voit que h_a vérifie l'équation différentielle $y'' - y = -\int_0^a \cos(tx)\mathrm{d}t = -\frac{\sin(ax)}{x}$ la fonction du second membre étant prolongée par continuité en 0.
En intégrant par la méthode de variations des constantes, on cherche α, β telles que

$$\alpha'(x)\mathrm{e}^x) + \beta'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0, \qquad \alpha'(x)\mathrm{e}^x - \beta'(x)\mathrm{e}^{-x} = -a\varphi'(ax)$$

D'où, en intégrant par parties,

$$2\alpha(x) = -\int_0^x \mathrm{e}^{-t}a\varphi'(at)\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\varphi(at)\Big]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\varphi(at)\mathrm{d}t$$

$$2\alpha(x) = -\mathrm{e}^{-x}\varphi(ax) - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\varphi(at)\mathrm{d}t$$

Et, de même,

$$2\beta(x) = \mathrm{e}^x\varphi(ax) - \int_0^x \mathrm{e}^t\varphi(at)\mathrm{d}t$$

On en déduit $2h_a(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\varphi(at)\mathrm{d}t - \mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t\varphi(at)\mathrm{d}t$
Enfin, tenant compte des conditions initiales,

$$h_a(x) = \arctan(a)\,\cosh(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t\varphi(at)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\varphi(at)\mathrm{d}t$$

Puisque $\lim\limits_{a\to+\infty}\varphi(ax) = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$ les fonctions exp, φ sont uniformément majorées sur $[-|x|,|x|]$ et on peut, par limite sous signe somme obtenir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi\cosh(x)}{2} - \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 1)$$

$$= \frac{\pi\,\cosh(x)}{2} - \frac{\mathrm{sgn}(x)\pi\,\sinh(x)}{2} = \frac{\pi}{2}(\cosh(x) - |\sinh(x)|) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$$