Agrégation interne - Mathématiques

Concours 2016 : Correction de l'épreuve 1

Thierry Gaspari, février 2016

Partie I.

1. - Supposons $\|a-a'\| \leq 2$. Alors $\|\frac{a+a'}{2} - a\| = \frac{1}{2}\|a'-a\| \leq 1$.
   De même $\|\frac{a+a'}{2} - a'\| = \frac{1}{2}\|a-a'\| \leq 1$. Ainsi les boules $B(a,1)$ et $B(a',1)$ ne sont pas disjointes puisqu'elles ont le point $\frac{a+a'}{2}$ en commun. Par contraposée, si $B(a,1)$ et $B(a',1)$ sont disjointes alors $\|a-a'\| > 2$.
   - Pour la réciproque, supposons que $\|a-a'\| > 2$.
   Soit x dans $B(a,1)$. Alors, avec l'inégalité triangulaire :
   $$\|a'-x\| \geq \|a'-a\| - \|x-a\| > 1.$$
   Donc $x \notin B(a',1)$. Et ainsi $B(a,1)$ et $B(a',1)$ sont disjointes.

2. - Supposons que $\|a-a'\| = 2$. On pose $w = \frac{a+a'}{2}$. Alors
   $$\|a-w\| = \|a'-w\| = \frac{1}{2}\|a-a'\| = 1.$$
   Donc w est bien dans l'intersection des boules $B(a,1)$ et $B(a',1)$.
   Si y est un point d'intersection de $B(a,1)$ et de $B(a',1)$, alors l'inégalité triangulaire donne :
   $$2 = \|a-a'\| \leq \|a-y\| + \|y-a'\| \leq 2.$$
   On est donc dans le cas d'égalité, donc puisque la norme est euclidienne : $a-y$ et $a'-y$ sont des vecteurs colinéaires. Et ils sont tous deux de norme 1.
   Si $a-y = a'-y$ alors $a = a'$, absurde car $\|a-a'\| = 2$. Donc $a-y = -(a'-y)$, puis $y = \frac{a+a'}{2}$.
   On a donc bien montré que les boules $B(a,1)$ et $B(a',1)$ sont tangentes et que w est leur seul point d'intersection.
   - Supposons maintenant que les boules $B(a,1)$ et $B(a',1)$ sont tangentes. Alors elles ne sont pas disjointes donc, d'après (1), $\|a-a'\| \leq 2$.
   Si $\|a-a'\| < 2$ alors $\|a-w\| < 1$ et $\|a'-w\| < 1$, donc w serait dans l'intérieur des deux boules, donc un voisinage de w (et donc une infinité de points) serait dans l'intersection des deux boules, ce qui contredit l'hypothèse qu'elles sont tangentes.
   Ainsi $\|a-a'\| = 2$.
   On a bien l'équivalence demandée.

3. On remarque que $a = 2b$ et $a' = 2b'$ (ici faites un dessin). Raisonnons par équivalence :
   $$B(a,1) \cap B(a',1) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \|2b-2b'\| > 2 \Leftrightarrow \|b-b'\|^2 > 1 \Leftrightarrow \|b\|^2 + \|b'\|^2 - 2\langle b, b'\rangle > 1$$
   Puisque $\|b\| = \|b'\| = 1$ on a bien :
   $$B(a,1) \cap B(a',1) = \emptyset \Leftrightarrow \langle b, b'\rangle < \frac{1}{2}.$$

Pour l'autre équivalence, en suivant les mêmes calculs (on notera α la mesure dans $[-\pi, \pi[$ de l'angle $(\overrightarrow{Ob}, \overrightarrow{Ob'})$) :

$$\begin{aligned}
B(a,1) \text{ et } B(a',1) \text{ sont tangentes} \quad &\Leftrightarrow \quad \|2b - 2b'\| = 2 \Leftrightarrow \langle b, b' \rangle = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \|b\| \times \|b'\| \times cos(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{le triangle de sommets } O, b, b' \text{ est isocèle avec un angle égal à } \tfrac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{le triangle de sommets } O, b, b' \text{ est équilatéral.}
\end{aligned}$$

4. Ici $n = 2$. On fera évidemment un dessin !
   Quitte à renuméroter on peut supposer que les boules sont dans le même 'sens' que sur la figure (la deuxième est à côté de la première, etc...). On pose par convention $b_{\tau_2+1} = b_1$ pour simplifier.
   Pour tout i entre 1 et τ_2, l'angle formé par les points (b_i, O, b_{i+1}) a une mesure au moins égale à $\frac{\pi}{3}$. Ainsi, si on note S la somme pour i allant de 1 à τ_2 de ces angles, on a $S \geq \tau_2 \times \frac{\pi}{3}$.
   Mais d'autre part $S \leq 2\pi$, donc $\tau_2 \leq 6$.
   La configuration représentée sur le dessin montre aussi que $\tau_2 \geq 6$.
   Finalement $\tau_2 = 6$.

5. Ici $n = 8$.
   (a) D'une part : $Card(A) = \frac{2^8}{2} = 2^7 = 128$.
   D'autre part : $Card(B) = \binom{8}{2} \times 2^2 = 112$.
   Puisque A et B sont disjoints, on conclut que :

$$Card(C) = Card(A) + Card(B) = 240.$$

   Notons que ce nombre 240 *apparaît plus tard dans l'énoncé, c'est plutôt rassurant.*
   Si $x \in A$, alors $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} (\frac{\sqrt{2}}{4})^2 = 1$.
   Si $x \in B$, alors $\|x\|^2 = (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 \times 2 = 1$.
   Ainsi $C \subset S_7$.

   (b) Soient x et y deux éléments distincts de C.
   - Si x et y sont dans A : alors il existe un indice i_1 tel que $x_{i_1} = -y_{i_1}$. Puisque les produits $\prod x_i$ et $\prod y_i$ ont le même signe, on peut même affirmer l'existence d'un deuxième indice $i_2 \neq i_1$ tel que $x_{i_2} = -y_{i_2}$. Ainsi :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{6} (\frac{\sqrt{2}}{4})^2\Big) - 2 \times (\frac{\sqrt{2}}{4})^2 \leq \frac{1}{2}.$$

   - Si l'un (par exemple x) est dans A et l'autre (y) est dans B : alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \{i_1, i_2\}} x_i y_i \leq 2 \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

   - Enfin, si x et y sont tous deux dans B : notons $I = \{i_1, i_2\}$ (respectivement $J = \{j_1, j_2\}$) les deux indices correspondant aux coordonnées non nulles de x (respectivement de y).

. Si $I \cap J = \emptyset$: alors $\langle x, y\rangle = 0$.

. Si $I \cap J$ est réduit à un indice, par exemple $i_1 = j_1$: alors $\langle x, y\rangle = x_{i_1} y_{i_1} = \pm\frac{1}{2}$.

. Si $I = J = \{i_1, i_2\}$: pour au moins un de ces deux indices on a $x_{i_k} = -y_{i_k}$, sinon on aurait $x = y$. Ainsi $\langle x, y\rangle \leq 0$.

En conclusion de tous ces cas, on peut bien conclure que pour tous x et y distincts dans C, $\langle x, y\rangle \leq \frac{1}{2}$.

(c) Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des boules de centre $2x$ et de rayon 1 avec $x \in C$.
D'après (3) et $(5-b)$, toutes ces boules sont disjointes ou tangentes.
D'après $(5a)$, $\|2x\| = 2$ donc d'après (2), toutes ces boules sont tangentes à $B(0, 1)$.
Enfin, d'après $(5a)$, il y a 240 boules dans $\mathcal{B}$.
On peut donc conclure que $\tau_8 \geq 240$.

Les parties II,III et IV auront pour objectif de démontrer qu'il y a en fait égalité.
Fin de la partie I.

Partie II.

6. Soient x dans $B(0, 1)$ et σ dans G.
Alors $\|\sigma(x)\| = \|x\| \leq 1$ donc $\sigma(x) \in B(0, 1)$.

7. Soit $f \in C_n$. t_σ est la restriction d'une application linéaire donc est de classe C^2, $t_\sigma(B(0, 1))$ est contenue (et même égale) à $B(0, 1)$, donc $f \circ t_\sigma$ est de classe C^2 par composée.
Ainsi $f \circ t_\sigma \in C_n$.
Calculons le laplacien de $f \circ t_\sigma$.
On a : $t_\sigma = (t_{\sigma,1}, \dots, t_{\sigma,n})$ où chaque $t_{\sigma,i}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.
D'après les formules de calcul différentiel (dans toute la suite, quand ce n'est pas précisé les indices iront de 1 à n) :
$$\frac{\partial(f \circ t_\sigma)}{\partial x_i} = \sum_j \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ t_\sigma\right) \times \frac{\partial t_{\sigma,j}}{\partial x_i}\right).$$
Or $t_{\sigma,j}$ est une forme linéaire donc $\dfrac{\partial t_{\sigma,j}}{\partial x_i} = t_{\sigma,j}(e_i)$ où $(e_1, \dots, e_n)$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi :
$$\frac{\partial(f \circ t_\sigma)}{\partial x_i} = \Big(\sum_j t_{\sigma,j}(e_i) \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big) \circ t_\sigma.$$
On continue à dériver :
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(f \circ t_\sigma)}{\partial x_i^2} &= \sum_j \Big(t_{\sigma,j}(e_i) \sum_k \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \circ t_\sigma\big) \times t_{\sigma,k}(e_i)\Big) \\ &= \Big(\sum_{j,k} t_{\sigma,j}(e_i) \times t_{\sigma,k}(e_i) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}\Big) \circ t_\sigma.\end{aligned}$$
On peut alors calculer le laplacien :
$$\begin{aligned}\Delta(f \circ t_\sigma) &= \Big(\sum_{i,j,k} t_{\sigma,j}(e_i) \times t_{\sigma,k}(e_i) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}\Big) \circ t_\sigma \\ &= \Big(\sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \sum_i t_{\sigma,j}(e_i) \times t_{\sigma,k}(e_i)\Big) \circ t_\sigma.\end{aligned}$$

C'est le moment d'utiliser le fait que σ est un endomorphisme orthogonal. On note $A=(a_{i,j})$ la matrice de t_σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Par définition on a : $t_{\sigma,k}(e_i)=a_{k,i}$. Et $t_{\sigma,j}(e_i)=a_{j,i}=b_{i,j}$ où $(b_{i,j})=\ {}^tA$.
On sait que $A\ {}^tA=I_n$, donc pour tout (k,j) :

$$\sum_i t_{\sigma,j}(e_i)\times t_{\sigma,k}(e_i)=\sum_i a_{k,i}b_{i,j}=(A\ {}^tA)_{k,j}=\delta_{k,j}$$

avec $\delta_{k,j}=1$ si $k=j$, 0 sinon.
En réinjectant dans la somme on obtient :

$$\Delta(f\circ t_\sigma)=\Big(\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\Big)\circ t_\sigma=\Delta(f)\circ t_\sigma.$$

8. - Supposons que $f\in M_k$. Soit $\sigma\in G$. Notons $A=(a_{i,j})$ la matrice de σ dans la base canonique.

$$\begin{aligned} f\circ t_\sigma(x) &= f\big(t_\sigma(\sum_{i=1}^n x_ie_i)\big)=f\big(\sum_{i=1}^n x_it_{\sigma(e_i)}\big)\\ &= f\big(\sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n a_{i,j}e_j\big)=f\big(\sum_{i=1}^n x_ia_{i,1},\ldots,\sum_{i=1}^n x_ia_{i,n}\big).\end{aligned}$$

Cette dernière expression sera alors une combinaison linéaire de termes qui sont tous de la forme $P=(\sum_{i=1}^n x_ia_{i,1})^{\alpha_1}\ldots(\sum_{i=1}^n x_ia_{i,n})^{\alpha_n}$. Chacun de ces produits P pourra être développé pour s'écrire comme combinaison linéaire de termes de la forme $x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}$, avec la somme des coefficients β_i qui sera toujours égale à k.
En bref, $f\circ t_\sigma\in M_k$.
- Supposons que $f\in H_k$.
Alors $f\in M_k$ et $\Delta(f)=0$. Donc $f\circ t_\sigma\in M_k$ et $\Delta(f\circ t_\sigma)=\Delta(f)\circ t_\sigma=0$.
Donc $f\circ t_\sigma\in H_k$.

9. Soient f et g dans C_n, soit σ dans G.
Avec le changement de variable $x=t_\sigma(u)$:

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \frac{1}{V(B(0,1))}\int_{B(0,1)} f(x)g(x)dx_1\ldots dx_n\\ &= \frac{1}{V(B(0,1)}\int_{t_\sigma^{-1}(B(0,1))} f(t_\sigma(u))g(t_\sigma(u))|Jac(t_\sigma)(u)|du_1\ldots du_n.\end{aligned}$$

Or t_σ^{-1} est un endomorphisme orthogonal donc $t_\sigma^{-1}(B(0,1))=B(0,1)$.
Puisque t_σ est orthogonal, la valeur absolue du jacobien vaut 1.
On a bien : $\langle f,g\rangle=\langle f\circ t_\sigma,g\circ t_\sigma\rangle$.

10. Soit $f\in M_k$ tel que pour tout σ de G, $f\circ t_\sigma=f$.

   (a) Soient x et y dans $B(0,1)$ tels que $\|x\|=\|y\|$.
   Le gorupe orthogonal $G=O_n(\mathbb{R})$ agit de façon transitive sur la sphère $S(0,\|x\|)$, donc il existe σ dans G tel que $\sigma(x)=y$.
   Alors $f(x)=f\circ t_\sigma(x)=f(y)$.

(b) Soit $t \in [-1,1]$. $\|(0,\dots,0,t)\| = \|(0,\dots,0,-t)\|$ donc d'après (a) :

$$g(t) = g(-t) = g(|t|) = f(0,\dots,0,t).$$

Soit $x \in B(0,1)$. $\|x\| = \|(0,\dots,0,\|x\|)\|$ donc d'après (a) :

$$f(x) = f(0,\dots,0,\|x\|) = g(\|x\|).$$

(c) On suppose $f \neq 0$. Ainsi $g \neq 0$ d'après (b). Puisque $f \in M_k$, on a :

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_1^{\alpha_{i,1}} \dots x_n^{\alpha_{i,n}} \text{ avec } \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} = 1 \text{ pour tout } i \text{ entre 1 et } q.$$

Prenons t dans $[0,1]$ tel que $g(t) \neq 0$.
On a : $g(t) = f(0,\dots,0,t) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i 0^{\alpha_{i,1}} \dots 0^{\alpha_{i,n-1}} t^{\alpha_{i,n}}$.
Puisque $g(t) \neq 0$ il existe au moins un indice i tel que $\alpha_{i,1} = \ldots = \alpha_{i,n-1} = 0$ (on a alors $\alpha_{i,n} = k$). Notons I l'ensemble des indices i vérifiant cette propriété.
On a : $g(t) = \big(\sum_{i\in I} \beta_i\big) t^k$, ce qui s'écrit $g(t) = \lambda t^k$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (sinon g serait nul).
Enfin $g(t) = g(-t)$ donc ce polynôme est pair donc k est pair.
On a bien :

$$\forall x \in B(0,1), f(x) = g(\|x\|) = \lambda \|x\|^k.$$

Fin de la partie II.

Partie III.

11. (a) Soit $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, soit $s > 0$.
Si P s'annule sur $]-s,s[$, alors le polynôme P a une infinité de racines, donc P est nul, et ainsi $a_i = 0$ pour tout i de $[\![0,k]\!]$.

(b) - Pour $n = 1$: La famille $(x^\alpha)_{\alpha=\alpha_1 \leq k}$ est la famille libre de polynômes d'une variable $(1, X, \dots, X^k)$.
- Supposons que $(x^\alpha)_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ avec $\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leq k$ est libre.
Notons J_{n+1} l'ensemble des $(n+1)$-uplets $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1})$ tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} \leq k$.
Prenons des scalaires $(\beta_\alpha)_{\alpha \in J_{n+1}}$ tels que : $\sum_{\alpha \in J_{n+1}} \beta_\alpha x^\alpha = 0$.
On a alors : $\forall x = (x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \in B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)$, $\sum_{\alpha \in J_{n+1}} \beta_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = 0$.
Prenons $(x_1,\dots,x_n)$ dans la boule ouverte (de $\mathbb{R}^n$) de centre O et de rayon 1. Il existe un réel $s > 0$ tel que pour tout t de $]-s,s[$, $(x_1,\dots,x_n,t) \in B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0,1)$.
Donc : $\forall t \in]-s,s[$, $\sum_{\alpha \in J_{n+1}} \beta_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} t^{\alpha_{n+1}} = 0$.
On note $J_{n+1}^{(i)} = \{\alpha \in J_{n+1}, \alpha_{n+1} = i\}$ et : $a_i = \sum_{\alpha \in J_{n+1}^{(i)}} \beta_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Alors l'égalité précédente se réécrit : $\forall t \in]-s,s[,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i t^i = 0$.

D'après $(11-a)$, a_i est nul pour tout i de $[\![0,k]\!]$.

Pour i fixé on a alors : pour tout $(x_1,\dots,x_n)$ dans la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$, on a : $\displaystyle\sum_{\alpha\in J_{n+1}^{(i)}} \beta_\alpha x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} = 0$.

Par continuité cette égalité reste vraie pour tout $(x_1,\dots,x_n)$ dans la boule fermée $B(0,1)$.

Par hypothèse de récurrence : $\forall\alpha\in J_{n+1}^{(i)}, \beta_\alpha = 0$. Puisque ceci est vrai pour tout i de $[\![0,k]\!]$, on a : $\forall\alpha\in J, \beta_\alpha = 0$. Donc la famille $(x^\alpha)_{\alpha\in J_{n+1}}$ est bien libre.

Grâce au principe de récurrence la propriété est donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

(c) M_k est engendré par un nombre fini d'éléments.

En effet la partie $\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n, \alpha_1+\dots+\alpha_n = k\}$ est finie.

Donc M_k est un sous-espace vectoriel de dimension dinie de C_n.

12. Déjà $K \subset G$.

L'identité stabilise e_n donc est dans K.

Si $\sigma_1\in K$ et $\sigma_2\in K$ alors $\sigma_1\circ\sigma_2^{-1}(e_n) = \sigma_1(e_n) = e_n$, donc $\sigma_1\circ\sigma_2^{-1}\in K$.

Ainsi K est un sous-groupe de G.

Remarquons que si $\sigma\in K$ alors $\mathbb{R}e_n$ est stable par l'endomorphisme orthogonal σ, donc $(\mathbb{R}e_n)^\perp = Vect(e_1,\dots,e_{n-1})$ est aussi stable par σ. Ainsi $\sigma_{|Vect(e_1,\dots,e_{n-1})}$ est bien définie et est encore un endomorphisme orthogonal.

On peut donc définir

$$T : K \to O_{n-1}(\mathbb{R}), \sigma\mapsto T(\sigma) = \sigma_{|Vect(e_1,\dots,e_{n-1})}.$$

T est bien définie, T est un morphisme de groupes.

T est injective car si $T(\sigma_1) = T(\sigma_2)$, alors σ_1 et σ_2 coïncident en $e_1,\dots,e_{n-1}$, mais aussi en e_n car ce sont des éléments de K, donc $\sigma_1 = \sigma_2$.

T est surjective car si $s\in O_{n-1}(\mathbb{R})$ alors $s = T(\sigma)$ en posant $\sigma(e_k) = s(e_k)$ pour tout k entre 1 et $n-1$, et $\sigma(e_n) = e_n$.

En conclusion, K est isomorphe à $O_{n-1}(\mathbb{R})$.

13. φ est évidemment linéaire.

$$\begin{aligned}
\varphi(c_0,\dots,c_{[\frac{k}{2}]}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall(x_1,\dots,x_n)\in B(0,1), \sum_j c_j(x_1^2+\dots x_{n-1}^2)^j x_n^{k-2j} = 0\\
&\Rightarrow \quad \forall(x_1,x_n) \text{ tels que } x_1^2+x_n^2\le 1, \sum_j c_j x_1^{2j}x_n^{k-2j} = 0\\
&\Rightarrow \quad \forall j, c_j = 0 \text{ en appliquant } (11-b).
\end{aligned}$$

Donc φ est injective.

Soit f dans l'image de φ.

Alors il existe $(c_0,\dots,c_{[\frac{k}{2}]})$ tel que pour tout $(x_1,\dots,x_n)$ de $B(0,1)$:

$$f(x_1,\dots,x_n) = \varphi(c_0,\dots,c_{[\frac{k}{2}]})(x_1,\dots,x_n) = \sum_j c_j(x_1^2+\dots x_{n-1}^2)^j x_n^{k-2j}.$$

Soit σ dans K. Alors $t_\sigma(e_n) = e_n$ donc :

$$\langle t_\sigma(x_1,\dots,x_n), e_n\rangle = \langle t_\sigma(x_1,\dots,x_n), t_\sigma(e_n)\rangle = \langle (x_1,\dots,x_n), e_n\rangle = x_n.$$

Puis :

$$\begin{aligned} f\circ t_\sigma(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_j c_j\big(\|t_\sigma(x_1,\ldots,x_n)\|^2-\langle t_\sigma(x_1,\ldots,x_n),e_n\rangle^2\big)^j\langle t_\sigma(x_1,\ldots,x_n),e_n\rangle^{k-2j}\\ &= \sum_j c_j\big(\|(x_1,\ldots,x_n)\|^2-x_n^2\big)^j x_n^{k-2j}\\ &= f(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Ainsi $Im(\varphi)\subset\{f\in M_k,\forall\sigma\in K, f\circ t_\sigma=f\}$.

Réciproquement, prenons f dans M_k telle que : $\forall\sigma\in K, f\circ t_\sigma=f$. Puisque $f\in M_k$ elle s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions de la forme : $g_i(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n^{k-i}$ avec $i\in[\![0,k]\!]$ et $g_i\in M_i^{(n-1)}$, le $(n-1)$ signifiant que g_i est une fonction de $(n-1)$ variables.
Soit s dans $O_{n-1}(\mathbb{R})$ et σ dans K tel que $s=T(\sigma)$.
Puisque $f(x_1,\ldots,x_n)=f(t_\sigma(x_1,\ldots,x_n))$ et d'après les résultats de liberté prouvés en $(11-b)$, on a : pour tout i, $g_i\circ t_s=g_i$.
Ceci étant vrai pour tout s de $O_{n-1}(\mathbb{R})$, on peut appliquer $(10-c)$:
i est pair et $g_i(x_1,\ldots,x_{n-1})=\lambda_i\|(x_1,\ldots,x_{n-1})\|^i$.
En écrivant $i=2j$ on a bien :

$$f(x_1,\ldots x_n)=\sum_j d_j(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)^j x_n^{k-2j}.$$

Ceci prouve bien l'inclusion réciproque recherchée, donc :

$$Im(\varphi)=\{f\in M_k,\forall\sigma\in K, f\circ t_\sigma=f\}.$$

14. Soit $f=\varphi(c_0,\ldots,c_{[\frac{k}{2}]})$.

(a) Soit σ dans K. D'après (13), $f\circ t_\sigma=f$.
Donc $\Delta(f)=\Delta(f\circ t_\sigma)=\Delta(f)\circ t_\sigma$ grâce à $(II-7)$.
Mais attention, $\Delta(f)$ n'est plus dans M_k mais dans M_{k-2}, donc $\Delta(f)$ est dans $Im(\varphi_1)$, où φ_1 est définie comme φ mais sur $\mathbb{R}^{[(k-2)/2]+1}=\mathbb{R}^{[k/2]}$.
Ainsi il existe des scalaires $d_0,\ldots,d_{[\frac{k}{2}]-1}$ tels que :

$$\Delta f(x)=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]-1} d_i x_n^{k-2-2i}(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)^i.$$

Puis, en posant $j=i+1$:

$$\Delta f(x)=\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} d_{j-1}x_n^{k-2j}(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)^{j-1}.$$

Ce qui est bien du type désiré. On admettra que des arguments de calcul différentiel devraient (?) permettre de démontrer les relations :

$$d_{j-1}=\alpha_j c_j+\beta_j c_{j-1}$$

avec α_j et β_j comme dans l'énoncé.

(b) Soit $f \in R_k$. Alors $f \in Im(\varphi)$ et s'écrit :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j c_j (x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2)^j x_n^{k-2j}.$$

En utilisant les résultats de liberté prouvés en $(11-b)$:

$$f \in R_k \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(f) = 0 \Leftrightarrow \forall j, \alpha_j c_j + \beta_j c_{j-1} = 0.$$

Comme les α_j et β_j sont non nuls on en déduit de proche en proche une expression de chaque c_j en fonction de c_0, de la forme $c_j = \varepsilon_j c_0$. Ainsi $f = \varphi(c_0, \varepsilon_1 c_0, \ldots, \varepsilon_{[\frac{k}{2}]} c_0) \in Vect(u)$ avec $u = \varphi(1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{[\frac{k}{2}]})$ qui est non nul puisque φ est injective.
Donc R_k est bien de dimension 1.

(c) Soit f dans R_k.
$c_j c_{j-1} = -c_{j-1}^2 \dfrac{\beta_j}{\alpha_j} < 0$.
Notons $p_k(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} c_j (1 - X^2)^j X^{k-2j}$.
En effet, la notation p_k qui sera introduite plus tard correspond effectivement à ce polynôme.
Tous ses termes sont dans $\mathbb{R}_k[X]$ donc $p_k \in \mathbb{R}_k[X]$.
De plus son coefficient de degré k vaut : $a_k = \displaystyle\sum_j c_j (-1)^j$, or $c_j c_{j-1} < 0$ donc tous les termes $c_j(-1)^j$ sont de même signe, et aucun n'est nul. Donc $a_k \neq 0$, donc $deg(p_k) = k$.

15. Soit $a \in S_{n-1}$.

(a) L'application $\Psi : H_k \to \mathbb{R}, f \mapsto \Psi(f) = f(a)$ est une forme linéaire sur H_k qui est un espace euclidien.
Donc il existe un unique $f_a \in H_k$ tel que : $\forall f \in H_k, \ \langle f, f_a \rangle = f(a)$.

(b) Soit σ dans G avec $\sigma(a) = a$. On remarque qu'on a alors $t_\sigma^{-1}(a) = a$. Pour tout f de H_k :

$$\begin{aligned} \langle f, f_a \circ t_\sigma \rangle &= \langle f \circ t_\sigma^{-1} \circ t_\sigma, f_a \circ t_\sigma \rangle \\ &= \langle f \circ t_\sigma^{-1}, f_a \rangle \quad \text{(d'après } (II-9)) \\ &= f \circ t_\sigma^{-1}(a) = f(a). \end{aligned}$$

Grâce à l'unicité prouvée en (a) : $f_a \circ t_\sigma = f_a$.

(c) Avec $a = e_n$ on a : pour tout σ dans K, $f_{e_n} \circ t_\sigma = f_{e_n}$.
D'après $(II-13)$, f_{e_n} est dans $Im(\varphi)$. Ainsi il existe $(c_0, \ldots, c_{[\frac{k}{2}]})$ tel que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in S_{n-1}, \ \ f_{e_n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j c_j (x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2)^j x_n^{k-2j}.$$

En remarquant que $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = 1 - x_n^2$, on a :

$$\forall x \in S_{n-1}, \ \ f_{e_n}(x) = \sum_j c_j (1 - x_n^2)^j x_n^{k-2j} = p_k(x_n)$$

où p_k est le polynôme introduit à la question $(14-c)$.

L'unicité est immédiate puisque si $p_k(x_n) = q_k(x_n)$ pour tout x dans S_{n-1}, alors $p_k(t) = q_k(t)$ pour tout t de $[-1, 1]$, donc les polynômes p_k et q_k coïncident pour un nombre infini de valeurs donc sont égaux.

(d) D'après $(14 - c)$, $deg(p_k) = k$ et le coefficient dominant a_k de p_k est du signe de c_0.
Or $c_0 = p_k(1) = f_{e_n}(e_n) = \langle f_{e_n}, f_{e_n} \rangle > 0$, donc $a_k > 0$.

(e) Soit σ dans G tel que $\sigma(e_n) = a$. On a alors : $t_\sigma^{-1}(a) = e_n$.
Soit $f \in H_k$.

$$\begin{aligned} \langle f, f_a \circ t_\sigma \rangle &= \langle f \circ t_\sigma^{-1} \circ t_\sigma, f_a \circ t_\sigma \rangle \\ &= \langle f \circ t_\sigma^{-1}, f_a \rangle \quad \text{(d'après } (II - 9)) \\ &= f \circ t_\sigma^{-1}(a) = f(e_n) = \langle f, f_{e_n} \rangle. \end{aligned}$$

Grâce à l'unicité de $(15 - a)$: $f_a \circ t_\sigma = f_{e_n}$.
Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Puisque σ^{-1} est orthogonal :

$$\langle x, a \rangle = \langle \sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(a) \rangle = \langle \sigma^{-1}(x), e_n \rangle.$$

(f) Puisque la base est orthonormale et que $f_a \in H_k$:

$$f_a = \sum_i \langle f_a, u_i \rangle u_i = \sum_i u_i(a) u_i$$

(g) Soit $b \in S_{n-1}$. Posons $c = \sigma^{-1}(b) \in S_{n-1}$.
D'après (f) : $f_a(b) = \sum_i u_i(a) u_i(b)$.
Encore d'après (f) : $f_b(a) = \sum_i u_i(b) u_i(a) = f_a(b)$.
D'après (e) : $\langle a, b \rangle = \langle \sigma^{-1}(b), e_n \rangle$, puis :

$$\begin{aligned} p_k(\langle a, b \rangle) &= p_k(\langle c, e_n \rangle) = f_{e_n}(c) \\ &= f_a \circ t_\sigma(c) \quad \text{avec } (e) \\ &= f_a(b). \end{aligned}$$

On a bien :

$$f_a(b) = f_b(a) = p_k(\langle a, b \rangle) = \sum_i u_i(a) u_i(b).$$

Fin de la partie III.

Partie IV.

16. Ici $k = 0$. $H_0 = \mathbb{R}_0[X]$.
Soit $f_a = C_2$ fixée. Pour tout $f = C_1$ dans H_0 : $\langle f, f_a\rangle = C_1C_2 = f(a) = C_1$.
Donc $f_a = C_2 = 1$. Donc $p_0 = 1$.

17. - Pour $k = 1$, d'après la formule obtenue en $(III - 14 - c)$:

$$p_1(X) = \sum_{j=0}^{0} c_j(1 - X^2)^j X^{1-2j} = c_0X$$

donc p_1 est bien de la forme $p_1(X) = \lambda X$ avec $\lambda = c_0 > 0$ (on a vu en $(III - 15 - d)$ que le coefficient dominant de p_k est toujours strictement positif).

- Pour $k = 2$:

$$p_2(X) = \sum_{j=0}^{1} c_j(1 - X^2)^j X^{2-2j} = c_0X^2 + c_1(1 - X^2)$$

avec $c_1 = -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}c_0$ et d'après $(III - 14 - a)$: $\beta_1 = 2$ et $\alpha_1 = 2(n - 1)$.
Ainsi $c_1 = -\frac{c_0}{n-1}$ puis, en posant $\lambda_2 = \frac{c_0}{n-1} > 0$:

$$p_2(X) = c_0(X^2 - \frac{1}{n-1}(1 - X^2)) = \lambda_2(nX^2 - 1).$$

18. Soient $v_1, \ldots, v_m$ dans S_{n-1}. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant (III-15-g) :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} p_k(\langle v_i, v_j\rangle) &= \sum_{i,j,q} u_q(v_i)u_q(v_j) = \sum_q \Big(\sum_{i,j} u_q(v_i)u_q(v_j)\Big) \\
&= \sum_q \Big(\sum_i \big(u_q(v_i)\sum_j u_q(v_j)\big)\Big) = \sum_q \Big(\big(\sum_i u_q(v_i)\big)\big(\sum_j u_q(v_j)\big)\Big) \\
&= \sum_q \big(\sum_i u_q(v_i)\big)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

19. D'une part :

$$S = \sum_{i,j} f(\langle v_i, v_j\rangle) = \sum_k a_k \sum_{i,j} p_k(\langle v_i, v_j\rangle) = a_0 \sum_{i,j} 1 \ + \sum_{k=1}^{s} a_k \sum_{i,j} p_k(\langle v_i, v_j\rangle)$$

car $p_0 = 1$. Puisque tous les a_k et tous les termes $\displaystyle\sum_{i,j} p_k(\langle v_i, v_j\rangle)$ sont positifs ou nuls, on a :

$$S \geq m^2 a_0.$$

D'autre part, si $i \neq j$ alors $f(\langle v_i, v_j\rangle) \leq 0$, d'où :

$$S = \sum_{i=j} f(1) + \sum_{i\neq j} f(\langle v_i, v_j\rangle) \leq \sum_{i=j} f(1) \leq mf(1).$$

On a donc :

$$m^2 a_0 \leq S \leq mf(1),$$

donc (puisque $a_0 > 0$) :

$$m \leq \frac{f(1)}{a_0}.$$

20. On revient ici au cas $n = 8$. On rappelle qu'en $(I - 5 - c)$ on avait prouvé que $\tau_8 \geq 240$.
D'après $(I - 5 - b)$, τ_8 est le plus grand entier m tel qu'il existe $v_1, \ldots, v_m$ dans S_{n-1} tels que $\langle v_i, v_j \rangle \leq \frac{1}{2}$ dès que $i \neq j$.
D'après (19), un tel entier m vérifie : $m \leq \frac{f(1)}{a_0}$ pour toute fonction f s'écrivant comme dans la question (19).
En particulier, prenons $f = p_0 + p_1 + \dfrac{5}{7}p_2 + \dfrac{13}{28}p_3 + \dfrac{19}{84}p_4 + \dfrac{5}{56}p_5 + \dfrac{5}{252}p_6$.
On a bien, en utilisant la factorisation donnée dans l'énoncé, f négative ou nulle sur $[-1, \frac{1}{2}]$.
On peut donc affirmer que $m \leq \frac{f(1)}{a_0}$.
Or $f(1) = 240$ et $a_0 = 1$, donc $m \leq 240$. Par conséquent $\tau_8 \leq 240$.
En conclusion : $\tau_8 = 240$.

Fin de la partie IV.

Partie V.

21. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On utilise toujours (III-15-g) :

$$\sum_{i,j} p_k(\langle v_i, v_j \rangle) x_i x_j = \sum_q \sum_{i,j} x_i x_j u_q(v_i) u_q(v_j) = \sum_q \Big(\sum_i x_i u_q(v_i) \Big)^2 \geq 0.$$

Donc la matrice de coefficients $p_k(\langle v_i, v_j \rangle)$ est positive.

22. Soit S symétrique positive de rang $\leq n$, de coefficients diagonaux égaux à 1.

(a) S est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée, donc il existe $P \in O_m(\mathbb{R})$ et $D = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0)$ avec tous les $\alpha_i \geq 0$, telles que $S = {}^tPDP$.
La suite est un peu compliquée par rapport aux formats demandés.
On pose alors D' la matrice diagonale de taille (n, n) égale à $diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, Δ la matrice égale à $diag(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$ de sorte que $\Delta^2 = D'$.
On note P_1 la matrice de taille (n, n) extraite de P en prenant les n premières lignes et colonnes.
On note P_2 la matrice de taille $(n, m - n)$ extraite de P en prenant les n premières lignes et les colonnes de $n + 1$ à m.
Enfin on pose $A = (P_1 | P_2)$, c'est à dire A est la matrice de taille (n, m) obtenue par concaténation horizontale de P_1 et P_2.
En effectuant les produits matriciels par blocs on a bien : ${}^tAA = S$.

(b) Notons M_1 la matrice $(p_k(s_{i,j}))_{i,j}$.
Notons aussi X_i le i-ème vecteur colonne de la matrice A qui vient d'être obtenue.
L'égalité $S = {}^tAA$ se traduit par : pour tout (i, j), $s_{i,j} = \langle X_i, X_j \rangle$.
Ainsi $\|X_i\|^2 = s_{i,i} = 1$. Donc tous les vecteurs X_i sont dans S_{n-1}.
On peut alors déduire de $(V - 21)$ que la matrice M_1 est positive.

(c) Soit R une matrice symétrique positive.
La somme des coefficients de R est égale à ${}^tXRX$, où X est le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1. Puisque R est positive, cette somme est bien positive.

(d) On applique (22-b) avec $k = 2$: la matrice de coefficients $p_2(s_{i,j})$ est positive.
Donc, avec (22-c) : $\displaystyle\sum_{i,j} p_2(s_{i,j}) \geq 0$.
Or, d'après (IV-17) : $p_2(X) = \lambda_2(nX^2 - 1)$ avec $\lambda_2 > 0$.
On a ainsi : $\displaystyle\sum_{i,j} (ns_{i,j}^2 - 1) \geq 0$.
Donc : $\displaystyle n \sum_{i,j} s_{i,j}^2 \geq \sum_{i,j} 1 \geq m^2$. Finalement :

$$\sum_{i,j} s_{i,j}^2 \geq \frac{m^2}{n}.$$