Soit un chien courant après une balle. Les deux objets sont modélisés, dans un repère orthogonal orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par les points C et B et par les vecteurs $\vec{c}(t) = \overrightarrow{OC}$ et $\vec{b}(t) = \overrightarrow{OB}$.

1 Vitesse du chien proportionnelle à la distance avec la balle

Nous supposerons que le chien court, dans la direction de la balle, d'autant plus vite que la balle est éloignée de lui : $\exists v_c \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t} = v_c \times \overrightarrow{CB}$.

1.1 Balle à vitesse constante

Supposons que la balle aille en ligne droite et qu'elle ne subisse aucune force. Sa vitesse est donc constante : $\exists v_b \in \mathbb{R}_+^*, \vec{b}(t) = (v_b \cdot t, 0)$.

1.1.1 Equations horaires :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t} = v_c \times \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t} = v_c(b_x - c_x) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t} = v_c(b_y - c_y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(t) = v_c v_b t - v_c \cdot c_x(t) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(t) = -v_c \cdot c_y(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(t) + v_c \cdot c_x(t) = v_c v_b t \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(t) + v_c \cdot c_y(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (q, q') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} c_x(t) = q e^{-v_c t} + v_b t - \dfrac{v_b}{v_c} \\ c_y(t) = q' e^{-v_c t} \end{cases}$$

Or d'après les conditions initiales :

$$\begin{cases} c_x(0) = q e^0 + 0 - \dfrac{v_b}{v_c} \\ c_y(0) = q' e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = c_x(0) + \dfrac{v_b}{v_c} \\ q' = c_y(0) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} c_x(t) = \left(c_x(0) + \dfrac{v_b}{v_c}\right) e^{-v_c t} + v_b t - \dfrac{v_b}{v_c} \\ c_y(t) = c_y(0) \cdot e^{-v_c t} \end{cases}$$

1.1.2 Distance entre le chien et la balle :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(c_x - b_x)^2 + (c_y - b_y)^2} \\ &= \sqrt{\left(\left(c_x(0) + \frac{v_b}{v_c}\right) e^{-v_c t} + v_b t - \frac{v_b}{v_c} - v_b t\right)^2 + (c_y(0) \cdot e^{-v_c t} - 0)^2} \\ &= \sqrt{\left(\left(c_x(0) + \frac{v_b}{v_c}\right) e^{-v_c t} - \frac{v_b}{v_c}\right)^2 + c_y(0)^2 \cdot e^{-2v_c t}} \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi le chien ne peut théoriquement jamais atteindre sa balle. Quelques soient les conditions initiales de position ou de vitesse, la distance entre la balle et le chien tendra vers $\dfrac{v_b}{v_c}$ puisque $\lim\limits_{t\to\infty} BC = \dfrac{v_b}{v_c}$.

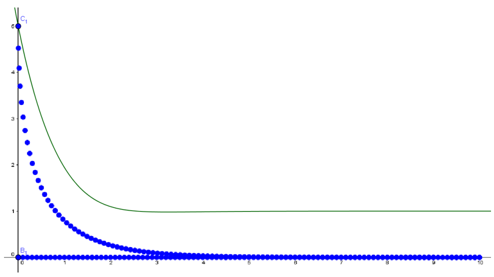

FIGURE 1 – $c_x(0) = 0$ et $v_b = v_c$

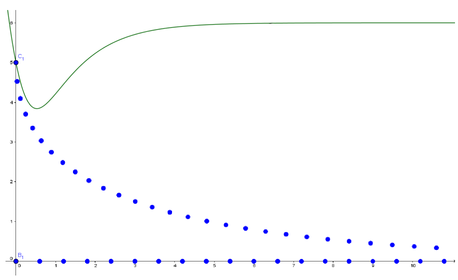

FIGURE 2 – $c_x(0) = 0$ et $v_b > v_c$

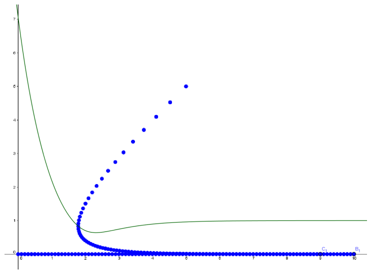

FIGURE 3 – $c_x(0) = 5$ et $v_b = v_c$

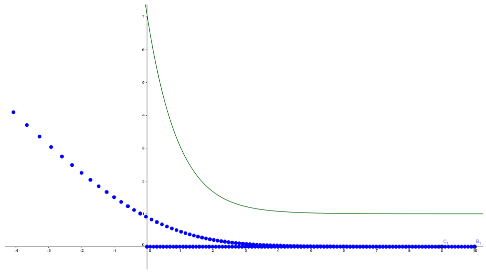

FIGURE 4 – $c_x(0) = -5$ et $v_b = v_c$

1.2 Balle ralentie

Supposons que la balle subit des forces de frottements proportionnelles à sa vitesse. Elle possède donc une accélération égale à : $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{b}}{\mathrm{d}t^2} = -f \times \dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$ avec $f \in \mathbb{R}_+$, soit $\dfrac{\mathrm{d}^2 b_x}{\mathrm{d}t^2} + f \times \dfrac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}, \dfrac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} = re^{-ft} \Leftrightarrow \exists (r, r') \in \mathbb{R}^2, b_x(t) = r' - \dfrac{r}{f}e^{-ft}$. Or $\vec{b}(0) = (0,0) \Rightarrow 0 = r' - \dfrac{r}{f}e^0 \Leftrightarrow \dfrac{r}{f} = r' \Leftrightarrow r = fr'$. En posant $v_b = r' > 0$, on a $b_x(t) = v_b(1 - e^{-ft})$.

1.2.1 Equations horaires :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t} = v_c \times \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t} = v_c(b_x - c_x) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t} = v_c(b_y - c_y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(t) = v_c v_b(1 - e^{-ft}) - v_c \cdot c_x(t) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(t) = -v_c \cdot c_y(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(t) + v_c \cdot c_x(t) = v_c v_b(1 - e^{-ft}) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(t) + v_c \cdot c_y(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (q, q') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} c_x(t) = v_b - \dfrac{v_c v_b}{v_c - f}e^{-ft} + qe^{-v_c t} \\ c_y(t) = q'e^{-v_c t} \end{cases}$$

Or d'après les conditions initiales :

$$\begin{cases} c_x(0) = v_b - \dfrac{v_c v_b}{v_c - f} e^0 + q e^0 \\ c_y(0) = q' e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = c_x(0) + \dfrac{v_b f}{v_c - f} \\ q' = c_y(0) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} c_x(t) = v_b - \dfrac{v_c v_b}{v_c - f} e^{-ft} + \left(c_x(0) + \dfrac{v_b f}{v_c - f} \right) e^{-v_c t} \\ c_y(t) = c_y(0) \cdot e^{-v_c t} \end{cases}$$

1.2.2 Distance entre le chien et la balle :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(c_x - b_x)^2 + (c_y - b_y)^2} \\ &= \sqrt{\left(v_b - \frac{v_c v_b}{v_c - f} e^{-ft} + \left(c_x(0) + \frac{v_b f}{v_c - f} \right) e^{-v_c t} - v_b(1 - e^{-ft}) \right)^2 + (c_y(0) \cdot e^{-v_c t} - 0)^2} \\ &= \sqrt{\left(v_b - \frac{v_c v_b}{v_c - f} e^{-ft} + c_x(0) \cdot e^{-v_c t} + \frac{v_b f}{v_c - f} e^{-v_c t} - v_b + v_b e^{-ft} \right)^2 + c_y(0)^2 \cdot e^{-2 v_c t}} \\ &= \sqrt{\left(\left(v_b - \frac{v_c v_b}{v_c - f} \right) e^{-ft} + c_x(0) \cdot e^{-v_c t} + \frac{v_b f}{v_c - f} e^{-v_c t} \right)^2 + c_y(0)^2 \cdot e^{-2 v_c t}} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{v_b f}{v_c - f} e^{-ft} + c_x(0) \cdot e^{-v_c t} + \frac{v_b f}{v_c - f} e^{-v_c t} \right)^2 + c_y(0)^2 \cdot e^{-2 v_c t}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{v_b f}{v_c - f} (e^{-v_c t} - e^{-ft}) + c_x(0) \cdot e^{-v_c t} \right)^2 + c_y(0)^2 \cdot e^{-2 v_c t}} \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi le chien ne peut théoriquement jamais atteindre sa balle. Mais quelques soient les conditions initiales de position ou de vitesse, la distance entre la balle et le chien tendra vers 0 puisque $\lim_{t \to \infty} BC = 0$

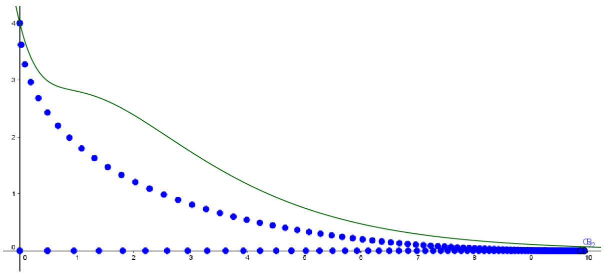

Figure 5 – $c_x(0) = 0$ et $f = 0,5$

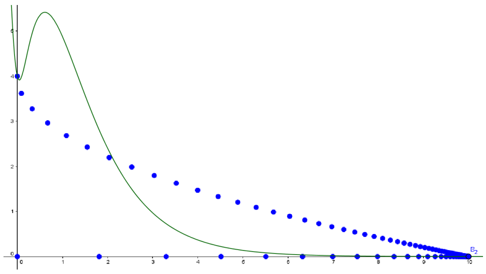

Figure 6 – $c_x(0) = 0$ et $f = 2$

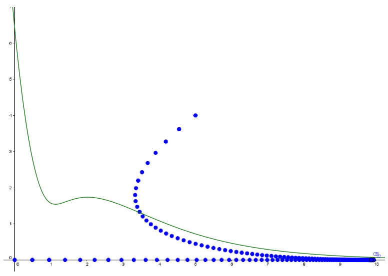

Figure 7 – $c_x(0) = 5$ et $f = 0.5$

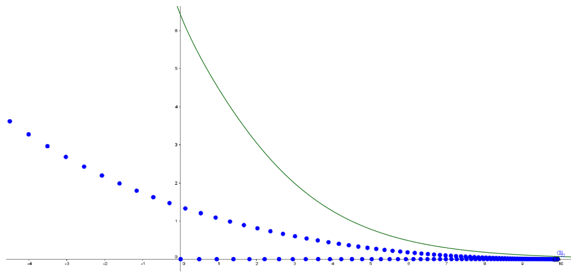

Figure 8 – $c_x(0) = -5$ et $f = 0.5$

1.3 Balle en accélération

Supposons que la balle se déplace sur l'axe des abscisses ($c_y(t) = 0$) et qu'elle ait une accélération constante $\dfrac{\mathrm{d}^2 b_x}{\mathrm{d}t^2} = a \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} = at + v_b \Leftrightarrow b_x(t) = \dfrac{a}{2}t^2 + v_b t$.

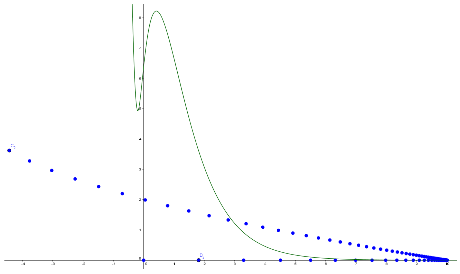

FIGURE 9 – $c_x(0) = -5$ et $f = 2$

1.3.1 Equations horaires :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t} = v_c \times \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t} = v_c(b_x - c_x) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t} = v_c(b_y - c_y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(t) = v_c \dfrac{a}{2} t^2 + v_c v_b t - v_c \cdot c_x(t) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(t) = -v_c \cdot c_y(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(t) + v_c \cdot c_x(t) = v_c \dfrac{a}{2} t^2 + v_c v_b t \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(t) + v_c \cdot c_y(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (q, q') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} c_x(t) = q e^{-v_c t} + \dfrac{a}{2} t^2 + \dfrac{v_b v_c - a}{v_c} t + \dfrac{a - v_b v_c}{v_c^2} \\ c_y(t) = q' e^{-v_c t} \end{cases}$$

Or d'après les conditions initiales :

$$\begin{cases} c_x(0) = q e^0 + \dfrac{a - v_b v_c}{v_c^2} \\ c_y(0) = q' e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = c_x(0) + \dfrac{v_b v_c - a}{v_c^2} \\ q' = c_y(0) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} c_x(t) = \left(c_x(0) + \dfrac{v_b v_c - a}{v_c^2} \right) e^{-v_c t} + \dfrac{a}{2} t^2 + \dfrac{v_b v_c - a}{v_c} t + \dfrac{a - v_b v_c}{v_c^2} \\ c_y(t) = c_y(0) \cdot e^{-v_c t} \end{cases}$$

1.3.2 Distance entre le chien et la balle :

$$BC = \sqrt{(c_x - b_x)^2 + (c_y - b_y)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\left(c_x(0) + \frac{v_b v_c - a}{v_c^2}\right) e^{-v_c t} + \frac{a}{2}t^2 + \frac{v_b v_c - a}{v_c}t + \frac{a - v_b v_c}{v_c^2} - \frac{a}{2}t^2 - v_b t\right)^2 + (c_y(0) \cdot e^{-v_c t})^2}$$

$$= \sqrt{\left(\left(c_x(0) + \frac{v_b v_c - a}{v_c^2}\right) e^{-v_c t} - \frac{a}{v_c}t + \frac{a - v_b v_c}{v_c^2}\right)^2 + c_y(0)^2 \cdot e^{-2v_c t}} \neq 0$$

Ainsi le chien ne peut théoriquement jamais atteindre sa balle. En fait, quelques soient les conditions initiales de position ou de vitesse, il s'en éloigne contituellement puisque $BC \underset{t\to\infty}{\sim} \left|\frac{a}{v_c}t - \frac{a - v_b v_c}{v_c^2}\right| \Rightarrow \lim_{t\to\infty} BC = \infty$.

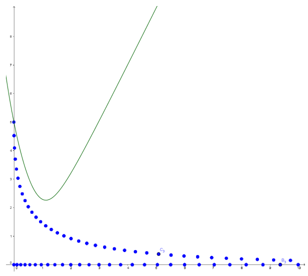

FIGURE 10 – $c_x(0) = 0$ et $a = 2$ et $v_b = 1$

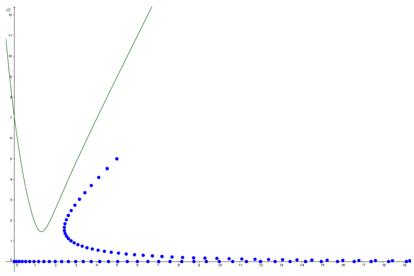

FIGURE 11 – $c_x(0) = 5$ et $a = 2$ et $v_b = 1$

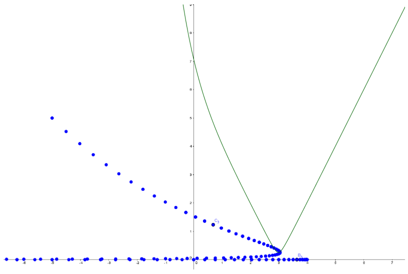

FIGURE 12 – $c_x(0) = -5$ et $a = -2$ et $v_b = 4$

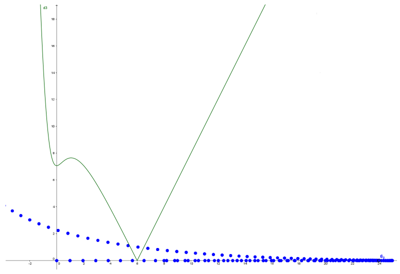

FIGURE 13 – $c_x(0) = -5$ et $a = -2$ et $v_b = 10$

2 Accélération du chien proportionnelle à la distance avec la balle

Nous supposerons que le chien court, dans la direction de la balle, d'autant plus vite que la balle est éloignée de lui : $\exists v_c \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{c}}{\mathrm{d}t^2} = v_c \times \overrightarrow{CB}$. De plus, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t}(0) = (0, 0)$.

2.1 Balle à vitesse constante

Supposons que la balle aille en ligne droite et qu'elle ne subisse aucune force. Sa vitesse est donc constante : $\exists v_b \in \mathbb{R}_+^*, \vec{b}(t) = (v_b \cdot t, 0)$.

2.1.1 Equations horaires :

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{c}}{\mathrm{d}t^2} = v_c \times \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2c_x}{\mathrm{d}t^2} = v_c(b_x - c_x) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^2c_y}{\mathrm{d}t^2} = v_c(b_y - c_y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2c_x}{\mathrm{d}t^2}(t) = v_c v_b t - v_c \cdot c_x(t) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^2c_y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -v_c \cdot c_y(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2c_x}{\mathrm{d}t^2}(t) + v_c \cdot c_x(t) = v_c v_b t \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^2c_y}{\mathrm{d}t^2}(t) + v_c \cdot c_y(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (q, q', k, k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} c_x(t) = q\cos(\sqrt{v_c}t) + q'\sin(\sqrt{v_c}t) + v_b t \\ c_y(t) = k\cos(\sqrt{v_c}t) + k'\sin(\sqrt{v_c}t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(t) = -q\sqrt{v_c}\sin(\sqrt{v_c}t) + q'\sqrt{v_c}\cos(\sqrt{v_c}t) + v_b \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(t) = -k\sqrt{v_c}\sin(\sqrt{v_c}t) + k'\sqrt{v_c}\cos(\sqrt{v_c}t) \end{cases}$$

Or d'après les conditions initiales :

$$\begin{cases} c_x(0) = q\cos(0) + q'\sin(0) + 0 \\ c_y(0) = k\cos(0) + k'\sin(0) \\ \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(0) = -q\sqrt{v_c}\sin(0) + q'\sqrt{v_c}\cos(0) + v_b = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(0) = -k\sqrt{v_c}\sin(0) + k'\sqrt{v_c}\cos(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x(0) = q \\ c_y(0) = k \\ q'\sqrt{v_c} + v_b = 0 \\ k'\sqrt{v_c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = c_x(0) \\ k = c_y(0) \\ q' = -\dfrac{v_b}{\sqrt{v_c}} \\ k' = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} c_x(t) = c_x(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) - \dfrac{v_b}{\sqrt{v_c}}\sin(\sqrt{v_c}t) + v_b t \\ c_y(t) = c_y(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) \end{cases}$$

2.1.2 Distance entre le chien et la balle :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(c_x - b_x)^2 + (c_y - b_y)^2} \\ &= \sqrt{(c_x(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) - \frac{v_b}{\sqrt{v_c}}\sin(\sqrt{v_c}t) + v_b t - v_b t)^2 + (c_y(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) - 0)^2} \\ &= \sqrt{(c_x(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) - \frac{v_b}{\sqrt{v_c}}\sin(\sqrt{v_c}t))^2 + c_y(0)^2\cdot\cos^2(\sqrt{v_c}t)} \\ &< \sqrt{\left(c_x(0) + \frac{v_b}{\sqrt{v_c}}\right)^2 + c_y(0)^2} \end{aligned}$$

Cherchons si le chien atteind sa balle : $BC = 0 \Leftrightarrow (c_x(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) - \dfrac{v_b}{\sqrt{v_c}}\sin(\sqrt{v_c}t))^2 + c_y(0)^2\cdot\cos^2(\sqrt{v_c}t) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_x(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) - \dfrac{v_b}{\sqrt{v_c}}\sin(\sqrt{v_c}t) = 0 \\ c_y(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) = \dfrac{v_b}{\sqrt{v_c}}\sin(\sqrt{v_c}t) \\ c_y(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) = 0 \end{cases}$$

Supposons par l'absurde $\cos(\sqrt{v_c}t) = 0$. On a donc $\sin(\sqrt{v_c}t) = \pm 1 \neq 0 \Rightarrow \frac{v_b}{\sqrt{v_c}}\sin(\sqrt{v_c}t) \neq 0$ puisque $v_b \neq 0$. Donc $c_x(0) \cdot \cos(\sqrt{v_c}t) \neq 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{v_c}t) \neq 0$. C'est absurde. D'où $\cos(\sqrt{v_c}t) \neq 0$. On en déduit :

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{v_c}t)}{\cos(\sqrt{v_c}t)} = \dfrac{c_x(0)\sqrt{v_c}}{v_b} \\ c_y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(\sqrt{v_c}t) = \dfrac{c_x(0)\sqrt{v_c}}{v_b} \\ c_y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{v_c}t \equiv \tan^{-1}\left(\dfrac{c_x(0)\sqrt{v_c}}{v_b}\right) [\pi] \\ c_y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \equiv \dfrac{1}{\sqrt{v_c}}\tan^{-1}\left(\dfrac{c_x(0)\sqrt{v_c}}{v_b}\right)\left[\dfrac{\pi}{\sqrt{v_c}}\right] \\ c_y(0) = 0 \end{cases}$$

Ainsi le chien peut théoriquement atteindre sa balle si et seulement si $c_y(0) = 0$, c'est à dire si sa position initiale est dans l'axe de la trajectoire de sa balle. Dans ce cas, il l'atteindra à intervalles de temps régulier de durée $\frac{\pi}{\sqrt{v_c}}$. Dans tous les cas la distance le séparant de sa balle est bornée ($< \sqrt{\left(c_x(0) + \frac{v_b}{\sqrt{v_c}}\right)^2 + c_y(0)^2}$) et est périodique de période $\frac{2\pi}{\sqrt{v_c}}$. Il est aussi possible que BC soit constant si $c_x(0) = 0$ et $c_y(0) = \frac{v_b}{\sqrt{v_c}} \Leftrightarrow c_y(0)\sqrt{v_c} = v_b$.

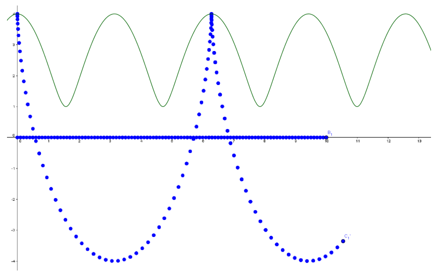

FIGURE 14 – $\vec{c}(0) = (0, 4)$ et $c_y(0)\sqrt{v_c} \neq v_b$

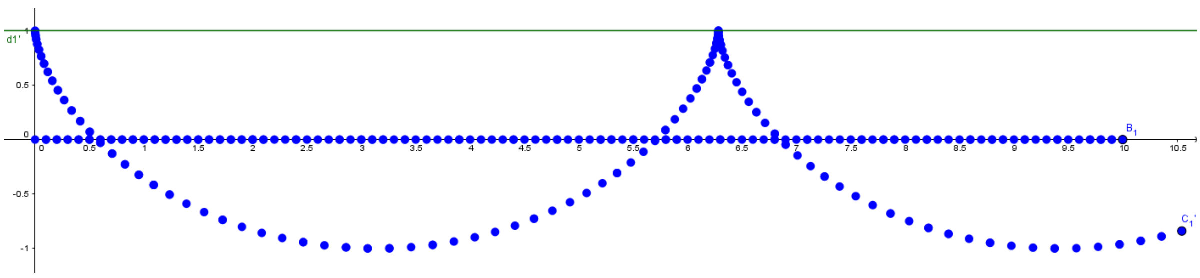

FIGURE 15 – $\vec{c}(0) = (0, 1)$ et $c_y(0)\sqrt{v_c} = v_b$

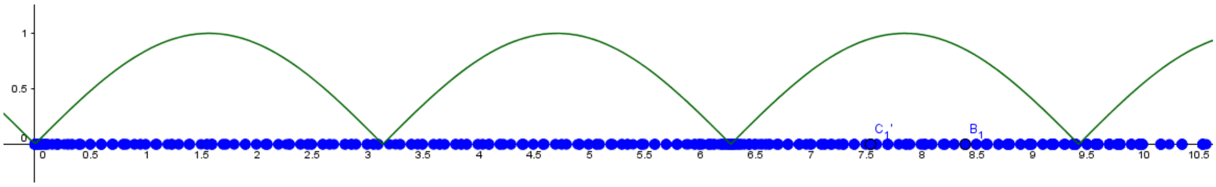

FIGURE 16 – $\vec{c}(0) = (0,0)$

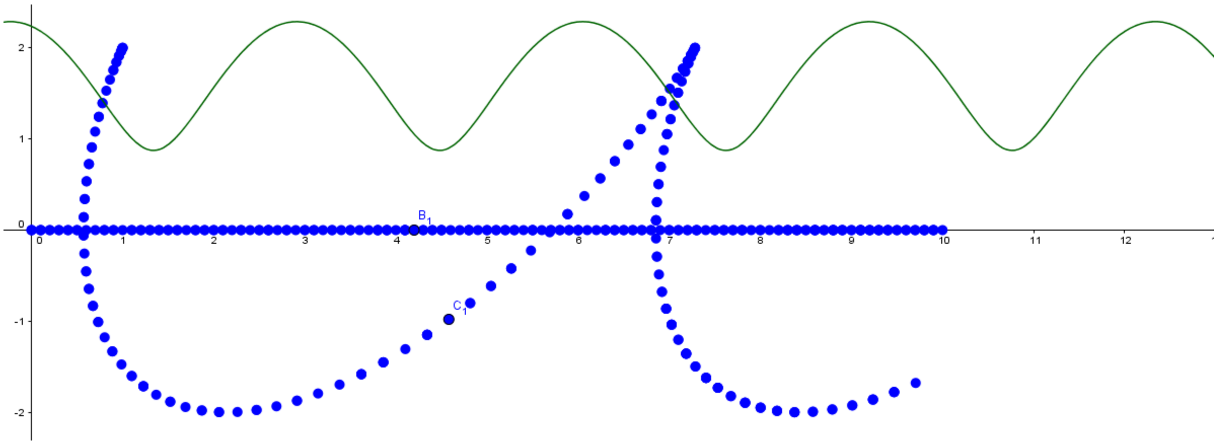

FIGURE 17 – $\vec{c}(0) = (1,2)$

2.2 Balle ralentie

Supposons que la balle subit des forces de frottements proportionnelles à sa vitesse. Elle possède donc une accélération égale à : $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{b}}{\mathrm{d}t^2} = -f \times \dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$ avec $f \in \mathbb{R}_+$, soit $\dfrac{\mathrm{d}^2 b_x}{\mathrm{d}t^2} + f \times \dfrac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}, \dfrac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} = re^{-ft} \Leftrightarrow \exists (r,r') \in \mathbb{R}^2, b_x(t) = r' - \dfrac{r}{f}e^{-ft}$. Or $\vec{b}(0) = (0,0) \Rightarrow 0 = r' - \dfrac{r}{f}e^0 \Leftrightarrow \dfrac{r}{f} = r' \Leftrightarrow r = fr'$. En posant $v_b = r' > 0$, on a $b_x(t) = v_b(1 - e^{-ft})$.

2.2.1 Equations horaires :

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{c}}{\mathrm{d}t^2} = v_c \times \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 c_x}{\mathrm{d}t^2} = v_c(b_x - c_x) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 c_y}{\mathrm{d}t^2} = v_c(b_y - c_y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 c_x}{\mathrm{d}t^2}(t) = v_c v_b(1 - e^{-ft}) - v_c \cdot c_x(t) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 c_y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -v_c \cdot c_y(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 c_x}{\mathrm{d}t^2}(t) + v_c \cdot c_x(t) = v_c v_b(1 - e^{-ft}) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 c_y}{\mathrm{d}t^2}(t) + v_c \cdot c_y(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(q,q',k,k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} c_x(t) = q\cos(\sqrt{v_c}t) + q'\sin(\sqrt{v_c}t) - \dfrac{v_cv_b}{v_c+f^2}e^{-ft} + v_b \\ c_y(t) = k\cos(\sqrt{v_c}t) + k'\sin(\sqrt{v_c}t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(t) = -q\sqrt{v_c}\sin(\sqrt{v_c}t) + q'\sqrt{v_c}\cos(\sqrt{v_c}t) + \dfrac{v_cv_bf}{v_c+f^2}e^{-ft} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(t) = -k\sqrt{v_c}\sin(\sqrt{v_c}t) + k'\sqrt{v_c}\cos(\sqrt{v_c}t) \end{cases}$$

Or d'après les conditions initiales :

$$\begin{cases} c_x(0) = q\cos(0) + q'\sin(0) - \dfrac{v_cv_b}{v_c+f^2}e^0 + v_b \\ c_y(0) = k\cos(0) + k'\sin(0) \\ \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(0) = -q\sqrt{v_c}\sin(0) + q'\sqrt{v_c}\cos(0) + \dfrac{v_cv_bf}{v_c+f^2}e^0 = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(0) = -k\sqrt{v_c}\sin(0) + k'\sqrt{v_c}\cos(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x(0) = q - \dfrac{v_cv_b}{v_c+f^2} + v_b \\ c_y(0) = k \\ q'\sqrt{v_c} + \dfrac{v_cv_bf}{v_c+f^2} = 0 \\ k'\sqrt{v_c} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = c_x(0) + \dfrac{v_cv_b}{v_c+f^2} - v_b = c_x(0) + \dfrac{v_cv_b - v_b(v_c+f^2)}{v_c+f^2} = c_x(0) - \dfrac{v_bf^2}{v_c+f^2} \\ k = c_y(0) \\ q' = -\dfrac{\sqrt{v_c}v_bf}{v_c+f^2} \\ k' = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} c_x(t) = \left(c_x(0) - \dfrac{v_bf^2}{v_c+f^2}\right)\cos(\sqrt{v_c}t) - \dfrac{\sqrt{v_c}v_bf}{v_c+f^2}\sin(\sqrt{v_c}t) - \dfrac{v_cv_b}{v_c+f^2}e^{-ft} + v_b \\ c_y(t) = c_y(0)\cdot\cos(\sqrt{v_c}t) \end{cases}$$

2.2.2 Distance entre le chien et la balle :

$$\begin{aligned} c_x(t) - b_x(t) &= \left(c_x(0) - \frac{v_bf^2}{v_c+f^2}\right)\cos(\sqrt{v_c}t) - \frac{\sqrt{v_c}v_bf}{v_c+f^2}\sin(\sqrt{v_c}t) - \frac{v_cv_b}{v_c+f^2}e^{-ft} + v_b - v_b(1-e^{-ft}) \\ &= \left(c_x(0) - \frac{v_bf^2}{v_c+f^2}\right)\cos(\sqrt{v_c}t) - \frac{\sqrt{v_c}v_bf}{v_c+f^2}\sin(\sqrt{v_c}t) - \frac{v_cv_b}{v_c+f^2}e^{-ft} + v_b - v_b + v_be^{-ft} \\ &= \left(c_x(0) - \frac{v_bf^2}{v_c+f^2}\right)\cos(\sqrt{v_c}t) - \frac{\sqrt{v_c}v_bf}{v_c+f^2}\sin(\sqrt{v_c}t) + \frac{-v_cv_b + v_b(v_c+f^2)}{v_c+f^2}e^{-ft} \\ &= \left(c_x(0) - \frac{v_bf^2}{v_c+f^2}\right)\cos(\sqrt{v_c}t) - \frac{\sqrt{v_c}v_bf}{v_c+f^2}\sin(\sqrt{v_c}t) + \frac{v_bf^2}{v_c+f^2}e^{-ft} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
BC &= \sqrt{(c_x - b_x)^2 + (c_y - b_y)^2} \\
&= \sqrt{\left(\left(c_x(0) - \frac{v_b f^2}{v_c + f^2}\right)\cos(\sqrt{v_c}t) - \frac{\sqrt{v_c}v_b f}{v_c + f^2}\sin(\sqrt{v_c}t) + \frac{v_b f^2}{v_c + f^2}e^{-ft}\right)^2 + c_y(0)^2 \cdot \cos^2(\sqrt{v_c}t)} \\
&< \sqrt{\left(\left|c_x(0) - \frac{v_b f^2}{v_c + f^2}\right| + \frac{\sqrt{v_c}v_b f}{v_c + f^2} + \frac{v_b f^2}{v_c + f^2}\right)^2 + c_y(0)^2} \\
&< \max\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{v_c}v_b f}{v_c + f^2} + c_x(0)\right)^2 + c_y(0)^2}; \sqrt{\left(\frac{v_b f(2f + \sqrt{v_c})}{v_c + f^2} - c_x(0)\right)^2 + c_y(0)^2}\right)
\end{aligned}
$$

La distance le séparant de sa balle est ainsi bornée. De plus le mouvement du chien tend vers un cycle de période $\dfrac{2\pi}{\sqrt{v_c}}$. Le chien semble se suivre une orbite elliptique autour d'une balle quasiment immobile.

$$
\begin{cases}
c_x(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \left(c_x(0) - \dfrac{v_b f^2}{v_c + f^2}\right)\cos(\sqrt{v_c}t) - \dfrac{\sqrt{v_c}v_b f}{v_c + f^2}\sin(\sqrt{v_c}t) + v_b \\
\\
c_y(t) = c_y(0) \cdot \cos(\sqrt{v_c}t) \\
\\
BC \underset{t\to\infty}{\sim} \sqrt{\left(\left(c_x(0) - \dfrac{v_b f^2}{v_c + f^2}\right)\cos(\sqrt{v_c}t) - \dfrac{\sqrt{v_c}v_b f}{v_c + f^2}\sin(\sqrt{v_c}t)\right)^2 + c_y(0)^2 \cdot \cos^2(\sqrt{v_c}t)}
\end{cases}
$$

2.3 Balle en accélération

Supposons que la balle se déplace sur l'axe des abscisses ($c_y(t) = 0$) et qu'elle ait une accélération constante $\dfrac{\mathrm{d}^2 b_x}{\mathrm{d}t^2} = a \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t} = at + v_b \Leftrightarrow b_x(t) = \dfrac{a}{2}t^2 + v_b t$.

2.3.1 Equations horaires :

$$
\frac{\mathrm{d}^2\vec{c}}{\mathrm{d}t^2} = v_c \times \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2 c_x}{\mathrm{d}t^2} = v_c(b_x - c_x) \\
\\
\dfrac{\mathrm{d}^2 c_y}{\mathrm{d}t^2} = v_c(b_y - c_y)
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2 c_x}{\mathrm{d}t^2}(t) = v_c \dfrac{a}{2}t^2 + v_c v_b t - v_c \cdot c_x(t) \\
\\
\dfrac{\mathrm{d}^2 c_y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -v_c \cdot c_y(t)
\end{cases}
$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 c_x}{\mathrm{d}t^2}(t) + v_c \cdot c_x(t) = v_c \dfrac{a}{2} t^2 + v_c v_b t \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 c_y}{\mathrm{d}t^2}(t) + v_c \cdot c_y(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (q, q', k, k') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} c_x(t) = q \cos(\sqrt{v_c} t) + q' \sin(\sqrt{v_c} t) + \dfrac{a}{2} t^2 + v_b t - \dfrac{a}{v_c} \\ c_y(t) = k \cos(\sqrt{v_c} t) + k' \sin(\sqrt{v_c} t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(t) = -q\sqrt{v_c} \sin(\sqrt{v_c} t) + q' \sqrt{v_c} \cos(\sqrt{v_c} t) + at + v_b \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(t) = -k\sqrt{v_c} \sin(\sqrt{v_c} t) + k' \sqrt{v_c} \cos(\sqrt{v_c} t) \end{cases}$$

Or d'après les conditions initiales :

$$\begin{cases} c_x(0) = q \cos(0) + q' \sin(0) + 0 + 0 - \dfrac{a}{v_c} \\ c_y(0) = k \cos(0) + k' \sin(0) \\ \dfrac{\mathrm{d}c_x}{\mathrm{d}t}(0) = -q\sqrt{v_c} \sin(0) + q' \sqrt{v_c} \cos(0) + 0 + v_b = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}c_y}{\mathrm{d}t}(0) = -k\sqrt{v_c} \sin(0) + k' \sqrt{v_c} \cos(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x(0) = q - \dfrac{a}{v_c} \\ c_y(0) = k \\ q' \sqrt{v_c} + v_b = 0 \\ k' \sqrt{v_c} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = c_x(0) + \dfrac{a}{v_c} \\ k = c_y(0) \\ q' = -\dfrac{v_b}{\sqrt{v_c}} \\ k' = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} c_x(t) = \left(c_x(0) + \dfrac{a}{v_c} \right) \cos(\sqrt{v_c} t) - \dfrac{v_b}{\sqrt{v_c}} \sin(\sqrt{v_c} t) + \dfrac{a}{2} t^2 + v_b t - \dfrac{a}{v_c} \\ c_y(t) = c_y(0) \cdot \cos(\sqrt{v_c} t) \end{cases}$$

2.3.2 Distance entre le chien et la balle :

$$\begin{aligned} c_x(t) - b_x(t) &= \left(c_x(0) + \frac{a}{v_c} \right) \cos(\sqrt{v_c} t) - \frac{v_b}{\sqrt{v_c}} \sin(\sqrt{v_c} t) + \frac{a}{2} t^2 + v_b t - \frac{a}{v_c} - \frac{a}{2} t^2 - v_b t \\ &= \left(c_x(0) + \frac{a}{v_c} \right) \cos(\sqrt{v_c} t) - \frac{v_b}{\sqrt{v_c}} \sin(\sqrt{v_c} t) - \frac{a}{v_c} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow BC &= \sqrt{(c_x - b_x)^2 + (c_y - b_y)^2} \\
&= \sqrt{\left(\left(c_x(0) + \frac{a}{v_c}\right)\cos(\sqrt{v_c}t) - \frac{v_b}{\sqrt{v_c}}\sin(\sqrt{v_c}t) - \frac{a}{v_c}\right)^2 + c_y(0)^2 \cdot \cos^2(\sqrt{v_c}t)} \\
&< \sqrt{\left(c_x(0) + \frac{v_b}{\sqrt{v_c}}\right)^2 + c_y(0)^2}
\end{aligned}
$$

La distance le séparant de sa balle est ainsi bornée et périodique de période $\dfrac{2\pi}{\sqrt{v_c}}$.