Université de Lorraine **année 2022-2023**

M2 MFA – Agrégation de Mathématiques

Probabilités et nombre de partitions d'un entier

Exercice 1. Soit $t > 0$. On suppose que sous la loi $\mathbb{P}^t$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes avec pour tout k, $1 + X_k \sim \mathcal{G}(1 - e^{-kt})$; autrement dit pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}^t(X_k = n) = (1 - e^{-kt})e^{-kn}$. On pose $S = \sum_{k=1}^{+\infty} kX_k$.

1. Montrer que $\mathbb{P}^t(X_k > 0$ pour une infinité de valeurs de $k) = 0$. En déduire que S prend presque sûrement des valeurs entières.
2. Pour $n \geqslant 0$, on pose $\Pi(n) = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}; \sum_{k=1}^{+\infty} kx_k = n\}$. Les éléments de $\Pi(n)$ sont appelés les partitions de l'entier n. On note $p(n) = |\Pi(n)|$ le nombre de partitions de l'entier n. Montrer que pour $n \geqslant 0$ et $x \in \Pi(n)$,
$$\mathbb{P}^t(X = x) = e^{-tn} \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - e^{-kt}).$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a
$$\mathbb{P}^t(S = n) = p(n)e^{-tn} \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - e^{-kt}).$$
En déduire que $\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - e^{-kt}) > 0$ et la valeur du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} p(n)z^n$.
On pose dans la suite pour $|z| < 1$, $P(z) = \sum_{n\geqslant 0} p(n)z^n$. Montrer que
$$P(e^{-t}) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - e^{-kt}}.$$
4. La question précédente établit un lien entre les nombres de partitions $p(n)$ et la loi de la variable S.
Par définition, la famille aléatoire $X = (X_n)_{n\geqslant 1}$ est une partition aléatoire de l'entier aléatoire S.
Montrer que sachant $S = n$, X suit la loi uniforme sur $\Pi(n)$.
[Cette question, culturelle, ne servira pas dans la suite.]
5. On note ϕ_t la fonction caractéristique de S sous $\mathbb{P}^t$. Montrer que pour tout u réel
$$\phi_t(u) = \frac{P(e^{iu-t})}{P(e^{-t})}.$$
6. Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$,
$$p_n = P(e^{-t})e^{nt}\mathbb{P}^t(S = n) = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{i\theta-t})\, d\theta.$$

7. On note $\mathbb{E}^t$ l'espérance sous $\mathbb{P}^t$.
   (a) Montrer que
$$\mathbb{E}^t(S) = \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{+\infty} tf(kt),$$
   avec $f(u) = \frac{ue^{-u}}{1-e^{-u}}$.
   (b) Montrer que $\lim_{t\to 0}\sum_{k=1}^{+\infty} tf(kt) = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \frac{\pi^2}{6}$.
   Indications : on pourra remarquer, d'une part remarquer que f est décroissante, d'autre part écrire f sous la forme d'une série de fonctions.
   (c) En déduire que si une suite t_n vérifie $t_n \sim \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$, alors $\mathbb{E}^{t_n}(S) \sim n$.

Notons que S est une somme de variables indépendantes ; lorsque $\mathbb{E}^{t_n}(S)$ est proche de n, on peut « donc » espérer estimer $\mathbb{P}^{t_n}(S=n)$ à l'aide d'un théorème central limite local ; c'est ce qui est fait dans le sujet Mines MP 2022, avec la formule de notre question 5 (et c'est délicat). On obtient que
$$\mathbb{P}^{t_n}(S=n) \sim \frac{n^{-3/4}}{2.6^{1/4}}.$$
Ce résultat est à comparer au résultat bien connu : si des variables X_k indépendantes suivent la loi de Bernoulli de paramètre 1/2 et qu'on pose $S_n = X_1 + \dots X_n$, alors
$$\mathbb{P}(S_{2n} = \mathbb{E}(S_{2n})) = \mathbb{P}(S_{2n} = n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

D'autre part avoir un développement asymptotique de $P(e^{-t})$ quand t est proche de 0 peut être fait à l'aide de la formule d'Euler–Mac-Laurin (c'est fait dans le sujet Mines PSI 2022 ; voir de Bruijn, *Asymptotic Analysis* pour la méthode). On obtient
$$\log P(e^{-t}) = \frac{\pi^2}{6t} + \log\sqrt{\frac{t}{2\pi}} + o(1)$$
En prenant $t = t_n$ dans la formule de la question 5, les deux mis ensemble donnent
$$p(n) \sim \frac{\exp(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}})}{4\sqrt{3}n},$$
qui est le résultat de Hardy et Ramanujan (1918).

Note : pour rédiger ce texte, j'ai notamment consulté :

— Première épreuve du concours Mines-Pont 2022, série MP
— Première épreuve du concours Mines-Pont 2022, série PSI
— Hawes, R. (2005). A probabilistic approach to the asymptotics of integer partitions In S. Barber, P.D. Baxter, K.V.Mardia, and R.E. Walls (Eds.), Quantitative Biology, Shape Analysis, and Wavelets, pp. 142-145. Leeds, Leeds University Press.