DES COSH CONSÉCUTIFS ENTIERS

• Soit un réel $\theta > 0$ et un entier $n \geq 2$ tels que $\cosh n\theta$ et $\cosh(n+1)\theta$ soient entiers.

1. • Montrer que $x = \cosh\theta$ est racine d'un polynôme du second degré $X^2 + pX + q$ à coefficients entiers, coefficients à déterminer en fonction de $a = \cosh n\theta$ et de $b = \cosh(n+1)\theta$.

2. • Soit $m = n^2 - 1$. Montrer que $\cosh m\theta$ et $\cosh(m+1)\theta$ sont entiers.

3. • Montrer que $x = \cosh\theta$ est racine d'un autre polynôme du second degré $X^2 + rX + s$ à coefficients entiers, lesquels coefficients sont à déterminer en fonction de $c = \cosh m\theta$ et de $d = \cosh(m+1)\theta$.

4. • Montrer que $x = \cosh\theta$ est rationnel.

5. • Montrer que $x = \cosh\theta$ est entier.

---

1. • On a : $b = \cosh(n+1)\theta = \cosh n\theta \cosh\theta + \sinh n\theta \sinh\theta$
$= ax + \sqrt{a^2-1}\,\sqrt{x^2-1}$, d'où : $(a^2-1)(x^2-1) = (b-ax)^2$, et par suite :
$x^2 - 2abx + a^2 + b^2 - 1 = 0$.

2. • Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme T_n tel que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on ait : $\cosh n\theta = T_n(\cosh\theta)$. Ce sont les *polynômes de Tchebychev de première espèce*, définis par : $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, et la relation de récurrence : $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$, conséquence de :

$\cosh(n+1)\theta + \cosh(n-1)\theta = 2\cosh\theta\cosh n\theta$.

Ces polynômes T_n sont donc à coefficients entiers.

• Il en résulte : $c = \cosh m\theta = \cosh((n-1)(n+1)\theta)$
$= T_{n-1}(\cosh(n+1)\theta) = T_{n-1}(b)$, qui est donc un entier.

• Et de plus : $d = \cosh(m+1)\theta = \cosh(n^2\theta) = T_n(\cosh n\theta) = T_n(a)$, qui est aussi un entier.

3. • Comme à la question 1, en remplaçant : n par m, et a par c, et b par d, il vient : $x^2 - 2cdx + c^2 + d^2 - 1 = 0$.

4. • L'inégalité : $n \geq 2$ implique : $m = n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \geq n+1 > n$, d'où (puisque $\theta > 0$) : $c = \cosh m\theta > \cosh n\theta = a$, et :

$d = \cosh(m+1)\theta > \cosh(n+1)\theta = b$.

Et comme $b > a > 0$, on en déduit : $cd > ab > 0$.

• En soustrayant les égalités : $x^2 - 2abx + a^2 + b^2 - 1 = 0$ et :

$x^2 - 2cdx + c^2 + d^2 - 1 = 0$, il vient : $2(cd - ab)x - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2) = 0$, soit, puisque $cd - ab \neq 0$: $x = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(cd-ab)}$, rationnel.

5. • On a donc : $x = \frac{u}{v}$, $u \in \mathbf{N}^*$, $v \in \mathbf{N}^*$, u et v premiers entre eux. On a vu à la question 1 que : $x^2 + px + q = 0$, avec p et q entiers. Il en résulte : $u^2 + puv + qv^2 = 0$, soit : $u^2 = v(-pu - qv)$. L'entier v est premier avec u^2 tout en divisant u^2 : il est donc égal à 1, et finalement : $x = u \in \mathbf{N}^*$.

Roger CUCULIÈRE • Lycée Pasteur, 92200 Neuilly-sur-Seine
• 22/10/2006 • <*rcuculiere@free.fr*> • ®©