VICTOR THÉBAULT

Parmi LES BELLES FIGURES *de la* GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

(Géométrie du Tétraèdre)

LIBRAIRIE VUIBERT
63, Boulevard Saint-Germain, 63

DU MÊME AUTEUR

Les Récréations mathématiques (Parmi les nombres curieux). —

TABLE DES MATIÈRES

Terminologie, notations et relations métriques XIII

Chapitre I. — **Configurations fondamentales** 1

Point de Monge 1
Droites d'Euler 11
Plans et tétraèdres associés 13
Sphère des douze points 32
Sphère orthocentroïdale 43
Ellipsoïdes de Steiner — Sphères orthoptiques 45
Sphères de Miquel 51
Quelques quadruples hyperboloïdiques 57
Homologie, bilogie, orthohomologie 63
Quelques tétraèdres spéciaux 71

Chapitre II. — **Sphères associées à un tétraèdre et à un polygone gauche** 90

Généralités 90
Sphère de Longchamps 103
Faisceaux remarquables de sphères 109
Courbe gauche associée à un tétraèdre 111
Autres groupes de sphères 117
Sphères associées a un polygone gauche 132
Polygone gauche quelconque 132
Polygone gauche dont les sommets sont cosphériques 135

Chapitre III. — **Compléments à la géométrie récente du tétraèdre** 146

Premier point de Lemoine 147
Second point de Lemoine 163
Autres points remarquables 201
Sphères de Tücker 213
Sphères d'Adams 223
Sphères de Lucas 231
Sphères généralisées de Lucas 240
Sphères de Hagge d'un polygone gauche à sommets cosphériques 246
Sphères de Hagge d'un tétraèdre 250
Un chapitre de géométrie du triangle et du tétraèdre. Orthopôle d'une droite 253

Chapitre IV. — **Questions proposées sur la géométrie du tétraèdre** 269

PRÉFACE

Aux géomètres qu'intéressent le triangle et le tétraèdre, il n'est nullement nécessaire de présenter ni Monsieur Thébault ni son livre : ils connaissent l'activité incessante et féconde que, depuis plus de quarante ans, il consacre à l'exploration de ce domaine et dont les fruits sont disséminés dans de nombreuses revues. Le classement et la réunion en un volume des principaux résultats obtenus à propos de figures de l'espace et en particulier du tétraèdre sera, sans aucun doute, favorablement accueilli par tous ceux que charment les harmonies liant les points, les plans, les droites et les sphères dont la naissance, due à la seule puissance créatrice de l'imagination disciplinée, témoigne de la richesse du berceau formé par quatre plans.

On a soutenu l'inutilité de se pencher sans cesse sur les figures composées de trois ou quatre points afin d'en dégager de nouvelles liaisons avec d'autres éléments géométriques. Peut-on jamais affirmer qu'une chose soit inutile? L'artiste qui cisèle son œuvre ne se pose d'ailleurs pas cette question, il se plaît dans l'effort et défend l'honneur de l'esprit humain. On a aussi essayé de ridiculiser l'appellation « point remarquable » en disant « qu'un point est dénommé remarquable parce qu'on l'a remarqué ». Il y a cependant tant de gens qui, comme de pauvres aveugles, vivent des faits sans les remarquer; aucun de ces faits ne serait donc remarquable, et ne serait-ce dès lors pas un mérite d'unir l'observation et la logique? Enfin, à propos de triangle et de tétraèdre, on a parfois exprimé un certain dédain pour ce monde, en appuyant sur le fait qu'il porte seulement le sceau élémentaire. Quand se trouve-t-on dans l'élémentaire, et à quel moment peut-on se croire dans le

supérieur? Cette distinction paraît difficile à préciser. On apprécie plutôt les mathématiques par les qualités de la plume qui les écrit.

Le livre de MONSIEUR THÉBAULT est utile, rassemble de nombreuses propriétés d'éléments remarquables souvent associés au tétraèdre et, par des moyens classiques, fait de la belle et bonne géométrie. Il n'initie pas, il fait le point après une étape qui prolonge celle qu'a illustrée NEUBERG; il convie le lecteur à être curieux de connaître les théories développées par C. SERVAIS dans ses mémoires sur le tétraèdre et utilisées par Monsieur A. MARMION dans plusieurs travaux déjà. Il serait vain de détailler par le menu les apports personnels de l'auteur; signalons toutefois le curieux système de sphères qui s'introduit à propos du *premier* point de LEMOINE.

Le livre n'étant pas un traité, on n'y trouvera pas un enchaînement déductif des diverses questions qui en font l'objet. Cette simple constatation n'enlève rien à la valeur de l'ouvrage. Celui-ci s'est imposé la mission de présenter la récolte, brillante souvent, poussée sur des oasis nées de la fertilité de l'imagination. Rechercher les maillons permettant de soumettre les faits isolés à une discipline d'ensemble est un autre problème dont la difficulté est certaine. Et si quelque géomètre animé de l'esprit de synthèse parvient à le résoudre, il ne pourra pas oublier que son ciment relie des matériaux heureusement apportés ou rassemblés par *Les belles figures de la géométrie dans l'espace* de M. THÉBAULT.

Mons, le 15 mai 1953.

R. DEAUX,
Professeur à la Faculté polytechnique,
Directeur de *Mathesis*.

AVANT-PROPOS

Depuis plus de trente ans nous avons recherché systématiquement les analogies existant entre la géométrie du plan et celle de l'espace, particulièrement entre la géométrie du triangle et celle du tétraèdre, pour mettre en évidence des figures dont les propriétés ne semblent manquer ni de curiosités ni d'élégance.

Les résultats obtenus ont été accueillis par de nombreuses revues parmi lesquelles les *Comptes Rendus* des séances de l'Académie des Sciences, *Mathesis*, fondée en 1881 par P. Mansion et J. Neuberg, les *Annales de la Société Scientifique* de Bruxelles et *The American Mathematical Monthly*, organe de The Mathematical Association of America.

Les développements sont presque toujours élémentaires, de manière à rester à la portée de ceux que cette partie de la géométrie intéresse ou qui désirent s'y initier. Le nombre des mémoires, articles, notes et questions originales forme un ensemble important et nos amis ont souvent exprimé le désir de voir ces travaux réunis. C'est pour répondre à ce souhait que nous avons entrepris d'écrire ce livre.

Il nous a d'ailleurs suffi de reprendre nos écrits en les ordonnant et en les complétant parfois. Pour rester dans les limites imposées, nous avons écarté le rappel des propriétés de géométrie plane ainsi que celles se rapportant aux tétraèdres spéciaux (équifacial, orthocentrique, isodynamique), que le lecteur pourra consulter dans les traités qui s'y consacrent [1].

Le premier chapitre intitulé *Configurations fondamen-*

---

[1] En particulier, dans l'excellent ouvrage de M. N. A. Court, *Modern pure solid geometry*.

tales apporte des compléments aux propriétés des figures suivantes : Point de MONGE, Droites d'EULER, Plans et tétraèdres associés, Sphère des douze points (ou de $3n$ points), Sphère orthocentroïdale, Sphères de MIQUEL, Ellipsoïdes de STEINER, Quelques quadruples hyperboloïdiques. Il se termine par une note qui étend au tétraèdre deux théorèmes de P. SONDAT, dont l'emploi est fréquent, et par l'étude de quelques tétraèdres spéciaux.

Le second chapitre a pour titre : *Sphères associées à un tétraèdre et à un polygone gauche*; les conséquences des premiers paragraphes nous ont permis, en particulier, de définir la *sphère* DE LONGCHAMPS d'un tétraèdre (1932) et de l'étendre à un polygone gauche de n sommets cosphériques.

Le troisième chapitre : *Compléments à la géométrie récente du tétraèdre*, consacré aux *premier* et *second* points de LEMOINE, aux sphères de TÜCKER, d'ADAMS, de HAGGE, de LUCAS, relatifs à un tétraèdre quelconque, contient beaucoup de curiosités comparables à celles qui sont contenues dans l'étude relative à la sphère DE LONGCHAMPS au sujet de laquelle A. BUHL, à réception de notre manuscrit destiné à L'*Enseignement Mathématique* (1937), écrivait en ces termes : « c'est de la belle géométrie ». Ce chapitre finit par une étude sur l'orthopôle d'une droite qui rappelle la mémoire de G. FONTENÉ et incite le lecteur à se reporter aux beaux travaux de C. SERVAIS et de M. A. MARMION sur ce sujet.

La dernière partie contient les énoncés de 81 questions originales qui ont été proposées aux lecteurs des revues précitées depuis 1913, plusieurs d'entre elles ayant donné lieu à des développements intéressants.

Le lecteur ne se trouvera pas en face d'un Traité de géométrie, mais devant un Recueil dans lequel nous avons fait entrer le plus possible de curiosités, parfois présentées succinctement, dont nous laissons le soin de parfaire ou de reconstituer les démonstrations esquissées ou évitées, à son agrément.

Notre but aura été atteint si ce modeste ouvrage peut

l'informer des progrès réalisés dans cette partie de la Géométrie et lui faire passer quelques moments agréables.

Qu'il nous soit permis, en terminant, de rappeler ici, d'abord, la mémoire de ROBERT BOUVAIST avec qui nous avons travaillé pendant plus de vingt années: dont plusieurs passages portent la marque de sa collaboration; ensuite, d'exprimer notre gratitude à MM. A. BALLICCIONI, R. BLANCHARD, A. MARMION, qui nous ont confié des notes dont l'intérêt rehausse celui du présent Recueil, et envers la Maison VUIBERT qui a bien voulu en accepter l'édition.

V. T.

TERMINOLOGIE, NOTATIONS ET RELATIONS MÉTRIQUES

$T \equiv ABCD$ le tétraèdre fondamental ou de référence [1].

a, b, c, a', b', c' les arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC et aussi les rectilignes des dièdres suivant ces arêtes.

A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1 les milieux des arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC.

A, B, C, D les mesures des aires des faces BCD, CDA, DAB, ABC et aussi celles des angles de ces faces avec la sphère circonscrite. V le volume du tétraèdre.

O, I, I_a, I_b, I_c, I_d, I_1, I_2, I_3 les centres de la sphère circonscrite, de la sphère inscrite, des sphères exinscrites dans les quatre trièdres tronqués et des trois sphères des combles.

R, r, r_a, r_b, r_c, r_d, r_1, r_2, r_3 les rayons de ces sphères.

G et G_a, G_b, G_c, G_d le centre de gravité (ou le barycentre) de T et ceux des triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

Ω le symétrique du point O par rapport à G (point de Monge).

M_a, M_b, M_c, M_d les mesures des médianes AG_a, BG_b, CG_c, DG_d.

h_a, h_b, h_c, h_d les mesures des hauteurs AA_h, BB_h, CC_h, DD_h.

R_a, R_b, R_c, R_d les mesures des rayons des cercles BCD, CDA, DAB, ABC.

K et L le *premier* et le *second* points de Lemoine.

θ l'angle de Brocard défini par la relation

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc}{12V}.$$

$t \equiv G_aG_bG_cG_d$, tétraèdre *complémentaire* de T.

$T_0 \equiv A_0B_0C_0D_0$, tétraèdre *anticomplémentaire* de T.

$T' \equiv A'B'C'D'$, tétraèdre *tangentiel* de T.

La notation (P, p) signifie : cercle (sphère) de centre P et de rayon p.

Les coordonnées normales absolues x, y, z, t du point P sont les distances P_aP, P_bP, P_cP, P_dP aux plans des faces de T; elles prennent le

---

[1] Si ce tétraèdre était désigné par $A_1A_2A_3A_4$, quelques-unes des notations subiraient des modifications adéquates. — Du reste, pour la commodité, certaines notations pourront être modifiées au cours de l'ouvrage.

signe + ou — suivant qu'elles sont de même sens ou non que les hauteurs A_hA, B_hB, C_hC, D_hD. Des quantités proportionnelles à ces coordonnées sont simplement appelées *coordonnées normales* de P.

Les *coordonnées barycentriques* de P sont proportionnelles aux volumes des tétraèdres PBCD, PCDA, PDAB, PABC; ces volumes obéissent à la règle des signes. On peut aussi les assimiler à quatre masses (positives, nulles ou négatives) qui, appliquées en A, B, C, D, ont pour barycentre le point P. Les coordonnées barycentriques *absolues* d'un point situé à distance finie sont les quantités $\frac{x}{h_a}$, $\frac{y}{h_b}$, $\frac{z}{h_c}$, $\frac{t}{h_d}$, dont la somme est égale à l'unité.

Deux plans menés par une même arête sont dits *isogonaux* quand ils sont symétriques par rapport à l'un des plans bissecteurs du dièdre suivant cette arête. Les plans isogonaux de six plans passant par les arêtes et par un même point P, concourent en un point P′ dit *conjugué isogonal* de P ou *inverse tétraédrique* de P. Les coordonnées normales de P′ sont les inverses de celles de P.

Deux points situés sur une arête de T à égale distance du milieu de cette arête sont dits *isotomiques*. Soient a_1 et a_2, b_1 et b_2, c_1 et c_2, a'_1 et a'_2, b'_1 et b'_2, c'_1 et c'_2 six couples isotomiques sur les arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC. Si les plans (DA, a_1), (DB, b_1), (DC, c_1), (BC, a'_1), (CA, b'_1), (AB, c'_1) concourent en un point P, les plans (DA, a_2), (DB, b_2), (DC, c_2), (BC, a'_2), (CA, b'_2), (AB, c'_2) concourent en un point P′ appelé *réciproque* ou *conjugué isotomique* de P. Les coordonnées barycentriques de P′ sont les inverses de celles de P. Si les points a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1 sont dans un même plan π, les points a_2, b_2, c_2, a'_2, b'_2, c'_2 appartiennent à un plan π' qui est le *plan transversal* réciproque de π.

On considère un tétraèdre T ≡ ABCD orienté dans le sens des rotations positives, de sorte que du sommet A le sens de circulation BCDB sur le périmètre de la face opposée est vu dans le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre. Il en résulte qu'il en est de même des circulations ADCA, DABD, CBAC par rapport aux sommets opposés B, C, D.

Le volume V du tétraèdre T ≡ ABCD est donc positif et l'on a, à la fois,

$$V = ABCD = BADC = CDAB = DCBA.$$

Les aires des faces BCD, ADC, DAB, CBA sont également positives et on convient de les désigner par les lettres A, B, C, D déjà employées pour désigner les sommets opposés de T.

Les valeurs algébriques de segments perpendiculaires au plan d'une face du tétraèdre seront évaluées sur des axes équipollents orientés du plan de cette face vers le sommet opposé. Les valeurs A_hA, B_hB, C_hC, D_hD des hauteurs de T, seront donc positives, et l'on aura, à la fois,

$$3V = A.A_hA = B.B_hB = C.C_hC = D.D_hD.$$

QUELQUES RELATIONS MÉTRIQUES.

$$M_a^2 = \frac{1}{3}\left[a'^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b'^2 + c'^2)\right],$$

$$M_b^2 = \frac{1}{3}\left[a^2 + b'^2 + c^2 - \frac{1}{3}(a'^2 + b^2 + c'^2)\right],$$

$$M_c^2 = \frac{1}{3}\left[a^2 + b^2 + c'^2 - \frac{1}{3}(a'^2 + b'^2 + c^2)\right],$$

$$M_d^2 = \frac{1}{3}\left[a'^2 + b'^2 + c'^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)\right],$$

$$M_a^2 + M_b^2 + M_c^2 + M_d^2 = \frac{4}{9}\,\Sigma(a^2 + a'^2).$$

$$\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 = \frac{1}{4}\,\Sigma(a^2 + a'^2).$$

$$\overline{A_1A_1'}^2 = \frac{1}{4}(b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2),$$

$$\overline{B_1B_1'}^2 = \frac{1}{4}(c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2),$$

$$\overline{C_1C_1'}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2).$$

$$\overline{A_1A_1'}^2 + \overline{B_1B_1'}^2 + \overline{C_1C_1'}^2 = \frac{1}{4}\,\Sigma(a^2 + a'^2) = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2.$$

$$\overline{\Omega A}^2 = R^2 + \frac{1}{4}(a'^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b'^2 - c'^2),$$

$$\overline{\Omega B}^2 = R^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b'^2 + c^2 - a'^2 - b^2 - c'^2),$$

$$\overline{\Omega C}^2 = R^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c'^2 - a'^2 - b'^2 - c^2),$$

$$\overline{\Omega D}^2 = R^2 + \frac{1}{4}(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

$$\overline{\Omega G_a}^2 = R^2 - \frac{1}{36}[3(a'^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b'^2 + c'^2],$$

$$\overline{\Omega G_b}^2 = R^2 - \frac{1}{36}[3(a^2 + b'^2 + c^2) + a'^2 + b^2 + c'^2],$$

$$\overline{\Omega G_c}^2 = R^2 - \frac{1}{36}[3(a^2 + b^2 + c'^2) + a'^2 + b'^2 + c^2],$$

$$\overline{\Omega G_d}^2 = R^2 - \frac{1}{36}[3(a'^2 + b'^2 + c'^2) + a^2 + b^2 + c^2].$$

$$\overline{OG_a}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b'^2 + c'^2), \quad \overline{OG_b}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a'^2 + b^2 + c'^2),$$

$$\overline{OG_c}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a'^2 + b'^2 + c^2), \quad \overline{OG_d}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{16}\Sigma(a^2 + a'^2), \quad \overline{O\Omega}^2 = 4\overline{OG}^2 = 4R^2 - \frac{1}{4}\Sigma(a^2 + a'^2).$$

Ces formules seront utilisées dans le cours de l'ouvrage.

Abréviations.

AFAS. Association française pour l'Avancement des Sciences.
BB. Bulletin de l'Académie royale de Belgique (classe des Sciences).
M. Mathesis (de Mansion, Neuberg, Mineur et Deaux).
NA. Nouvelles Annales de Mathématiques (de 1842 à 1927).
AM. The American Mathematical Monthly (fondé en 1894 par B. F. Finkel).
S.B. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.
IRM. Intermédiaire des Recherches mathématiques.
AMP. Archiv der Mathematik und Physik.
SL. Mémoires (Bulletin) de la Société royale des Sciences de Liège.

PARMI LES BELLES FIGURES DE LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

CHAPITRE PREMIER

CONFIGURATIONS FONDAMENTALES

Point de Monge.

1. Historique. — Dans un mémoire intitulé : *Sur la pyramide triangulaire* [1], Monge prouve que les plans menés par les milieux des arêtes d'un tétraèdre perpendiculairement aux arêtes opposées concourent en un point Ω, et que ce point coïncide avec le milieu du segment joignant le centre de gravité au centre de la sphère circonscrite au tétraèdre. Dans ce mémoire, le centre Ω de l'hyperboloïde des hauteurs n'est pas mentionné. Cette propriété fondamentale du point Ω paraît avoir été citée pour la première fois par Steiner [2]. D'après Chasles [3], Monge et Hachette avaient déterminé les génératrices de cette surface du second degré analytiquement. Il ajoute que pendant longtemps la seule démonstration de cette propriété de l'hyperboloïde a été la preuve analytique initiale et que, lorsqu'il fut élève de l'École Polytechnique, il en donna une démonstration par la géométrie pure qui devint partie du Cours de géométrie de cette École.

2. Généralités. — Si les sommets d'un quadrangle gauche $Q \equiv ABCD$ sont les centres des sphères (A), (B), (C), (D), ceux d'un quadrangle gauche $Q' \equiv A'B'C'D'$ les centres des sphères (A', R'_a), (B', R'_b), (C', R'_c), (D', R'_d), ces sphères étant toutes arbitraires, et que l'on désigne par (AB), (BC), (CD), (DA) les sommes des différences des puissances des sommets A et B, B et C, C et D, D et A du quadrangle Q pour les sphères (A', R'_a) et (B', R'_b), (B', R'_b) et (C', R'_c), (C', R'_c) et (D', R'_d), (D', R'_d) et (A', R'_a), par $(A'B')$, $(B'C')$,

---

(1) *Correspondance de l'Ecole Polytechnique*, t. 2, 1811, pp. 263-266.
(2) *Journal de Crelle*, t. 2, 1827, p. 97.
(3) *Aperçu historique*, p. 241.

(C'D'), (D'A') les sommes correspondantes pour les sommets A' et B', B' et C', C' et D', D' et A' du quadrangle Q' pour les sphères (A) et (B), (B) et (C), (C) et (D), (D) et (A), on obtient, en grandeur et en signe,

$$(1)\qquad (AB)+(BC)+(CD)+(DA) + (A'B')+(B'C')+(C'D')+(D'A')=0;$$

car, on a, d'abord

$$(AB)=\overline{AA'}^2-R_a'^2-(\overline{AB'}^2-R_b'^2)+\overline{BA'}^2-R_a'^2-(\overline{BB'}^2-R_b'^2),$$

puis trois autres égalités analogues pour les sommes (BC), (CD), (DA), en procédant de proche en proche. Si l'on ajoute ces quatre égalités, les carrés des rayons des sphères (A', R_a'), (B', R_b'), (C', R_c'), (D', R_d') disparaissent ainsi que $\overline{AA'}^2$, $\overline{BB'}^2$, $\overline{CC'}^2$, $\overline{DD'}^2$, et il reste

$$(AB)+(BC)+(CD)+(DA)=\Sigma(\overline{A'B}^2-\overline{AB'}^2).$$

Par analogie,

$$(A'B')+(B'C')+(C'D')+(D'A')=\Sigma(\overline{AB'}^2-\overline{A'B}^2);$$

d'où la relation (1).

Théorème. — *Si les plans perpendiculaires menés par les milieux des côtés d'un quadrangle gauche* Q ≡ ABCD *sur les côtés correspondants (ou opposés) d'un quadrangle gauche* Q' ≡ A'B'C'D' *concourent en un point* O', *les plans perpendiculaires menés par les milieux des côtés du quadrangle* Q' *sur les côtés correspondants (ou opposés) du quadrangle* Q *concourent en un point* O.

Les plans menés par les milieux des côtés AB, BC, CD, DA du quadrangle Q perpendiculairement aux côtés A'B', B'C', C'D', D'A' du quadrangle Q' se confondent avec les plans radicaux des sphères (A', R_a'), (B', R_b'), (C', R_c'), (D', R_d') passant par le point O'. Les distances des points A et B au plan radical qui passe par le milieu de AB étant égales et de signes contraires, il en est de même des différences des puissances de ces points pour les sphères (A', R_a') et (B', R_b'). Si A'_A représente la puissance du point A pour la sphère (A', R_a'), on a, avec les notations précédentes,

$$(AB)=A'_A-B'_A+A'_B-B'_B=0,$$

ou

$$(AB)=\overline{AA'}^2-R_a'^2-(\overline{AB'}^2-R_b'^2)+\overline{BA'}^2-R_a'^2-(\overline{BB'}^2-R_b'^2)=0,$$

puis trois égalités similaires pour (BC), (CD), (DA).

Si l'on ajoute les quatre égalités ainsi obtenues, on obtient

$$(AB) + (BC) + (CD) + (DA) = \Sigma(\overline{A'B}^2 - \overline{AB'}^2) = 0.$$

et en vertu de ce qui précède,

$$(2) \quad (A'B') + (B'C') + (C'D') + (D'A') = \Sigma(\overline{AB'}^2 - \overline{A'B}^2) = 0.$$

Or, les plans perpendiculaires aux côtés AB, BC, CD du quadrangle Q menés par les milieux des côtés A'B', B C', C'D' du quas drangle Q' se coupent en un point O_1 par où passent quatre sphères (A), (B), (C), (D). Pour les sphères (A), (B), (C), on a déjà

$$(A'B') + (B'C') + (C'D') = 0,$$

de sorte que, en vertu de (2), $(D'A') = 0$. Le plan radical des sphère (D) et (A) passe donc par le milieu de D'A', et $O_1 \equiv O$. Les deux quadrangles Q, Q' sont dits *orthologiques par les milieux des côtés correspondants*; les points O, O' sont leurs *centres d'orthologie.*

Si au lieu des côtés correspondants AB et A'B', BC et B'C', CD et C'D', DA et D'A' des quadrangles Q et Q', on associe les côtés opposés AB et C'D', BC et D'A', CA et D'B', AB et D'C', et *vice versa*, les quadrangles Q et Q' se correspondent dans une autre *orthologie par les milieux des côtés opposés*, les centres étant confondus avec les symétriques des centres O, O' par rapport aux barycentres des sommets des quadrangles Q, Q'.

En effet, si le point O' existe, les plans menés par les milieux des côtés du quadrangle Q perpendiculairement aux côtés opposés du quadrangle Q' passent aussi par un même point O'_1 symétrique de O' par rapport au barycentre G' des sommets de Q'. De même pour le point O_1 symétrique de O par rapport au barycentre G des sommets du quadrangle Q.

Théorème. — *Si les plans perpendiculaires menés par les milieux des arêtes du tétraèdre* $T \equiv ABCD$ *sur les arêtes correspondantes (ou opposées) du tétraèdre* $T' \equiv A'B'C'D'$ *concourent en un point* O', *les plans perpendiculaires menés par les milieux des arêtes du tétraèdre* T' *sur les arêtes correspondantes (ou opposées) du tétraèdre* T *concourent en un point* O.

Soient A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1 et a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1 les milieux des arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC et B'C', D'A', C'A', D'B', A'B', D'C' des tétraèdres T et T'. Si les plans perpendiculaires aux arêtes du tétraèdre T' menés par les milieux des arêtes correspondantes (ou opposées) du tétraèdre T concourent en un point O', les arêtes de ces tétraèdres forment les quadrangles gauches orthologiques par

les milieux des arêtes correspondantes (ou opposées); ABCD et A'B'C'D', ABDC et A'B'D'C', ADBC et A'D'B'C'.

Les plans perpendiculaires aux côtés AB, BC, CD, DA du quadrangle ABCD menés par les milieux c_1, a_1, c'_1, a'_1 des côtés correspondants du quadrangle A'B'C'D' concourent déjà en un point O_1 par lequel passent aussi les plans perpendiculaires aux arêtes CA et DB du tétraèdre T menés par les milieux b_1 et b'_1 des arêtes correspondantes C'A' et D'B' du tétraèdre T', en raison de l'orthologie des quadrangles ADBC et A'D'B'C'. Le théorème est donc démontré.

Autrement, les triangles $a_1b_1c_1$ et $A_1B_1C_1$ (ou ABC), $c_1a'_1b'_1$ et $C_1A'_1B'_1$ (ou DAB) sont orthologiques [1]. Les plans perpendiculaires menés par les points a_1, b_1, c_1 sur les côtés BC, CA, AB du triangle de la face ABC passent par une droite d_d et les plans perpendiculaires aux côtés AB, DA, DB du triangle de la face DAB menés par les points c_1, a'_1, b'_1 passent par une droite d_c. Ces droites d_d, d_c, situées dans le plan mené par le point c_1 perpendiculairement à l'arête AB du tétraèdre T se coupent en un point O_1 par lequel passent déjà cinq plans menés par les milieux des arêtes du tétraèdre T', le sixième, mené par le point c'_1 perpendiculairement à l'arête DC et qui contient la droite d_c passe aussi par le point O_1, et $O_1 \equiv O$.

Les tétraèdres T et T' sont *orthologiques par les milieux des arêtes correspondantes*; les points O, O' sont leurs *centres d'orthologie* respectifs.

Si l'on remplace les arêtes correspondantes par les arêtes opposées, comme nous l'avons fait pour les côtés des quadrangles Q et Q', les tétraèdres T et T' se correspondent dans une seconde orthologie dont les centres se confondent avec les symétriques des points O et O' par rapport aux centres de gravité de ces tétraèdres.

COROLLAIRES. — 1° *Si les triangles de trois faces du tétraèdre* T *sont orthologiques aux triangles des faces correspondantes du tétraèdre* T', *les triangles des faces restantes sont aussi orthologiques.*

2° *Si les triangles des faces du tétraèdre* T *sont orthologiques aux triangles des faces correspondantes du tétraèdre* T', *les deux tétraèdres sont orthologiques par les milieux des arêtes correspondantes (ou opposées).*

---

[1] Si les plans perpendiculaires menés par les sommets du triangle ABC sur les côtés correspondants du triangle A'B'C' passent par une doite d', les plans perpendiculaires menés par les sommets du triangle A'B'C' sur les côtés correspondants du triangle ABC passent par une même droite d. Les deux triangles sont orthologiques; les droites d, d' sont leurs *axes d'orthologie* respectifs.

3° *Si les tétraèdres* T, T′ *sont orthologiques par les milieux des arêtes correspondantes (ou opposées), ils sont orthologiques gauches* [1] *et réciproquement.*

Car les triangles des faces des tétraèdres T et T′ sont orthologiques. Les axes d'orthologie des triangles $A'_1B'_1C'_1$ et A′B′C′, ..., et des triangles $a_1b_1c_1$ et ABC, ..., sont les transformés des axes d'orthologie des triangles ABC et A′B′C′, ..., A′B′C′ et ABC, ..., qui se confondent avec les génératrices de deux systèmes d'un hyperboloïde, par les homothéties de module $\frac{1}{2}$ dont les centres coïncident avec les barycentres des faces des tétraèdres T et T′, et réciproquement.

Autre démonstration. — Pour les arêtes opposées, l'équivalence de ces deux propriétés peut également se déduire de la proposition (A) suivante :

Si quatre droites D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ *sont hyperboloïdiques, les six plans* P_i, *parallèles à deux quelconques de ces droites* D_i *et* D_j *et équidistants de celles-ci concourent en un point* O *et réciproquement.*

La proposition directe résulte de ce que deux plans parallèles menés par deux des droites étant des plans tangents parallèles à la quadrique contenant les quatre droites, leur plan médian passe par le centre O de cette quadrique. Pour établir la réciproque, remarquons que les plans P_{12}, P_{13}, P_{23} se coupent au centre O de la quadrique Q déterminée par les droites D_1, D_2, D_3. Comme les plans P_{14}, P_{24}, P_{34} passent par ce point, la droite D_4 rencontre les symétriques de D_1, D_2, D_3 par rapport à O, droites qui se trouvent également sur la quadrique Q, et par suite D_4 se trouve sur Q.

Or le plan mené par le milieu d'une arête A_iA_j perpendiculairement à l'arête opposée de T′ est parallèle aux perpendiculaires abaissées des sommets A_i et A_j sur les faces opposées de T′ et à égale distance de ces droites, ce qui, d'après la proposition (A) et sa réciproque, établit l'équivalence des deux orthologies, en ce qui concerne les arêtes opposées [2].

4° *Si les tétraèdres* ABCD *et* A′B′C′D′ *sont orthologiques gauches et si les points* A_2, B_2, C_2, D_2 *divisent les distances* AA′, BB′, CC′, DD′ *dans le même rapport* k, *les tétraèdres* ABCD *et* $A_2B_2C_2D_2$ *sont ortho-*

---

[1] Deux tétraèdres T, T′ sont *orthologiques* ou *orthologiques gauches* si les perpendiculaires menées des sommets du tétraèdre T sur les plans des faces du tétraèdre T′ sont concourantes ou génératrices d'un même système réglé (Steiner, J. Neuberg).

[2] A. Marmion, *Mathesis*, t. LXII, 342.

logiques gauches de même que les tétraèdres $A'B'C'D'$ *et* $A_2B_2C_2D_2$. Car les faces correspondantes des tétraèdres en cause sont orthologiques.

Cas particulier : *point de* Monge. — Si deux tétraèdres $T \equiv ABCD$ et $T' \equiv A'B'C'D'$ sont confondus ($A \equiv A'$, $B \equiv B'$, $C \equiv C'$, $D \equiv D'$), les centres d'orthologie par les milieux des arêtes correspondantes coïncident avec les centres $O \equiv O'$ des sphères circonscrites aux tétraèdres et les centres d'orthologie par les milieux des arêtes opposées avec les symétriques $\Omega' \equiv \Omega$ des points $O' \equiv O$ par rapport aux centres de gravité $G' \equiv G$ des tétraèdres $T' \equiv T$. On retrouve ainsi la détermination et la propriété fondamentale du point Ω établies par Monge [1].

3. Autre généralisation. Théorème. — *Si les parallèles à une droite donnée* Δ *menées par les sommets* A, B, C, D *du tétraèdre* T *recoupent la sphère circonscrite en* A_1, B_1, C_1, D_1 *et que l'on prolonge les segments* $\overrightarrow{A_1G_a}$, $\overrightarrow{B_1G_b}$, $\overrightarrow{C_1G_c}$, $\overrightarrow{D_1G_d}$ *de la moitié de leurs longueurs, soit*

$$\frac{\overline{G_aA_2}}{\overline{G_aA_1}} = \frac{\overline{G_bB_2}}{\overline{G_bB_1}} = \frac{\overline{G_cC_2}}{\overline{G_cC_1}} = \frac{\overline{G_dD_2}}{\overline{G_dD_1}} = -\frac{1}{2},$$

les points A_2, B_2, C_2, D_2 *sont situés dans un plan perpendiculaire à la droite* Δ *et passant par le point de* Monge Ω *du tétraèdre fondamental.*

En effet, si l'on désigne par Ω le symétrique du centre de la sphère (O, R) circonscrite au tétraèdre T par rapport au centre de gravité G,

---

[1] Voici un autre point remarquable dont la détermination résulte des généralités qui précèdent.

Si les sommets A', B', C', D', du tétraèdre T' coïncident avec les pieds des hauteurs AA_h, BB_h, CC_h, DD_h du tétraèdre T, les tétraèdres T et T' sont orthologiques gauches et, par suite, orthologiques par les milieux de leurs arêtes correspondantes (ou opposées) avec O, O' pour centres d'orthologie. Or, les sphères décrites sur les arêtes du tétraèdre T comme diamètres se rencontrent deux par deux aux sommets du tétraèdre T', et le centre O' d'orthologie se confond avec le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre T'. En outre, les puissances du milieu de l'arête B_hC_h, par rapport aux sphères (B, BB_h) et (C, CC_h), sont égales et de signes contraires, car si la droite B_hC_h rencontre ces sphères en B'', C'', les milieux des segments B_hC_h et $B''C''$ coïncident. Le centre d'orthologie O se confond donc avec le centre radical des sphères (A, AA_h), (B, BB_h), (C, CC_h), (D, DD_h) centrées aux sommets A, B, C, D et ayant pour rayons les hauteurs du tétraèdre T.

Les centres d'orthologie par les milieux des arêtes opposées coïncident avec les symétriques des points O et O' par rapport aux centres de gravité des tétraèdres ABCD et $A_hB_hC_hD_h$.

la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ circonscrite au tétraèdre $t \equiv G_a G_b G_c G_d$ se confond avec les transformées de la sphère (O, R) par les homothéties $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$ et $\left(\Omega, \frac{1}{3}\right)$.

Les droites ΩG_a, ΩG_b, ΩG_c, ΩG_d passent donc respectivement par les points A″, B″, C″, D″ diamétralement opposés aux sommets A, B, C, D sur la sphère (O, R) et les droites ΩA_2, ΩB_2, ΩC_2, ΩD_2, parallèles aux droites A_1A'', B_1B'', C_1C'', D_1D'', sont orthogonales aux droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 et, par suite, appartiennent à un plan passant par le point Ω, perpendiculaire à la droite Δ.

Cas particulier. — Si la droite Δ est parallèle à une des arêtes du tétraèdre T, DA par exemple, les points D_1 et D_2 coïncident avec le sommet A et le milieu de l'arête BC. Le plan mené par le point D_2 perpendiculairement à l'arête DA et, par analogie, les plans menés des milieux des autres arêtes perpendiculairement aux arêtes opposées passent par le point Ω symétrique du centre de la sphère (O, R) par rapport au centre de gravité G du tétraèdre fondamental (point de Monge).

4. Coordonnées du point Ω. — Soient P_i ($i = a, b, c, d$) les projections orthogonales, sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC des faces d'un tétraèdre T, du point P situé à distance finie sur la droite OGΩ, tel que l'on ait OG : OP = k; O_i, G_i, Ω_i celles des points O, G, Ω sur les mêmes plans; A_1, B_1, C_1, D_1 les points où les hauteurs AA_h, BB_h, CC_h DD_h recoupent la sphère circonscrite à T.

Le point O se projette orthogonalement sur la droite AA_1 au milieu α du segment AA_1 et l'on a, d'abord,

$$2\overline{A_h\alpha} = \overline{A_hA} + \overline{A_hA_1},$$

puis

$$2\overline{OO_a} = -(\overline{A_hA} + \overline{A_hA_1}), \quad \text{et} \quad \overline{GG_a} = \frac{1}{4}\overline{AA_h}.$$

Il en résulte, de proche en proche,

$$PP_a = \frac{1}{k}\left[(k-1)\overline{OO_a} + \overline{GG_a}\right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[(k-1)\cdot\frac{1}{2}(\overline{AA_h} + \overline{A_1A_h}) + \frac{1}{4}\overline{AA_h}\right]$$

$$(1) \qquad = \frac{1}{4k}\left[(2k-1)\overline{AA_h} + 2(k-1)\overline{A_1A_h}\right].$$

Lorsque $P \equiv \Omega$, $k = \frac{1}{2}$, ce qui donne, d'après (1), et par analogie,

$$(2) \qquad \overline{\Omega\Omega_a} = \frac{1}{2}\overline{A_hA_1}, \qquad \overline{\Omega\Omega_b} = \frac{1}{2}\overline{B_hB_1},$$

$$\overline{\Omega\Omega_c} = \frac{1}{2}\overline{C_hC_1}, \qquad \overline{\Omega\Omega_d} = \frac{1}{2}\overline{D_hD_1},$$

car

$$\overline{\Omega\Omega_a} = \frac{1}{2} \cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)\overline{A_1A_h} = \frac{1}{2}\overline{A_hA_1}, \ldots$$

Corollaires. — 1° *Le volume du polyèdre ayant pour sommets* A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 *équivaut à trois fois celui du tétraèdre* T. Car, d'après les relations (2), la somme algébrique des volumes des tétraèdres $T_a \equiv A_1BCD$, $T_b = B_1CDA$, $T_c = C_1DAB$, $T_d = D_1ABC$ équivaut à deux fois le volume du tétraèdre T.

2° *Si le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* T *est dans le plan d'une face, la somme algébrique des volumes des tétraèdres* T_i *relatifs aux autres faces équivaut au volume du tétraèdre* T *et réciproquement.*

3° *Si le centre de la sphère circonscrite est sur une arête, les tétraèdres* T_i *relatifs aux faces opposées aux extrémités de l'arête opposée sont symétriques au tétraèdre* T *par rapport à ces faces.*

Dans ce tétraèdre spécial, facile à construire, le centre de la sphère circonscrite coïncide avec le milieu d'une arête, le point de Monge avec celui de l'arête opposée et les médianes issues des extrémités de celles-ci sont égales.

4° *Lorsque les segments interceptés sur les hauteurs par les plans des faces et la sphère circonscrite sont égaux, le point de* Monge *se confond avec le centre d'une des sphères quadritangentes du tétraèdre* T.

Cette remarque qui provient des égalités (2) s'applique, en particulier, au tétraèdre équifacial.

5. Position du point Ω. — Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le point de Monge soit *intérieur* ou *extérieur* au tétraèdre T sont que les extrémités A et A_1, B et B_1, C et C_1, D et D_1 des cordes interceptées par la sphère circonscrite sur les hauteurs soient situées de part et d'autre des plans des faces correspondantes ou bien que les extrémités d'une de ces cordes soient du même côté du plan de la face normale à cette corde.

Corollaire. — *Pour que le point de* Monge *soit sur la surface du tétraèdre, dans le plan d'une face, sur une arête, en un sommet, il faut*

et il suffit successivement que le pied de la hauteur issue du sommet opposé, les pieds des deux hauteurs issues des sommets opposés aux deux faces se coupant suivant l'arête considérée, les pieds des trois hauteurs issues des trois sommets restants, soient sur la sphère circonscrite au tétraèdre.

Ces propriétés résultent encore des expressions (2) des coordonnées normales absolues du point Ω.

Constructions de ces tétraèdres spéciaux. — 1° Pour que le point Ω soit dans le plan ABC, il faut et il suffit que $D_h D_1 = 0$, donc que les points confondus $D_h \equiv D_1$ soient sur la circonférence ABC. Les tétraèdres T correspondants peuvent être construits de la manière suivante : *la face* ABC *étant donnée, prendre sur la circonférence* ABC *un point arbitraire* D_h, *puis, sur la perpendiculaire en* D_h *au plan* ABC, *un point quelconque* $D \neq D_h$.

Le point Ω coïncide avec le point de rencontre de la droite qui joint le point diamétralement opposé au sommet D sur la sphère ABCD au centre de gravité de la face ABC avec la circonférence des neuf points du triangle ABC et la sphère $G_a G_b G_c G_d$ intercepte sur le plan ABC un cercle dont le rayon est le tiers de celui du cercle ABC.

2° Pour que le point de Monge se trouve sur l'arête AB du tétraèdre T, il faut et il suffit que les points C_h et C_1 soient confondus ainsi que les points D_h et D_1 sur les circonférences DAB et ABC. Or, puisque le point Ω est le transformé des points diamétralement opposés aux sommets C et D sur la sphère ABCD par les homothéties $\left(G_c, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(G_d, -\frac{1}{2}\right)$, il coïncide avec les deux intersections des circonférences des neuf points des triangles DAB et ABC, soit avec le milieu de l'arête AB ou avec les pieds des hauteurs de ces triangles issues des sommets C et D qui, par suite, se confondent. Il existe donc deux sortes de tétraèdres possédant la propriété envisagée.

Dans le premier cas, prenons le symétrique C″ du sommet C par rapport au point Ω. Les points D_h et D_1 coïncident avec l'orthocentre du triangle ABC; la projection H'_c du point C″ sur le plan DAB est symétrique du point C_h par rapport au point Ω et, de plus, le point H'_c coïncide avec l'orthocentre du triangle DAB. *Le tétraèdre* ABC″D *est donc orthocentrique.*

Dans la seconde hypothèse, le point C″ désignant le symétrique du point C par rapport à l'arête AB, le même raisonnement montre que le tétraèdre ABC″D est aussi orthocentrique. D'où les cons-

tructions suivantes du tétraèdre T : *un tétraèdre orthocentrique* ABC′D *étant donné, le symétrique* C *du sommet* C″, *par rapport au milieu de l'arête* AB, *donne un tétraèdre* ABCD *de la première catégorie; le symétrique* C *du sommet* C″, *par rapport à l'arête* AB, *donne un tétraèdre* T *de la seconde espèce.*

Dans un tétraèdre T de la première catégorie, les faces BCD et CDA sont rectangles en B et A; le centre O de la sphère circonscrite est donc au milieu de l'arête DC.

Corollaire. — *Dans un tétraèdre orthocentrique* ABCD, *soient* A_1, B_1, C_1, *et* a_1, b_1, c_1 *les anticomplémentaires dans la face* ABC *et les symétriques par rapport aux arêtes* BC, CA, AB *des sommets* A, B, C, *et ainsi de suite pour les autres faces. Les pieds des hauteurs des tétraèdres* A_1BCD, B_1CDA, C_1DAB *et* a_1BCD, b_1CDA, c_1DAB, ..., *issues des sommets* A_1, B_1, C_1, ..., *et* a_1, b_1, c_1, ..., *sont vingt-quatre points de la sphère circonscrite.*

C'est une application des propriétés des tétraèdres particuliers du 2°.

3° Enfin, pour que le point de Monge coïncide avec le sommet D, il faut et il suffit que les circonférences des neuf points des faces BCD, CDA, DAB concourent au sommet D du tétraèdre. Les milieux des arêtes DA, DB, DC étant des points distincts, cette condition exige que le sommet D se confonde avec les pieds des hauteurs issues des sommets A, B, C dans ces faces et *le tétraèdre* T *est trirectangle en* D.

Théorème. — *Si le point de* Monge *d'un tétraèdre* T *est situé dans le plan de la face* ABC, *sur une arête ou en un sommet de cette face, les hauteurs des faces* DBC, DCA, DAB *issues du sommet* D *sont situées dans un même plan et les diamètres des cercles passant par le sommet* D *et circonscrits aux mêmes faces dans un autre plan.*

Le pied D_h de la hauteur DD_h du tétraèdre étant situé sur la circonférence ABC, les pieds des hauteurs des triangles DBC, DCA, DAB, issues du point D, sur les arêtes BC, CA, AB, appartiennent à la droite de Simson du point D_h pour le triangle ABC, ce qui démontre la première partie.

Si l'on marque sur les arêtes DA, DB, DC des points arbitraires A_3, B_3, C_3 tels que l'on ait $DA_3 = DB_3 = DC_3$, les hauteurs et les diamètres des cercles circonscrits des faces DBC, DCA, DAB passant par le point D sont des couples de droites isogonales dans les triangles isocèles DB_3C_3, DC_3A_3, DA_3B_3, ce qui justifie la seconde partie du théorème.

Droites d'Euler.

6. Par analogie avec la droite qui joint le centre du cercle circonscrit à un triangle au centre de gravité, on désigne par droite d'EULER OG d'un tétraèdre $T \equiv ABCD$ celle qui joint le centre de la sphère circonscrite au centre de gravité.

La droite OG possède d'autres propriétés fondamentales parmi lesquelles nous en signalerons une qui suggère des développements importants dans les Chapitres suivants.

Considérons une sphère (P) pour laquelle les puissances des sommets A, B, C, D d'un tétraèdre T aient les formes kl^2, km^2, kn^2, kp^2, k étant un coefficient arbitraire, l^2, m^2, n^2, p^2 des quantités telles que les différences analogues à

$$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = k(l^2 - m^2)$$

soient de mêmes formes que les différences similaires à

$$\overline{AG}^2 - \overline{BG}^2 = k'(l^2 - m^2),$$

k' étant un coefficient. Dès lors, *le lieu du centre* P *de la sphère* (P), *lorsque le coefficient* k *varie, est la droite d'*EULER OG *du tétraèdre* T.

En effet, d'une manière générale, si l^2, m^2, n^2, p^2 sont remplacées par des constantes arbitraires α, β, γ, δ, les égalités telles que

$$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = k(\alpha - \beta)$$

prouvent que les plans menés par le point P normalement aux arêtes du tétraèdre T engendrent six faisceaux semblables de plans parallèles, dans lesquels les plans médiateurs sont homologues. Le lieu du point P est donc un diamètre de la sphère ABCD et qui sera la droite OG si

$$\frac{\alpha - \beta}{l^2 - m^2} = \frac{\alpha - \gamma}{l^2 - n^2} = \frac{\alpha - \delta}{l^2 - p^2}.$$

7. La droite d'EULER d'un triangle contient le centre du cercle circonscrit et son conjugué isogonal, l'orthocentre. Cette remarque incite à désigner par *seconde* droite d'EULER OO′ d'un tétraèdre T celle qui passe par le centre O de la sphère ABCD et par son conjugué isogonal O′, par rapport au tétraèdre fondamental, la *première* droite d'EULER étant OG.

THÉORÈME. — *Le tétraèdre tangentiel* $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ *et le tétraèdre podaire* $T' = A'B'C'D'$ *du point* O', *par rapport au tétraèdre* T, *se correspondent dans une homothétie dont le centre* P *est situé sur la* seconde *droite d'*EULER OO' *du tétraèdre fondamental.*

Car les plans des faces $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, $A'B'C'$ du tétraèdre T' étant perpendiculaires aux rayons OA, OB, OC, OD de la sphère (O, R), les tétraèdres T_1 et T' sont homothétiques et le point O' coïncide avec le centre d'une sphère quadritangente du tétraèdre T', tandis que le point O se confond avec le centre d'une sphère quadritangente au tétraèdre T_1.

Ce centre d'homothétie P des tétraèdres T_1 et T' est donc situé sur la droite OO'.

Le carré du demi-axe non focal de la quadrique de révolution de foyer O, inscrite au tétraèdre T, ayant pour mesure

$$\beta^2 = \frac{3VR}{\Sigma A \text{ séc } A},$$

on a

$$(1) \qquad O'A' = \frac{\beta^2}{OO_a} = \frac{\beta^2}{R \cos A} = \frac{3V}{\cos A \,.\, \Sigma A \text{ séc } A}.$$

Donc le rapport d'homothétie des tétraèdres T' et T_1

$$(2) \qquad k = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{O'A'}}{R \text{ séc } A} = \frac{3V}{\cos A \,.\, \Sigma A \text{ séc } A}.$$

THÉORÈME. — *Les distances du centre d'homothétie* P *des tétraèdres* T' *et* T_1 *aux plans des faces du tétraèdre* T *sont proportionnelles aux quantités*

$$\frac{\sin^2 A}{\cos A}, \quad \frac{\sin^2 B}{\cos B}, \quad \frac{\sin^2 C}{\cos C}, \quad \frac{\sin^2 D}{\cos D}.$$

D'après les égalités (1), les coordonnées normales du point O' étant proportionnelles à séc A, séc B, séc C, séc D, tandis que celles du point O sont proportionnelles à cos A, cos B, cos C, cos D, les coordonnées du point P sont proportionnelles aux quantités

$$\text{séc } A - \cos A, \quad \text{séc } B - \cos B, \quad \text{séc } C - \cos C, \quad \text{séc } D - \cos D,$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

Les distances du point P aux plans des faces du tétraèdre P ont pour mesures

$$PP_a = \frac{3VR}{R \,.\, \Sigma A \text{ séc } A - 3V} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos A}, \quad \ldots\ldots$$

COROLLAIRE. — *Le point* P *se confond avec le centre d'homothétie du tétraèdre* T *et du tétraèdre déterminé par les plans parallèles à ceux des faces* BCD, CDA, DAB, ABC *menés par les points* A_1, B_1, C_1, D_1.

THÉORÈME. — *Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre tangentiel* T_1 *est situé sur la* seconde *droite d'*EULER *du tétraèdre* T.

Car le centre O_1 de la sphère $A_1B_1C_1D_1$ est le transformé du centre O′ de la sphère A′B′C′D′, situé au milieu du segment OO′, dans l'homothétie (P, k). Le point O_1 partage le segment O′O dans le rapport

$$\overline{O'O_1} : \overline{OO_1} = 2k + 1.$$

COROLLAIRE. — *Si l'on désigne par* (I) *et* t *une sphère quadritangente du tétraèdre* T *et le tétraèdre podaire du point* I *par rapport à* T, *le tétraèdre podaire* t′ *du conjugué isogonal du point* I *pour le tétraèdre* t *est homothétique au tétraèdre* T *et le centre d'homothétie est situé sur la droite* OI *ainsi que le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* t′.

Il suffit de considérer le tétraèdre tangentiel comme tétraèdre *fondamental* dans le théorème précédent.

Plans associés à un tétraèdre.

8. Une transversale Δ rencontre les côtés BC, CA, AB d'un triangle respectivement en α, β, γ. On sait que les isotomiques α′, β′, γ′ (autrement dit les symétriques de α, β, γ par rapport aux milieux des côtés du triangle) sont aussi sur une droite Δ′ (transversale réciproque de Δ). Nous avons étendu comme suit cette propriété à un plan associé à un tétraèdre [1] : *un plan* π *coupe les arêtes d'un tétraèdre* ABCD *respectivement en des points* α, β, γ, λ, μ, ν. *Les isotomiques* α′, β′, γ′, λ′, μ′, ν′ *de ces points, par rapport aux milieux des arêtes qui les contiennent, sont situés dans un même plan* π′ (transversal réciproque ou réciproque de π).

9. THÉORÈME. — *Soient un tétraèdre* T ≡ ABCD, *un point arbitraire* M *de l'espace et un plan* (P) *qui coupe les arêtes* DA, DB, DC *respectivement en* α, β, γ. *Les plans* (BC, M), (CA, M) (AB, M) *rencontrent* DA, DB, BC *en* A′, B′, C′ *et si l'on pose*

$$\frac{\overline{A\alpha}}{\overline{\alpha D}} = x, \quad \frac{\overline{B\beta}}{\overline{\beta D}} = y, \quad \frac{\overline{C\gamma}}{\overline{\gamma D}} = z, \quad \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'A}} = m, \quad \frac{\overline{DB'}}{\overline{B'B}} = n, \quad \frac{\overline{DC'}}{\overline{C'C}} = p,$$

[1] V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1925-459.

la condition nécessaire et suffisante pour que le plan (P) *passe par* M *est que l'on ait*

$$mx + ny + pz = 1. \tag{1}$$

En effet, plaçons en D, A, B, C des poids proportionnels à 1, m, n, p; leur centre de gravité sera le point M. Dès lors, si l'on désigne par d_1, d_2, d_3, d_4 les distances dirigées de D, A, B, C au plan (P) et si l'on écrit que la somme algébrique des moments des poids par rapport à un plan (P) passant par le centre de gravité M est nulle, on a

$$d_1 + d_2 m + d_3 n + d_4 p = 0.$$

Si l'on remarque, de plus, que les rapports $d_2 : d_1$, $d_3 : d_1$, $d_4 : d_1$ valent $-x$, $-y$, $-z$, on obtient la relation (1). Inversement, si la relation (1) existe, la somme algébrique des moments des poids 1, m, n, p par rapport à (P) est nulle, et il en résulte que ce plan passe par le centre de gravité du système de poids considérés.

Corollaire. — *La condition nécessaire et suffisante pour que quatre plans* (P), (P_1), (P_2), (P_3), *qui rencontrent les arêtes* DA, DB, DC *d'un tétraèdre* T *en* (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, *soient concourants est que les plans passant par les arêtes* BC, CA, AB *et par les isotomiques de ces points sur les arêtes* DA, DB, DC *concourent respectivement en des points* M, M_1, M_2, M_3 *situés dans un même plan.*

Soient (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les rapports qui caractérisent les points (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ et Q le point de concours de (P), (P_1), (P_2), (P_3); M, M_1, M_2, M_3 les points obtenus comme il est dit dans l'énoncé. Désignons par (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ les rapports analogues à m, n, p pour les points M, M_1, M_2, M_3. On constate que

$$\begin{array}{llll} x = \lambda, & x_1 = \lambda_1, & x_2 = \lambda_2, & x_3 = \lambda_3, \\ y = \mu, & y_1 = \mu_1, & y_2 = \mu_2, & y_3 = \mu_3, \\ z = \nu, & z_1 = \nu_1, & z_2 = \nu_2, & z_3 = \nu_3. \end{array}$$

Les relations

$$\begin{aligned} mx + ny + pz &= 1, \\ mx_1 + ny_1 + pz_1 &= 1, \\ mx_2 + ny_2 + pz_2 &= 1, \\ mx_3 + ny_3 + pz_3 &= 1, \end{aligned}$$

qui expriment que (P), (P_1), (P_2), (P_3) passent par Q, entraînent les suivantes

$$\lambda m + \mu n + \nu p = 1, \quad \lambda_1 m + \mu_1 n + \nu_1 p = 1, \quad \lambda_2 m + \mu_2 n + \nu_2 p = 1, \quad \lambda_3 m + \mu_3 n + \nu_3 p = 1,$$

et réciproquement. Or, les dernières relations expriment que les points M, M_1, M_2, M_3 appartiennent au plan qui détermine sur DA, DB, DC des rapports m, n, p, c'est-à-dire au plan transversal réciproque du plan A'B'C' qui passe par les points de rencontre des plans (BC, Q), (CA, Q), (AB, Q) avec DA, DB, DC. Les points M, M_1, M_2, M_3 sont donc coplanaires, et inversement si les points M, M_1, M_2, M_3 sont dans un même plan, les plans (P), (P_1), (P_2), (P_3) concourent en un point Q.

Démonstration géométrique. — Par trois points quelconques il passe une quadrique conjuguée à un tétraèdre (car ces quadriques forment un système linéaire à trois paramètres). Si Q est la quadrique conjuguée à un tétraètre DABC et qui passe par les milieux de DA, DB, DC (et par suite aussi par les points à l'infini de ces arêtes) le point M et le plan (P) sont pôle et plan polaire par rapport à Q. En effet, α sur l'arête DA a pour plan polaire un plan passant par BC et qui coupe DA au point isotomique de α (conjugué de α par rapport au milieu et au point à l'infini de DA). De même β, γ ont pour plans polaires les plans passant respectivement par CA, AB et par les isotomiques de β, γ. Le plan (P) des points α, β, γ a donc pour pôle le point M intersection des trois plans polaires. De même (P_1), (P_2), (P_3) ont pour pôles M_1, M_2, M_3; si les quatre plans concourent, les quatre points sont coplanaires et réciproquement.

10. Théorème. — *Si deux tétraèdres* T *et* T' *sont homothétiques par rapport à un point* P, k *étant le rapport d'homothétie, le tétraèdre* $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ *formé par les plans transversaux réciproques des plans des faces du tétraèdre* T', *par rapport au tétraèdre* T, *se confond avec le transformé de celui-ci par l'homothétie* [ω, — (2 + k)], *le centre* ω *étant défini par la relation*

$$\overline{P\omega} = \frac{4\overline{PG}}{3+k},$$

G *désignant le centre de gravité du tétraèdre* T.

En effet, si l'on désigne par P_a, P_b, P_c, P_d les projections orthogonales de P sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC, par H_a, H'_a, H_{1a} celles du point A sur les plans BCD, B'C'D', $B_1C_1D_1$, on obtient

$$\overline{AH_{1a}} = \overline{H'_aH_a} = (1-k) \cdot \overline{PP_a}.$$

Le tétraèdre anticomplémentaire T'' du tétraèdre T est le transformé de celui-ci par l'homothétie (G, — 3). La distance $P''P''_a$ de

l'homothétique P″ de P dans l'homothétie (G, — 3), au plan B″C″D″ a pour mesure

$$\overline{P''P''_a} = -3\overline{PP_a} = -\frac{3}{1-k}\cdot\overline{H''H''_a} = -\frac{3}{1-k}\cdot\overline{AH_{1a}}.$$

La distance du point P″ au plan $B_1C_1D_1$ est donc

$$\overline{P''P_{1a}} = \overline{P''P''_a} + \overline{AH_{1a}} = -(2+k)\,.\,\overline{PP_a} = \frac{2+k}{3}\cdot\overline{P''P''_a}.$$

De même

$$\overline{P''P_{1b}} = \frac{2+k}{3}\cdot\overline{P''P''_c}, \qquad \overline{P''P_{1c}} = \frac{2+k}{3}\cdot\overline{P''P''_c},$$

$$\overline{P''P_{1d}} = \frac{2+k}{3}\,\overline{P''P''_d}.$$

Dès lors, le tétraèdre T_1 est déjà le transformé de T″ par l'homothétie $\left(P'', \frac{2+k}{3}\right)$, ensuite celui du tétraèdre T par l'homothétie $[\omega, -(2+k)]$, dont le centre est tel que $\overline{\omega P''} = -(2+k)\,.\,\overline{\omega P}$, d'où

$$\frac{\overline{\omega P''}}{-(2+k)} = \frac{\overline{\omega P}}{1} = \frac{\overline{PP''}}{-(3+k)} = -\frac{4\overline{PG}}{3+k},$$

autrement dit

$$\overline{P\omega} = \frac{4\overline{PG}}{3+k}.$$

N. B. — Le rapport des volumes des tétraèdres T_1 et T est égal à $-(2+k)^3$ en grandeur et en signe. Quand le point P coïncide avec le centre d'une sphère tangente aux plans des faces de T, le point P″ se confond avec le centre d'une sphère tangente aux plans des faces de T_1. Lorsque $k = 1$, les tétraèdres T, T_1 sont confondus. Si $k = -2$, les points A_1, B_1, C_1, D_1 coïncident. Enfin, si $k = -1$, les tétraèdres T et T_1 sont symétriques par rapport au point ω tel que $P\omega = 2PG$ et leurs volumes sont égaux, mais de signes contraires.

11. Théorème. — *Cinq plans étant donnés, les plans tranversaux réciproques de chacun d'eux par rapport au tétraèdre formé par les quatre autres sont parallèles.*

a) Analogie en géométrie plane. Soient M, N, P les milieux des segments Aα, Bβ, Cγ dont les extrémités α, β, γ coïncident avec les points de rencontre d'une transversale Δ avec les côtés BC, CA, AB d'un triangle; β′, γ′ l'un des sommets des parallélogrammes γβCβ′, βγBγ′. Les segments $\overline{\gamma\beta'}$ et $\overline{\beta C}$ étant équipollents ainsi que les seg-

ments $\overline{C\gamma'}$, $\overline{\beta'B}$, le triangle $B\gamma\beta'$ et le triangle XAY dont les sommets X, Y coïncident avec les points de rencontre de la droite de NEWTON $\delta \equiv (M, N, P)$ du quadrilatère complet $(Q) \equiv (ABC, \Delta)$ avec les droites AC, AB sont homothétiques, de sorte que l'on a

$$AX : AY = \gamma\beta' : \gamma B = \beta C : \gamma B.$$

Dès lors, si l'on désigne par $\Delta_a \equiv (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ la transversale réciproque de BC par rapport au triangle $A\beta\gamma$, on obtient

$$A\beta_1 = \beta C, \quad A\gamma_1 = \gamma B, \qquad \text{soit} \qquad A\beta_1 : A\gamma_1 = \beta C : \gamma B,$$

et des relations analogues pour les transversales réciproques Δ_b, Δ_c, Δ' de CA, AB, Δ dans les triangles $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$, ABC. D'où cette proposition : *dans un quadrilatère complet* (Q) *les transversales réciproques de chacun des côtés, par rapport au triangle formé par les trois autres, sont parallèles à la droite de* NEWTON.

COROLLAIRE. — *Les droites orthocentriques des quadrilatères complets* (ABC, Δ), (ABC, Δ'), ..., *sont perpendiculaires respectivement à* Δ', Δ, ...

N. B. — Les cercles circonscrits aux triangles ABC, $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$ concourent au foyer F de la parabole inscrite au quadrilatère (Q) dont l'axe est parallèle à la droite de NEWTON δ. Il en résulte que les parallèles à δ menées par A, B, C coïncident avec les conjuguées isogonales Ax, By, Cz des axes radicaux FA, FB, FC du cercle ABC, associé aux cercles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$. Donc, *les transversales réciproques* Δ', Δ_a, Δ_b, Δ_c *et la droite* δ *sont parallèles aux antiparallèles, par rapport aux angles en* A, B, C *du triangle* ABC, *des axes radicaux du cercle* ABC *avec chacun des cercles* $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$, *et ainsi de suite.*

b) Revenons au théorème qu'il s'agit de démontrer en considérant un plan (P) qui rencontre les arêtes DA, DB, DC, BC, CA, AB d'un tétraèdre T aux points α, β, γ, α', β', γ' dont les isotomiques sur les arêtes correspondantes sont situés dans le plan réciproque (P') de (P). Soient (P_D), (P_A), (P_B), (P_C) les plans réciproques des plans ABC, BCD, CDA, DAB par rapport aux tétraèdres $D\alpha\beta\gamma$, $A\alpha\beta'\gamma'$, $B\beta\gamma'\alpha'$, $C\gamma\alpha'\beta'$. Les traces du plan (P_D) sur les plans DAB, BCD, CDA se confondent avec les transversales réciproques A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 de AB, BC, CA par rapport aux triangles DAB, BCD, CDA, tandis que les traces du plan (P_A) sur les plans ABC, DAB, CDA coïncident avec les transversales réciproques B_2C_2, D_2B_2, C_2D_2 de BC, DB, CD pour les triangles ABC, DAB, CDA. Comme A_1B_1 et B_2D_2 sont parallèles ainsi que C_1A_1 et C_2D_2, les plans $(P_D) \equiv (A_1B_1, C_1A_1)$, $(P_A) \equiv (B_2D_2, C_2D_2)$ sont parallèles entre eux de même que les plans (P_B), (P_C), (P_D), par analogie, ce qui achève de démontrer le théorème.

COROLLAIRE. — *Les plans* (P′), (P_A), (P_B), (P_C), (P_D) *sont parallèles au plan que décrit le pôle du plan de l'infini par rapport à la surface de* STEINER Σ *d'équation tangentielle barycentrique*

$$\Sigma \equiv \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} + \frac{\delta}{s} = 0$$

ou

$$\alpha vws + \beta uws + \gamma uvs + \delta uvw = 0 \text{ (1)}.$$

par rapport au tétraèdre T *et tangente au plan*

$$(P) \equiv lx + my + nz + pt = 0,$$

ce qui s'exprime par

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} + \frac{\delta}{p} = 0.$$

En effet, l'équation tangentielle du pôle du plan de l'infini, de coordonnées (1, 1, 1, 1) par rapport à la surface Σ, est

$$u(\beta + \gamma + \delta) + v(\gamma + \delta + \alpha) + w(\delta + \alpha + \beta) + s(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

On a donc, si x, y, z, t sont les coordonnées du pôle,

$$\frac{x}{\beta+\gamma+\delta} = \frac{y}{\gamma+\delta+\alpha} = \frac{z}{\delta+\alpha+\beta} = \frac{t}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{x+y+z+t}{3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$$
$$= \frac{\dfrac{x+y+z+t}{3} - x}{\alpha} = \ldots = \frac{1}{\lambda},$$

ce qui donne

$$\alpha = \lambda\left(\frac{x+y+z+t}{3} - x\right), \quad \ldots$$

---

(1) Nous indiquons les deux formes de Σ parce que la première est plus commode pour l'expression de la condition (1) et que les dérivations pour l'obtention de l'équation tangentielle du pôle doivent être effectuées sur la forme entière, ce qui n'est pas nécessaire pour obtenir le point de contact d'un plan, ce que nous effectuerons plus loin. En effet, pour déterminer le pôle d'un plan tangent à une surface $f(u, v, w, s) = 0$, on peut effectuer les dérivations sur l'équation non entière, par exemple divisée par $uvws$ comme nous avons l'occasion de le faire pour le théorème suivant (12).

Supposons donc que f soit multipliée par une fonction quelconque de u, v, w, s, ici $\frac{1}{uvws}$. Les dérivées de $f\varphi$ sont $f'\varphi + f\varphi'$ et quand on y substitue les coordonnées d'un plan tangent, lesquelles annulent f, le second terme est nul et il reste des quantités proportionnelles aux f', ce qui ne se produit pas pour le pôle d'un plan quelconque, cas où il faut prendre l'équation sous forme entière.

D'après (1), le lieu du pôle du plan de l'infini relativement à Σ est donc :

$$\frac{1}{3}(x+y+z+t)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}+\frac{t}{p}\right)=0,$$

plan parallèle aux cinq plans (P′), (P_A), (P_B), (P_C), (P_D), car le plan (P′) a pour équation

$$\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}+\frac{t}{p}=0,$$

les coordonnées barycentriques de deux plans réciproques étant inverses.

Corollaire. — *Les cinq droites de* Newton *des quadrilatères complets formés dans chacun des plans par les traces des quatre autres sont parallèles à un même plan.*

Il suffit de partir de la propriété corrélative suivante :

Étant donnés six points A_i, si l'on considère les six cônes quadriques ayant pour sommets chacun des points et passant par les cinq autres, ces cônes passent par la cubique gauche déterminée par les six points et par suite les plans tangents aux six cônes qui passent par un des points A_i sans y avoir leur sommet ont leurs plans tangents en ce point qui passent par une même droite confondue en la tangente à la cubique gauche. Il suffit de prendre la polaire réciproque de la figure précédente par rapport à une quadrique ayant pour centre le point A_i considéré pour obtenir la propriété relative aux droites de Newton.

Corollaire. — *Si l'on désigne par* π_a, π_b, π_c, π_d *les plans radicaux de la sphère* ABCD *avec les sphères* $D\alpha\beta\gamma$, $A\alpha\beta'\gamma'$, $B\beta\gamma'\alpha'$, $C\gamma\alpha'\beta'$, *les sections antiparallèles de ces plans dans les angles trièdres de sommets* A, B, C, D *sont parallèles entre elles et la direction commune de leurs plans est celle des plans* (P′), (P_A), (P_B), (P_C), (P_D).

Corollaire. — *Soient* G *et* G_a, G_b, G_c, G_d *les centres de gravité de* T *et des faces* BCD, CDA, DAB, ABC. *Les six points tels que le point de rencontre* G_{ad} *du plan* (BC, α) *avec la droite* G_aG_d *sont dans un même plan dont le transformé par l'homothétie* (G, 3) *se confond avec le plan réciproque du plan* (P) *par rapport au tétraèdre fondamental.*

12. Théorème. — *Si un plan variable* (P) *passe par un point fixe* Q, *son réciproque* (P′), *par rapport au tétraèdre* T, *enveloppe une surface de la troisième classe et du quatrième ordre coupant les plans des faces du tétraèdre suivant des coniques doubles tangentes aux arêtes. Si le point* Q *est à l'infini, la surface touche le plan de l'infini en* Q.

La réciproque (P′) du plan

$$(P) = ux + vy + wz + ts = 0,$$

en coordonnées barycentriques, a pour équation

$$(P') \equiv Ux + Vy + Wz + St = 0 \quad \text{avec} \quad Uu = Vv = Ww = Ss$$

Si (P) passe par un point fixe Q (x_0, y_0, z_0, t_0), on a

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + st_0 = 0,$$

et par suite (P′) enveloppe la surface de Steiner

$$(S) \equiv \frac{x_0}{U} + \frac{y_0}{V} + \frac{z_0}{W} + \frac{t_0}{S} = 0.$$

Pour avoir son équation ponctuelle, soit $U_0V_0W_0S_0$ un de ses plans tangents. L'équation tangentielle de son point de contact est

$$U\frac{\partial(S)}{\partial U_0} + V\frac{\partial(S)}{\partial V_0} + W\frac{\partial(S)}{\partial W_0} + S\frac{\partial(S)}{\partial S_0} = 0,$$

(S) pouvant être prise sous la forme précédente bien que non entière, ce qui donne

$$-U\frac{x_0}{U_0^2} - V\frac{y_0}{V_0^2} - W\frac{z_0}{W_0^2} - S\frac{t_0}{S_0^2} = 0.$$

Les coordonnées des points de contact sont donc proportionnelles à $\frac{y_0}{V_0^2}, \frac{z_0}{W_0^2}, \frac{t_0}{S_0^2}$, c'est-à-dire que U_0, V_0, W_0, S_0 sont proportionnelles à $\sqrt{\frac{x_0}{x}}, \cdots$, et comme $\frac{x_0}{U_0} + \frac{y_0}{V_0} + \frac{z_0}{W_0} + \frac{t_0}{S^0} = 0$, il vient

$$\sqrt{xx_0} + \sqrt{yy_0} + \sqrt{zz_0} + \sqrt{tt_0} = 0.$$

La surface (S) est tangente au plan de l'infini quand son équation tangentielle est satisfaite pour les coordonnées de ce plan, c'est-à-dire quand

$$x_0 + y_0 + z_0 + t_0 = 0.$$

Le point Q est alors dans le plan de l'infini et coïncide avec le point de contact car $U_0 = V_0 = W_0 = S_0 = 1$.

Notes. — 1° En géométrie plane, la condition nécessaire et suffisante pour que les transversales réciproques des côtés B′C′, C′A′, A′B′ d'un triangle T′ par rapport à un triangle T ≡ ABC soient concourantes est que T et T′ soient circonscrits à une même conique. Dans ces conditions les transversales réciproques des droites BC, CA, AB par rapport à T sont aussi concourantes.

Il n'y a pas en général, d'analogie entre deux tétraèdres T et T′

circonscrits à la surface (S) de STEINER précitée. En effet, si le tétraèdre T′ est circonscrit à (S), les réciproques des plans de ses faces, par rapport à T, sont concourants, tandis que les réciproques des plans des faces de T pour T′ ne passent par un même point que si les plans des faces de T sont tangents à la surface (S′) de T′. Cela provient de ce que T et T′ ne jouent pas le même rôle par rapport à (S), car les plans des faces de T sont des plans tangents singuliers à (S), et ceux des faces de T′ des plans tangents ordinaires.

2° De même que deux transversales réciproques sont les asymptotes d'une hyperbole circonscrite au triangle, deux plans réciproques sont les plans asymptotes d'un cylindre hyperbolique circonscrit au tétraèdre. De ce fait, le produit des distances de chaque sommet aux deux plans réciproques est le même pour les quatre sommets.

Deux plans réciproques P et P′ sont conjugués par rapport aux six couples de points formés par les milieux et les points à l'infini des arêtes du tétraèdre T. Si l'on prend la polaire réciproque de cette figure par rapport à la sphère circonscrite à T, on obtient six couples de plans passant par les arêtes du tétraèdre T polaire de T et rectangulaires, c'est-à-dire les six couples de plans bissecteurs de T′. Les pôles des plans P et P′ sont des points isogonaux de T′ et, de la transformation par points isogonaux, on peut déduire des propriétés correspondantes pour la transformation par plans réciproques.

De même qu'il y a quatre couples de points isogonaux alignés sur un point M et conjugués par rapport à ce point et à un plan P, il y a quatre couples de plans réciproques se coupant sur un plan P et conjugués par rapport à ce plan et à un point M.

3° Correspondant aux points doubles de la transformation isogonale (centres des sphères quadritangentes de T), les plans réciproques d'eux-mêmes sont le plan de l'infini et ses transformés dans les 7 involutions (3 biaxiales, 4 centrales) qui conservent le tétraèdre. De même que sur les droites joignant deux centres de sphères quadritangentes, il y a une infinité de couples isogonaux (tous les couples conjugués par rapport aux deux centres), par chacune des 28 droites d'intersection de deux plans doubles, il y a une infinité de couples de plans réciproques, les couples de plans conjugués par rapport à ces deux plans doubles. Les droites d'intersection de deux plans réciproques forment le complexe du troisième degré des génératrices des paraboloïdes conjugués au tétraèdre.

4° De même que sur une droite issue d'un centre de sphère quadritangente il n'y a aucun couple de points isogonaux autre que le couple double formé par ce centre, sauf si la droite passe par un autre centre de sphère quadritangente, par une droite à l'infini il ne passe aucun couple de plans réciproques autre que le couple double formé par le plan de l'infini, excepté si la droite se trouve sur un des 7 autres plans doubles. Dans ce cas (plans parallèles aux faces ou à deux arêtes opposées), il y a une infinité de couples de plans *réciproques parallèles*.

12'. Plans réciproques rectangulaires. Deux plans transversaux réciproques (P), (P'), par rapport à ce tétraèdre, sont rectangulaires si l'on a l'équation

$$\begin{aligned}(A^2+B^2+C^2+D^2)uvws &- AB(u^2+v^2)ws\cos c' - AC(w^2+u^2)vs\cos b' \\ &- AD(s^2+u^2)vw\cos a - BC(w^2+v^2)us\cos a' \\ &- BD(s^2+v^2)uw\cos b - CD(s^2+w^2)uv\cos c = 0,\end{aligned}$$

qui représente une surface de quatrième classe admettant les plans des faces et celui de l'infini comme plans tangents doubles.

Démonstration géométrique. — Les plans réciproques perpendiculaires étant conjugués par rapport à tous les paraboloïdes conjugués à T ainsi qu'à l'ombilical, sont conjugués à tous les paraboloïdes homofocaux aux paraboloïdes conjugués et par suite aux couples de foyers (un à distance finie, un à l'infini) des quatre paraboloïdes de révolution conjugués à T. Ces couples de plans coupent les axes de ces paraboloïdes (confondus avec les hauteurs du tétraèdre ayant pour sommets les quatre foyers à distance finie) en des couples de points symétriques par rapport à ces foyers.

Les paraboloïdes conjugués au tétraèdre forment un système linéaire tangentiel à deux paramètres (ou L^2 tangentiel); par suite ceux qui leur sont homofocaux forment un L^3 tangentiel. L'enveloppe des plans qui leur sont conjugués est donc la *jacobienne* [1] de ce L^3, surface de quatrième classe contenant les droites-supports des dix couples de points du système. Ces dix couples sont, d'une part, les six couples formés du milieu et du point à l'infini d'une arête et, d'autre part, les quatre couples de foyers des paraboloïdes de révolution conjugués au tétraèdre.

Cette surface de quatrième classe contient donc les arêtes du tétraèdre et les axes des quatre paraboloïdes de révolution conjugués au tétraèdre.

13. Théorème. — *Si l'on représente par* h_a, h_b, h_c, h_d *les mesures des hauteurs* AA_h, BB_h, CC_h, DD_h *d'un tétraèdre* T *et par* d_a, d_b, d_c, d_d *celles des distances des plans* BCD, CDA, DAB, ABC *aux plans* $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ *des faces d'un tétraèdre* T_1 *homothétique au premier, on a la relation*

$$(1)\qquad V_1 = V\left(1-\frac{d_a}{h_a}-\frac{d_b}{h_b}-\frac{d_c}{h_c}-\frac{d_d}{h_d}\right)^3,$$

entre les mesures des volumes V *et* V_1 *des tétraèdres* T *et* T_1.

Pour simplifier l'écriture, désignons par f_i ($i = a, b, c, d$) les faces

[1] Voir Darboux : *Sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second degré*, Bulletin des Sciences mathématiques, t. I (1870), pp. 348-358.

et les plans des faces du tétraèdre T et par π_i celles et ceux du tétraèdre T_1. Les distances d_i sont considérées comme positives ou négatives suivant que les sommets du tétraèdre T et les plans correspondants des faces du tétraèdre T_1 sont du même côté ou non des faces correspondantes du tétraèdre T; par exemple si le sommet A et le plan $B_1C_1D_1$ sont du même côté ou non du plan BCD. Enfin, désignons par V, V_2, V_3, V_4, V_1 les mesures des volumes $f_af_bf_cf_d$, $\pi_af_bf_cf_d$, $\pi_a\pi_bf_cf_d$, $\pi_a\pi_b\pi_cf_d$, $\pi_a\pi_b\pi_c\pi_d$ en leur appliquant la règle des signes suivant leur orientation et en supposant le volume V du tétraèdre T positif.

Le rapport d'homothétie des tétraèdres $f_af_bf_cf_d \equiv T$ et $\pi_af_bf_cf_d$ a pour valeur absolue $\dfrac{h_a}{h_a - d_a}$; par suite

$$\frac{V_2}{V} = \frac{(h_a - d_a)^3}{h_a^3} = \left(1 - \frac{d_b}{h_a}\right)^3. \tag{2}$$

Cette formule s'applique au cas de d_a négatif et donne à V_2 le signe — lorsque $d_a > h_a$.

La hauteur du tétraèdre $\pi_af_bf_cf_d$ relative au plan f_b ayant pour mesure $h_b\left(1 - \dfrac{d_a}{h_a}\right)$, on a, d'abord,

$$\frac{V_3}{V_2} = \left[1 - \frac{d_b}{h_b\left(1 - \dfrac{d_a}{h_a}\right)}\right]^3, \tag{3}$$

ensuite, d'après les égalités (2),

$$\frac{V_3}{V} = \left(1 - \frac{d_a}{h_a} - \frac{d_b}{h_b}\right)^3.$$

En continuant de proche en proche, on obtient

$$V_1 = V\left(1 - \frac{d_a}{h_a} - \frac{d_b}{h_b} - \frac{d_c}{h_c} - \frac{d_d}{h_d}\right)^3;$$

c'est la relation (1), d'où provient le rapport d'homothétie

$$k = 1 - \frac{d_a}{h_a} - \frac{d_b}{h_b} - \frac{d_c}{h_c} - \frac{d_d}{h_d} \tag{4}$$

des tétraèdres T_1 et T.

14. Théorème. — *Par les sommets* A, B, C, D *d'un tétraèdre* T, *si l'on mène des plans parallèles à une direction arbitraire qui rencontrent une droite donnée* Δ *en* A_2, B_2, C_2, D_2, *les droites* AA_2, BB_2, CC_2, DD_2

percent les plans BCD, CDA, DAB, ABC *aux points* A_3, B_3, C_3, D_3 *et l'on a*

$$\frac{AA_2}{AA_3}+\frac{BB_2}{BB_3}+\frac{CC_2}{CC_3}+\frac{DD_2}{DD_3}=2. \tag{5}$$

Si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ les traces sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC des parallèles à Δ menées par les sommets opposés du tétraèdre T et celles de la droite Δ sur les mêmes plans, les égalités

$$\frac{AA_2}{AA_3}=1-\frac{A_3A_2}{A_3A}=1-\frac{A_2\alpha'}{A\alpha}$$

et leurs analogues ramènent la relation (5) à la suivante :

$$S=\frac{A_2\alpha'}{A\alpha}+\frac{B_2\beta'}{B\beta}+\frac{C_2\gamma'}{C\gamma}+\frac{D_2\delta'}{D\delta}=2.$$

Supposons que les sommets B, C, D du tétraèdre T restant fixes ainsi que la droite Δ et la direction (π) des plans parallèles, le sommet A se déplace sur l'arête AB. Les deux derniers termes de S sont inchangés et en écrivant

$$\frac{A_2\alpha'}{A\alpha}+\frac{B_2\beta'}{B\beta}=\frac{A_2B_2}{A\alpha}+\frac{B_2\alpha'}{A\alpha}+\frac{B_2\alpha'}{B\beta}+\frac{\alpha'\beta'}{B\beta}$$
$$=\frac{A_2B_2}{A\alpha}+B_2\alpha'\cdot\left(\frac{1}{A\alpha}+\frac{1}{B\beta}\right)+\frac{\alpha'\beta'}{B\beta},$$

on constate que les trois termes apparus sont constants.

En effet, le rapport $\frac{A_2B_2}{AB}$ est invariant (réciproque du théorème de Thalès) ainsi que le rapport $\frac{AB}{A\alpha}$ dans le triangle de forme constante $AB\alpha$ et leur produit $\frac{A_2B_2}{A\alpha}$ ne change pas. D'autre part, les droites $B\alpha$ et βA se coupent sur l'arête CD en un point fixe a et

$$\frac{1}{A\alpha}+\frac{1}{B\beta}=\frac{aB}{A\alpha}\cdot\frac{1}{aB}$$

est une quantité constante. Enfin les vecteurs parallèles $\alpha'\beta'$ et $B\beta$ restent dans un rapport constant lorsque le plan ACD pivote autour de l'arête CD. Dès lors, on peut, sans modifier S, ni $\Sigma\frac{AA_2}{AA_3}$, déplacer les sommets B et C sur les arêtes AB et AC de manière à amener le

plan BCD à être parallèle au plan (π). Alors B_2, C_2, D_2 sont confondus en un point Q et $\Sigma \frac{AA_2}{AA_3}$ se réduit à l'expression connue

$$\frac{BQ}{BB_3} + \frac{CQ}{CC_3} + \frac{DQ}{DD_3} = 2,$$

les points B_3, C_3, D_3 étant sur les côtés du triangle BCD [1].

Démonstration analytique. — En se rapportant à un système de coordonnées cartésiennes avec axes obliques, nous pouvons poser D (0, 0, 0), A $(a, 0, 0)$, B $(0, b, 0)$, C $(0, 0, c)$. Soient la droite donnée par

$$x = x_0 + \lambda l, \qquad y = y_0 + \lambda m, \qquad z = z_0 + \lambda n,$$

et le plan π_D d'équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

passant par le sommet D du tétraèdre T. Alors D_2 est le point de la droite L pour lequel le paramètre λ satisfait

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + \lambda(lu + mv + nw) = 0.$$

Puisque le plan ABC a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

nous avons, en posant $DD_2 : DD_3 = \mu$,

$$\frac{1}{\mu}\left[\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} - \left(\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c}\right)\left(\frac{ux_0 + vy_0 + wz_0}{lu + mv + nw}\right)\right] = 1$$

Ainsi

$$(6) \quad \frac{DD_2}{DD_3} = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} - \left(\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c}\right)\left(\frac{ux_0 + vy_0 + wz_0}{lu + mv + nw}\right).$$

Les équations des plans π_A et BCD étant

$$u(x - a) + vy + wz = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 0,$$

on a pour le point A_2,

$$u(x_0 - a) + vy_0 + wz_0 + \lambda(lu + mv + nw) = 0,$$

---

[1] Démonstration par M. R. Guillotin.

de sorte que, et par analogie,

$$(7)\qquad \frac{AA_2}{AA_3} = \frac{-(x_0-a)}{a} + \frac{l}{a}\cdot\frac{u(x_0-a)+vy_0+wz_0}{lu+mv+nw},$$

$$(8)\qquad \frac{BB_2}{BB_3} = \frac{-(y_0-b)}{b} + \frac{m}{b}\cdot\frac{ux_0+v(y_0-b)+wz_0}{lu+mv+nw},$$

$$(9)\qquad \frac{CC_2}{CC_3} = \frac{-(z_0-c)}{c} + \frac{n}{c}\cdot\frac{ux_0+vy_0+w(z_0-c)}{lu+mv+nw}.$$

En additionnant les relations (6) à (9), on obtient l'égalité

$$\sum\frac{AA_2}{AA_3} = 3-\left(\frac{lu+mv+nw}{lu+mv+nw}\right) = 2$$

qu'il s'agissait d'établir.

15. Corollaires. — 1° *Par les sommets* A, B, C, D *d'un tétraèdre* T, *si l'on mène des plans parallèles qui rencontrent une droite arbitraire* Δ *en* A_2, B_2, C_2, D_2, *les plans passant par* A_2, B_2, C_2, D_2 *et respectivement parallèles aux plans* BCD, CDA, DAB, ABC *déterminent un tétraèdre* $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ *inversement égal au tétraèdre* T.

En effet, si les droites AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 rencontrent les plans BCD, CDA, DAB, ABC en A_3, B_3, C_3, D_3, d'après la formule (4), le rapport d'homothétie des tétraèdres T_1 et T est égal à

$$1-\frac{A_2A_3}{AA_3}-\frac{B_2B_3}{BB_3}-\frac{C_2C_3}{CC_3}-\frac{D_2D_3}{DD_3} = 1-2 = -1,$$

car la relation (5) entraîne la suivante :

$$(10)\qquad \frac{A_2A_3}{AA_3}+\frac{B_2B_3}{BB_3}+\frac{C_2C_3}{CC_3}+\frac{D_2D_3}{DD_3} = 2.$$

2° *La somme algébrique des volumes des tétraèdres* A_2BCD, B_2CDA, C_2DAB, D_2ABC *équivaut à deux fois le volume du tétraèdre* T.

Cela résulte clairement de la relation (10).

3° *Par les sommets* A, B, C, D *d'un tétraèdre* T, *si l'on mène quatre parallèles qui rencontrent un plan arbitraire en* A_2, B_2, C_2, D_2, *les plans passant par* A_2, B_2, C_2, D_2 *et respectivement parallèles aux plans* BCD, CDA, DAB, ABC, *forment un tétraèdre* T_1 *inversement homothétique au premier, le rapport d'homothétie étant égal à* — 2.

En effet, si les parallèles AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 rencontrent les plans

BCD, CDA, DAB, ABC en A_3, B_3, C_3, D_3, le rapport d'homothétie des tétraèdres T_1 et T est égal à

$$1-\frac{A_2A_3}{AA_3}-\frac{B_2B_3}{BB_3}-\frac{C_2C_3}{CC_3}-\frac{D_2D_3}{DD_3}=1-3=-2,$$

car, en vertu de la relation classique

$$\frac{AA_2}{AA_3}+\frac{BB_2}{BB_3}+\frac{CC_2}{CC_3}+\frac{DD_2}{DD_3}=1,$$

qui équivaut à la suivante,

$$\sum\frac{AA_3-A_2A_3}{AA_3}=1,$$

on a l'égalité

$$\frac{A_2A_3}{AA_3}+\frac{B_2B_3}{BB_3}+\frac{C_2C_3}{CC_3}+\frac{D_2D_3}{DD_3}=3. \tag{11}$$

4° *La somme algébrique des volumes des tétraèdres* A_2BCD, B_2CDA, C_2DAB, D_2ABC *équivaut à trois fois le volume du tétraèdre* T.

Cette proposition résulte de l'égalité (11).

16. Sur les points qui divisent dans un même rapport quatre segments arbitraires de l'espace.

Soient, en axes rectangulaires, (x_i, y_i, z_i), (x'_i, y'_i, z'_i), $(i = 1, 2, 3, 4)$ les coordonnées de deux quaternes quelconques de points A_i, A'_i de l'espace; M_i les points qui divisent les segments $A_iA'_i$ dans un même rapport $k \neq -1$. Les coordonnées de M_i étant dès lors

$$\frac{x_i+kx'_i}{1+k},\quad \frac{y_i+ky'_i}{1+k},\quad \frac{z_i+kz'_i}{1+k}, \tag{1}$$

le sextuple de la valeur algébrique du volume du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est le déterminant du quatrième ordre dont les éléments de chaque ligne sont les nombres (1) et l'unité. Par suite,

$$6(1+k)^4 . M_1M_2M_3M_4 = |x_i+kx'_i \quad y_i+ky'_i \quad z_i+kz'_i \quad 1+k|. \tag{2}$$

Par l'échange de toute ligne avec la colonne de même rang, ce déterminant s'écrit

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1+kx'_1 & x_2+kx'_2 & x_3+kx'_3 & x_4+kx'_4 \\ y_1+ky'_1 & y_2+ky'_2 & y_3+ky'_3 & y_4+ky'_4 \\ z_1+kz'_1 & z_2+kz'_2 & z_3+kz'_3 & z_4+kz'_4 \\ 1+k & 1+k & 1+k & 1+k \end{vmatrix}, \tag{3}$$

et si l'on pose

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |x_1x_2x_3x_4|,$$

on a

$$(4) \qquad \Delta = |x_1x_2x_3x_4| + k\Sigma|x'_1x_2x_3x_4| + k^2\Sigma|x'_1x'_2x_3x_4| + k^3\Sigma|x'_1x'_2x'_3x_4| + k^4|x'_1x'_2x'_3x'_4|.$$

Dès lors, (2) s'écrit

$$(5) \quad (1+k)^4 . M_1M_2M_3M_4 = A_1A_2A_3A_4 + k\Sigma A'_1A_2A_3A_4 + k^2\Sigma A'_1A'_2A_3A_4 + k^3\Sigma A'_1A'_2A'_3A_4 + k^4 . A'_1A'_2A'_3A'_4.$$

Si $k = -1$, (3) prouve que $\Delta = 0$, et (4) devient la relation de NEUBERG (M, 1922-288)

$$(6) \qquad A_1A_2A_3A_4 - \Sigma A'_1A_2A_3A_4 + \Sigma A'_1A'_2A_3A_4 - \Sigma A'_1A'_2A'_3A_4 + A'_1A'_2A'_3A'_4 = 0.$$

Le second membre de (5) est divisible par $1 + k$. L'élimination de $\Sigma A'_1A'_2A'_3A'_4$ entre (5) et (6) donne, après suppression du facteur $1 + k$,

$$(7) \quad (1+k)^3 . M_1M_2M_3M_4 = (1-k).A_1A_2A_3A_4 - (1-k)k^2 . A'_1A'_2A'_3A'_4 + k\Sigma A'_1A_2A_3A_4 + k^2\Sigma A_1A'_2A'_3A'_4.$$

17. Les valeurs de k pour lesquelles les quatre points M_i sont coplanaires sont les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le second membre de l'égalité (7), car alors le volume $M_1M_2M_3M_4$ est nul [1]. Cette équation est

$$(8) \quad k^3 . A'_1A'_2A'_3A'_4 + k^2(\Sigma A_1A'_2A'_3A'_4 - A'_1A'_2A'_3A'_4) + k(\Sigma A'_1A_2A_3A_4 - A_1A_2A_3A_4) + A_1A_2A_3A_4 = 0.$$

Il existe, en général, trois plans propres partageant dans le même rapport quatre segments arbitraires de l'espace (R. DEAUX).

NOTE. *Il y en a deux au plus* si -1 est racine de (8), donc *si*

$$(9) \qquad 2(A_1A_2A_3A_4 - A'_1A'_2A'_3A'_4) = \Sigma A'_1A_2A_3A_4 - \Sigma A_1A'_2A'_3A'_4$$

ou, sous une autre forme, si le déterminant (3) est divisible par $(1 + k)^2$, c'est-à-dire si

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 & x_2 - x'_2 & x_3 - x'_3 & x_4 - x'_4 \\ y_1 - y'_1 & y_2 - y'_2 & y_3 - y'_3 & y_4 - y'_4 \\ z_1 - z'_1 & z_2 - z'_2 & z_3 - z'_3 & z_4 - z'_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

[1] Pour $k = -1$, les quatre points M_i sont dans le plan impropre.

relation qui exprime que *les extrémités* B_i *des quatre vecteurs* $\overline{OB_i}$ *issus d'un même point* O *et équipollents aux vecteurs* $\overline{A_iA'}$ *sont coplanaires.*

Les deux autres valeurs de k sont racines de l'équation

$$(11)\quad k^2 . A'_1A'_2A'_3A'_4 + k(\Sigma A_1A'_2A'_3A'_4 - 2A'_1A'_2A'_3A'_4) + A_1A_2A_3A_4 = 0$$

obtenue en divisant le premier membre de (8) par $1 + k$, compte tenu de (9).

Un plan au plus répond à la question si, ayant (9), l'équation (11) admet la racine -1, c'est-à-dire si

$$(12)\quad \begin{aligned} A_1A_2A_3A_4 + A'_1A'_2A'_3A'_4 &= -2A'_1A'_2A'_3A'_4 + \Sigma A_1A'_2A'_3A'_4 \\ &= -2A_1A_2A_3A_4 + \Sigma A'_1A_2A_3A_4, \end{aligned}$$

et le k correspondant est donné par

$$(13)\qquad k . A'_1A'_2A'_3A'_4 + A_1A_2A_3A_4 = 0.$$

Il en est ainsi lorsque, (10) ayant lieu, le déterminant (3) est divisible par $(1 + k)^3$, donc si la dérivée par rapport à k de $\dfrac{\Delta}{1+k}$ s'annule pour $k = -1$. ou

$$(14)\qquad \Sigma \begin{vmatrix} x'_1 & x_2 - x'_2 & x_3 - x'_3 & x_4 - x'_4 \\ y'_1 & y_2 - y'_2 & y_3 - y'_3 & y_4 - y'_4 \\ z'_1 & z_2 - z'_2 & z_3 - z'_3 & z_4 - z'_4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si à (14) on additionne quatre fois (10), il vient

$$\Sigma \begin{vmatrix} x_1 & x_2 - x'_2 & x_3 - x'_3 & x_4 - x'_4 \\ y_1 & y_2 - y'_2 & y_3 - y'_3 & y_4 - y'_4 \\ z_1 & z_2 - z'_2 & z_3 - z'_3 & z_4 - z'_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on a donc la relation entre volumes

$$A_1B_2B_3B_4 + B_1A_2B_3B_4 + B_1B_2A_3B_4 + B_1B_2B_3A_4 = 0.$$

Enfin, *aucun plan propre ne répond à la question si* l'on a (12) et, par (13)

$$(15)\qquad A'_1A'_2A'_3A'_4 = A_1A_2A_3A_4,$$

c'est-à-dire (15) et

$$\Sigma A_1A'_2A'_3A'_4 = \Sigma A'_1A_2A_3A_4 = 4A_1A_2A_3A_4.$$

Les raisonnements précédents supposent que (8) n'est pas une identité.

18. Cas particuliers. — *a*) Lorsque les segments $A_iA'_i$ sont parallèles, ce qui donne, en prenant l'axe des x parallèle à la direction de ces segments, $y_i = y'_i$, $z_i = z'_i$, on retrouve la formule

$$(1 + k) . M_1M_2M_3M_4 = A_1A_2A_3A_4 + k . A'_1A'_2A'_3A'_4$$

qui équivaut à la suivante,

$$(1+k).M_1M_2M_3M_4 = (1-3k).A_1A_2A_3A_4$$

lorsque le tétraèdre $T' \equiv A'_1A'_2A'_3A'_4$ est, en outre, inscrit au tétraèdre $T \equiv A_1A_2A_3A_4$; car, dans ce cas,

$$A'_1A'_2A'_3A'_4 = -3A_1A_2A_3A_4.$$

b) Si $k = 1$, la formule (7) se réduit à

$$(16) \qquad 8M_1M_2M_3M_4 = \Sigma A_1A'_2A'_3A'_4 + \Sigma A'_1A_2A_3A_4.$$

Les volumes des tétraèdres transformés du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ par les homothéties $(P, \pm 2)$, P étant un point arbitraire situé à distance finie, sont équivalents, au signe près, à la somme des volumes du second membre de l'égalité (16). Cette remarque généralise une propriété relative à deux triangles coplanaires.

c) Dans le cas où le tétraèdre T′, effectif, ou dégénéré en un quadrangle plan $A'_1A'_2A'_3A'_4$ ou en une division rectiligne $\Delta = (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4)$, est inscrit au tétraèdre T, on obtient, suivant le cas, les relations

$$(1+k)^3.M_1M_2M_3M_4 = (1-k).A_1A_2A_3A_4 \\ -(1-k).k^2.A'_1A'_2A'_3A'_4 + k^2.\Sigma A_1A'_2A'_3A'_4,$$

$$(1+k)^2.M_1M_2M_3M_4 = (1-k).A_1A_2A_3A_4 + k^2.\Sigma A_1A'_2A'_3A'_4,$$

$$(1+k)^3.M_1M_2M_3M_4 = (1-k).A_1A_2A_3A_4.$$

Lorsque $k = 1$, les deux premières se réduisent à

$$8M_1M_2M_3M_4 = \Sigma A_1A'_2A'_3A'_4,$$

tandis que, d'après la dernière, *les points* M_i *sont coplanaires* [1].

19. *Si quatre parallélépipèdes* $A_iB_iC_iD_iA'_iB'_iC'_iD'_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, *construits sur les segments* $A_iC'_i$ *comme diagonales ont leurs arêtes correspondantes parallèles et si les points* M_i *divisent les diagonales* $A_iC'_i$ *dans le même rapport* k, *entre les valeurs algébriques* V_m, V_a, V_b, V_c, V_d, $V_{a'}$, $V_{b'}$, $V_{c'}$, $V_{d'}$ *des volumes des tétraèdres que déterminent les points* M_i *et quatre sommets correspondants des parallélépipèdes, on a la relation*

$$(1) \quad (1+k)^3V_m = V_a + k(V_b + V_d + V_{a'}) + k^2(V_c + V_{b'} + V_{d'}) + k^3V_{c'}.$$

On rapporte la figure à des axes Ox, Oy, Oz parallèles à A_iB_i, A_iD_i, $A_iA'_i$. Si (x_i, y_i, z_i), (x'_i, y'_i, z'_i) sont les coordonnées de A_i, C'_i, celles

[1] P. Serret, *Géométrie de Direction*, p. 266.

de M_i sont

$$\frac{x_i + kx'_i}{1+k}, \qquad \frac{y_i + ky'_i}{1+k}, \qquad \frac{z_i + kz'_i}{1+k}$$

et l'on a

$$(2) \qquad 6V_m = -\frac{\sin(xyz)}{(1+k)^3}\begin{vmatrix} x_i + kx'_i & y_i + ky'_i & z_i + kz'_i & 1 \end{vmatrix}$$

ou, en décomposant le déterminant sous la forme d'une somme, la relation (1).

Corollaires. — 1° *Si les diagonales* $A_iC'_i$ *sont parallèles, on a*

$$(3) \qquad (1+k)V_m = V_a + kV_{c'},$$

et si, en outre, les points A_i *sont coplanaires,*

$$V_m = \frac{k}{1+k}V_{c'}.$$

Car si l'on prend Ox parallèle à $A_iC'_i$, on a $y_i = y'_i$, $z_i = z'_i$ et l'égalité (2) donne (3), avec $k \neq -1$.

2° *Il existe en général trois plans divisant quatre segments arbitraires* $A_iC'_i$ *de l'espace, dans un même rapport* k.

En effet, les valeurs de k correspondant au cas où les points M_i sont coplanaires sont racines de l'équation cubique

$$(4) \quad k^3V_{c'} + k^2(V_c + V_{b'} + V_{d'}) + k(V_b + V_d + V_{a'}) + V_a = 0.$$

N. B. — Si l'on compare la relation (1) à la formule

$$(5) \quad (1+k)^3V_m = (1-k)V_a - (1-k)k^2V_{c'} + k\Sigma C'_1A_2A_3A_4 + k^2\Sigma A_1C'_2C'_3C'_4,$$

on obtient les égalités

$$(6) \qquad V_a + V_{a'} + V_b + V_d = \Sigma C'_1A_2A_3A_4,$$
$$(7) \qquad V_c + V_{c'} + V_{b'} + V_{d'} = \Sigma A_1C'_2C'_3C'_4,$$

car les seconds membres de (1) et (5) doivent être égaux quel que soit k. Les égalités (6), (7) expriment d'ailleurs une seule et même propriété puisque les points qui interviennent dans la seconde sont dans chaque parallélépipède, les sommets opposés à ceux qui figurent dans la première.

Note. — Si k_1, k_2, k_3, sont les racines de l'équation (4), on a

$$(8) \quad k_1k_2k_3 = -\frac{V_a}{V_{c'}}, \quad k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1 = \frac{1}{V_{c'}}(V_b + V_d + V_{a'}),$$
$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = -\frac{V_b + V_d + V_{a'}}{V_a}.$$

Dès lors, 1° *le produit des rapports en lesquels les trois plans divisent les segments* A_iC_i' *est égal au rapport, changé de signe, des volumes des tétraèdres* $A_1A_2A_3A_4$, $C_1'C_2'C_3'C_4'$;

2° *Si les directions des arêtes des parallélipipèdes de diagonales* A_iC_i' *varient, l'expression* $V_b + V_d + V_{a'}$, *a une valeur constante qui*, en vertu de (6), est $\Sigma C_1'A_2A_3A_4 - V_a$, *et l'on a*, par (8),

$$\Sigma C_1'A_2A_3A_4 = V_a\left(1 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3}\right).$$

SPHÈRE DES DOUZE POINTS

20. Définition. — La sphère des douze points (O′) d'un tétraèdre quelconque $T \equiv ABCD$ se confond avec la sphère circonscrite au tétraèdre complémentaire $t \equiv G_aG_bG_cG_d$ et, par suite, avec les transformées de la sphère circonscrite (O, R) au tétraèdre T par les homothéties $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(\Omega, \frac{1}{3}\right)$. Cette sphère (O′) passe donc par les centres de gravité G_i des faces du tétraèdre T, par les points α, β, γ, δ situés aux tiers des distances ΩA, ΩB, ΩC, ΩD à partir du point de Monge Ω et les points situés sur les prolongements des droites ΩA, ΩB, ΩC, ΩD aux tiers des distances du point Ω à la sphère (O, R). Ces douze points sont sur une même sphère (O′), centrée au point O′ situé au tiers du segment ΩO, dont le rayon a pour mesure le tiers de celle du rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre.

La sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ passe, en outre, par les projections orthogonales des points α, β, γ, δ sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC, car si l'on applique le théorème de Ménélaüs au triangle $A\Omega G$ coupé par la transversale αG_a, par exemple, on constate que cette droite passe par le point O′ et que les points α et G_a sont diamétralement opposés sur la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$.

21. Théorème. — *Les distances* $O'O_i'$ *du centre de la sphère des douze points* $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ *aux plans des faces du tétraèdre* T *sont égales, en grandeur et en signe, au sixième des segments* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, *interceptés sur les hauteurs correspondantes par la sphère circonscrite* (O, R).

En effet, puisque le point G divise les segments OO′ et DG_d dans le

rapport — 3, on a

$$\overline{3O'O'_d} + \overline{OO_d} = 4\overline{GG'_d} = DH_d,$$

G'_d étant la projection du point G sur le plan ABC.

Or

$$\overline{DH_d} = \frac{1}{2}\overline{DD_1} + \overline{OO_d};$$

par suite, et par analogie,

$$(1) \quad \overline{O'O'_a} = \frac{1}{6}\overline{AA_1}, \quad \overline{O'O'_b} = \frac{1}{6}\overline{BB_1},$$
$$\overline{O'O'_c} = \frac{1}{6}\overline{CC_1}, \quad \overline{O'O'_d} = \frac{1}{6}\overline{DD_1}.$$

Corollaires. — 1° *Pour qu'une hauteur du tétraèdre* T, *par exemple celle issue du sommet* D, *soit tangente à la sphère circonscrite* (O, R), *il faut et il suffit que le centre* O′ *de la sphère des douze points soit situé dans le plan de la face* ABC.

2° *Pour que deux hauteurs du tétraèdre, par exemple celles issues des sommets* D *et* C, *soient tangentes à la sphère* (O, R), *il faut et il suffit que le centre* O′ *de la sphère des douze points soit sur l'arête* AB.

3° *Pour que trois hauteurs du tétraèdre, par exemple celles issues des sommets* D, C *et* B *soient tangentes à la sphère* (O, R), *il faut et il suffit que le centre* O′ *de la sphère des douze points coïncide avec le sommet* A.

Ces tétraèdres particuliers sont faciles à construire en se donnant la sphère (O, R), le point D, un point sur une tangente en D à la sphère (O, R). Ils possèdent des propriétés intéressantes dont la recherche constitue de bons exercices auxquels nous convions le lecteur.

4° *Si une face du tétraèdre est tangente à la sphère des douze points, les arêtes aboutissant au sommet opposé sont égales entre elles et réciproquement.*

Car, si la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ est tangente à la face ABC en un point qui coïncide nécessairement avec G_d, on a, en vertu des relations (1),

$$\frac{1}{6}\overline{DD_1} = \overline{O'O'_d} = \overline{O'G_d} = \frac{R}{3}, \qquad \text{et} \qquad DD_1 = 2R.$$

La droite $DD_1 = DH_d$ se confond avec l'*axe* OO_d du cercle ABC et l'on obtient

$$DA = DB = DC,$$

et réciproquement.

5° *Si deux faces sont tangentes à la sphère des douze points, cinq arêtes du tétraèdre sont égales entre elles et réciproquement.*

En effet, d'après le corollaire précédent, si la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ est tangente aux faces CDA et DAB, nécessairement en leurs centres de gravité G_b et G_c, on obtient

$$DB = DC = DA = AD = AB = AC,$$

et réciproquement.

N. B. — Ce tétraèdre dans lequel les arêtes AB, BD, DC, CA et les arêtes BC, DA sont les côtés et les diagonales d'un losange gauche ABDC est un tétraèdre bisymétrique particulier dont les plans de symétrie coïncident avec les bissecteurs des dièdres intérieurs suivant les arêtes BC, DA.

6° *Si la sphère des douze points d'un tétraèdre est tangente à trois faces, elle touche aussi la quatrième face et le tétraèdre est régulier et réciproquement.*

Car, d'après ce qui précède, les six arêtes du tétraèdre sont égales et la sphère des douze points coïncide avec la sphère inscrite au tétraèdre.

Application. — Les seules hypothèses que l'on puisse faire sur les positions relatives des faces d'un tétraèdre T et de sa sphère des douze points $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ sont les suivantes :

la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ n'est tangente à aucune face ;

la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ est tangente à une face;

la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ est tangente à deux faces;

la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ est tangente aux quatre faces.

Dans les trois premières hypothèses, les plans des faces interceptent sur la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ quatre, trois ou deux segments sphériques extérieurs au tétraèdre, puisque quatre, trois ou deux des rayons $O'G_a$, $O'G_b$, $O'G_c$, $O'G_d$ de la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ sont obliques par rapport aux plans des faces correspondantes du tétraèdre T. Par

suite, il est clair qu'il existe toujours un tétraèdre T_1 circonscrit à la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ et qui correspond au tétraèdre T dans une homothétie de rapport $k > 1$. La sphère inscrite au tétraèdre T_1, de centre O', est transformée par cette homothétie de la sphère (I, r) inscrite au tétraèdre T, ce qui donne

$$\frac{R}{3} = kr \qquad \text{soit} \qquad \frac{R}{r} = 3k > 3.$$

Dans le dernier cas, les sphères $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ et (I, r) coïncident, ainsi que les tétraèdres T_1 et T, et l'on a

$$k = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{R}{r} = 3.$$

Ainsi on a toujours $R \geqslant 3r$ et *le rapport* $\frac{R}{r}$ *des rayons des sphères circonscrite et inscrite à un tétraèdre est minimum quand le tétraèdre est régulier.*

7° *Si la sphère circonscrite intercepte sur les hauteurs du tétraèdre* T *des cordes égales*

$$\pm AA_1 = \pm BB_1 = \pm CC_1 = \pm DD_1,$$

le centre de la sphère des douze points se confond avec celui d'une des sphères quadritangentes.

Si ce centre est celui de la sphère inscrite, les points O, G, I sont alignés et

$$OG = 3GI, \qquad IG_a = \frac{R}{3}.$$

Ces propriétés ont lieu, en particulier, lorsque le tétraèdre T est équifacial.

22. Théorème. — *Les tétraèdres* A_2BCD, B_2CDA, C_2DAB, D_2ABC *ayant pour un de leurs sommets les symétriques* A_2, B_2, C_2, D_2 *des points* A_1, B_1, C_1, D_1 *où les hauteurs* AA_h, BB_h, CC_h, DD_h *du tétraèdre* T *recoupent la sphère circonscrite, par rapport aux plans des faces opposées, et le tétraèdre* ABCD *ont la même sphère des douze points.*

Soient G_1 le centre de gravité du tétraèdre A_1BCD, (ω_1) et (ω_2) les sphères des douze points des tétraèdres A_1BCD et A_2BCD.

Les points G et G_1 partageant les segments AG_a et A_1G_a dans les rapports

$$\frac{AG}{GG_a} = \frac{A_1G_1}{G_1G_a} = 3,$$

la droite GG_1 est parallèle à la droite AA_1 et est donc perpendiculaire au plan BCD. D'autre part, les sphères (ω_1) et (ω_2) sont les transformées de la sphère (O, R) dans les homothéties $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$ et $\left(G_1, -\frac{1}{3}\right)$; elles sont donc égales et la droite $\omega_1\omega_2$ est parallèle à la droite GG_1 et, par suite, perpendiculaire au plan BCD. Enfin, d'après les relations (1), les distances des points O′ et ω_1 au plan BCD sont égales à $\frac{1}{6}\overline{AA_1}$ et à $\frac{1}{6}\overline{A_1A}$. Les sphères $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ et (ω_1) sont donc symétriques par rapport au plan BCD et la sphère (ω_2), qui est symétrique de la sphère (ω_1) par rapport à ce plan, se confond avec la sphère des douze points $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ du tétraèdre T.

Corollaire. — *La droite* d'Euler OG *du tétraèdre* T *et celles des tétraèdres* $T'_a \equiv A_2BCD$, $T'_b \equiv B_2CDA$, $T'_c \equiv C_2DAB$, $T'_d \equiv D_2ABC$ *concourent au centre* O′ *des sphères des douze points de ces cinq tétraèdres.*

Car la droite qui joint le point de Monge d'un tétraèdre T′ au centre O′ des sphères des douze points des tétraèdres en question passe par le symétrique du centre O de la sphère (O, R) par rapport au plan de la face correspondante du tétraèdre T et se confond avec la droite d'Euler du tétraèdre T'_i.

23. Théorème. — *Les puissances des sommets d'un tétraèdre* T *par rapport à la sphère des douze points* $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ *sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques de l'anticomplémentaire du barycentre* F *des carrés des arêtes opposées* [1].

---

[1] Si l'on applique aux sommets A, B, C, D du tétraèdre T des masses proportionnelles aux sommes

$$b^2 + c^2 + a'^2, \qquad c^2 + a^2 + b'^2, \qquad a^2 + b^2 + c'^2, \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2$$

des carrés des arêtes aboutissant à ces sommets, leur barycentre E coïncide avec le symétrique, par rapport au centre de gravité G du tétraèdre, du barycentre F des masses proportionnelles aux sommes

$$a^2 + b'^2 + c'^2, \qquad b^2 + c'^2 + a'^2, \qquad c^2 + a'^2 + b'^2, \qquad a^2 + b^2 + c^2$$

des carrés des arêtes des faces opposées aux sommets considérés et appliquées en ces sommets.

Nous nommerons les points E et F, *barycentre des carrés des arêtes correspondantes* et *barycentre des carrés des arêtes opposées.*

En effet, si l'on applique le théorème de STEWART au triangle AOG et à la cévienne AO′, on obtient

$$\overline{AO'}^2 = \frac{1}{9}\left[R^2 + 2(b^2 + c^2 + a'^2) - (a^2 + b'^2 + c'^2)\right],$$

ce qui donne, d'une part, la puissance

$$(2) \quad P_A = \overline{AO'}^2 - \frac{R^2}{9} = \frac{1}{9}\left[2(b^2 + c^2 + a'^2) - (a^2 + b'^2 + c'^2)\right]$$

du sommet A du tétraèdre T pour la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ et, par permutations circulaires sur les lettres a, a', b, b', c, c', les expressions analogues des puissances P_B, P_C, P_D des autres sommets par rapport à la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$; d'autre part, la proportionnalité de ces puissances avec les coordonnées barycentriques α, β, γ, δ de l'anticomplémentaire du point F de coordonnées $(a^2 + b'^2 + c'^2)$, $(b^2 + c'^2 + a'^2)$, $(c^2 + a'^2 + b'^2)$, $(a^2 + b^2 + c^2)$.

THÉORÈME. — *Le pôle du plan radical des sphères* (O, R) *et* $\left(O', \frac{R}{3}\right)$, *par rapport au tétraèdre* T, *se confond avec le réciproque de l'anticomplémentaire du barycentre* F *des carrés des arêtes opposées.*

Les puissances des sommets A, B, C, D du tétraèdre T par rapport à la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ étant proportionnelles aux quantités α, β, γ, δ, le plan radical des sphères (O, R) et $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ a pour coordonnées barycentriques α, β, γ, δ et son pôle par rapport au tétraèdre T coïncide donc avec le réciproque $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}\right)$ de l'anticomplémentaire du barycentre F des carrés des arêtes opposées du tétraèdre T.

THÉORÈME. — *Le plan radical des sphères* (O, R) *et* $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ *se confond avec le plan transformé de la sphère décrite sur le segment* OG *comme diamètre par l'inversion* $(G, -\sigma_1^2)$, σ_1 *désignant le rayon de la sphère orthoptique* (G, σ_1) *de l'ellipsoïde de* STEINER *inscrit au tétraèdre* T [1].

Si l'on désigne par A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, et G'_1 les projections orthogonales

---

[1] Au sujet de cette quadrique, voir le second paragraphe suivant.

des sommets A, B, C, D et du centre de gravité du tétraèdre T sur le plan radical des sphères (O, R) et $\left(O', \frac{R}{3}\right)$, on obtient, d'abord, en grandeur et en signe,

$$P_A = 2OO'.AA'_1 = 2.\frac{4}{3}.OG.AA'_1 = \frac{8}{3}OG.AA'_1,$$

$$P_B = \frac{8}{3}OG.BB'_1, \quad P_C = \frac{8}{3}OG.\overline{CC'_1}, \quad P_D = \frac{8}{3}OG.DD'_1,$$

ensuite, d'après les égalités (2) et leurs analogues,

$$AA'_1 + BB'_1 + CC'_1 + DD'_1 = \frac{3}{8OG}\cdot(P_A + P_B + P_C + P_D)$$
$$= \sum \frac{(a^2 + a'^2)}{12\,OG} = 4GG'_1.$$

D'autre part, en vertu de la formule connue (1)

$$\sigma^2_1 = \frac{1}{48}\Sigma(a^2 + a'^2),$$

on a les égalités

$$GG'_1.GO = -GG'_1.OG = -\frac{1}{48}\Sigma(a^2 + a'^2) = -\sigma^2_1,$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

Théorème. — *Le centre radical des sphères*

$$(A_2) \equiv BCDA_0, \quad (B_2) \equiv CDAB_0, \quad (C_2) \equiv DABC_0, \quad (D_2) = ABCD_0,$$

passant par un sommet du tétraèdre anticomplémentaire $A_0B_0C_0D_0$, *se confond avec le pôle* P, *par rapport au tétraèdre* T, *du plan radical des sphères circonscrite et des douze points du tétraèdre complémental.*

En effet, si la droite DD_0 recoupe la sphère (D_2) en un point D_3, le centre de gravité G_d de la face ABC a même puissance par rapport à cette sphère et par rapport au cercle ABC, ce qui donne, d'abord

$$\overline{G_dO_d}^2 - R_d^2 = -\frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) = G_dD_3.G_dD_0 = G_dD_3.2M_d,$$

ensuite

$$DD_3 = DG_d - D_3G_d = M_d - \frac{1}{9}\frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2M_d},$$

enfin l'expression

$$DD_3.DD_0 = DD_3.3M_d = 3M_d^2 - \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$\frac{1}{6}[2(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (a^2 + b^2 + c^2)]$$

(1) Cf. § 28, p. 47.

de la puissance du point D pour la sphère (D_2) et, par analogie, celles des puissances des sommets A, B, C du tétraèdre T par rapport aux sphères (A_2), (B_2), (C_2). Ces puissances étant proportionnelles à celles des mêmes sommets pour la sphère $\left(O', \frac{R}{3}\right)$, le centre radical des sphères (A_2), (B_2), (C_2), (D_2) coïncide avec le pôle du plan radical des sphères (O, R) et $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ par rapport au tétraèdre T.

Corollaires. — 1° *Si le tétraèdre* T *est* orthocentrique, *le pôle du plan radical des sphères* (O, R) *et* $\left(O', \frac{R}{3}\right)$, *par rapport au tétraèdre* T, *coïncide avec l'orthocentre.*

2° *Si le tétraèdre* T *est* orthocentrique, *les axes orthiques des triangles* BCD, CDA, DAB, ABC *sont situés dans le plan radical* π *des sphères* (O, R) *et* $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ *qui coïncide avec le plan d'homologie des tétraèdres* T *et* $A_hB_hC_hD_h$ *normal à la droite d'*Euler OG.

Car la *première* sphère des douze points du tétraèdre T appartient au faisceau déterminé par les sphères (O, R) et $\left(O', \frac{R}{3}\right)$, de sorte que les traces du plan π sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC se confondent avec les axes radicaux des cercles circonscrits et des cercles des neuf points de chacun des triangles des faces du tétraèdre T.

3° *Les sphères* (A_2), (B_2), (C_2), (D_2) *concourent en l'orthocentre* H *si le tétraèdre* T *est* orthocentrique *et le tétraèdre* $A_2B_2C_2D_2$ *se confond avec le transformé du tétraèdre* T *par l'homothétie* $\left(Q, -\frac{3}{2}\right)$ *dont le centre* Q *divise le segment* OH *dans le rapport* $QO : QH = -3 : 2$.

Pour constater que les sphères (A_2), (B_2), (C_2), (D_2) passent par l'orthocentre H du tétraèdre T, il suffit d'observer, par exemple, que les droites AD_0, BD_0, CD_0, situées dans les plans $B_0C_0D_0$, $C_0D_0A_0$, $D_0A_0B_0$, sont perpendiculaires aux hauteurs AA_h, BB_h, CC_h qui concourent au point H. D'autre part, on a

$$OA_2 = -\frac{\overline{HO}^2 - R^2}{2HA_h} = -\frac{3}{2}HA, \quad \ldots$$

24. Théorème. — *Le tétraèdre* $t_1 = \Omega_a\Omega_b\Omega_c\Omega_d$ *dont les sommets coïncident avec les points de* Monge *des tétraèdres*

$$T_a \equiv A_1BCD, \quad T_b \equiv B_1CDA, \quad T_c \equiv C_1DAB, \quad T_d \equiv D_1ABC$$

est le transformé du tétraèdre podaire $t' = O'_aO'_bO'_cO'_d$, *par rapport au*

tétraèdre T, *du centre* O′ *de la sphère des douze points de ce tétraèdre* T *par l'homothétie* (G, 3).

Les points de MONGE Ω, Ω_a, Ω_b, Ω_c, Ω_d et les centres de gravité G, G'_a, G'_b, G'_c, G'_d des tétraèdres T et T_i se correspondent dans des homothéties (O, 2) et les droites $\Omega\Omega_a$, $\Omega\Omega_b$, $\Omega\Omega_c$, $\Omega\Omega_d$ sont perpendiculaires aux plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre T. De plus, d'après le paragraphe **4**, les distances des points Ω_i à ces plans sont égales à $\frac{1}{2}\overline{A_hA_1}$, $\frac{1}{2}\overline{B_hB_1}$, $\frac{1}{2}\overline{C_hC_1}$, $\frac{1}{2}\overline{D_hD_1}$. Or les distances du point O′ aux mêmes plans sont égales à $\frac{1}{6}\overline{AA_1}$, $\frac{1}{6}\overline{BB_1}$, $\frac{1}{6}\overline{CC_1}$, $\frac{1}{6}\overline{DD_1}$, et le théorème est démontré.

THÉORÈME. — *Le conjugué isogonal* O″ *du centre* O′ *de la sphère des douze points du tétraèdre* T *est aligné sur les centres des sphères* (O, R) *et* (*o*) *circonscrites aux tétraèdres* T *et* t_1 *et il divise le segment* O*o* *dans le rapport de* — 2 *à* 1.

En effet, le point O′ divise le segment OG dans le rapport de 3 à 1 et le centre ω de la sphère $O'_aO'_bO'_cO'_d$ partage la distance GO dans le rapport de 1 à 2; les points O′, O″ sont symétriques par rapport au point ω. Si l'on applique la réciproque du théorème de MÉNÉLAÜS, d'une part, au triangle $G\omega O'$ coupé par la transversale oO'', d'autre part, au triangle GO*o* et à la transversale $O'\omega$, on constate que la droite oO' passe par le point O et que

$$\overline{O''O} : \overline{O''o} = -2 : 1.$$

Il en résulte, en outre, que *les droites* $o\Omega$ *et* O″O′ *sont parallèles et que* $o\Omega = 2O''O'$.

25. LEMME. — *Les points* O′, O'_a, O'_b, O'_c, O'_d *sont les transformés des points* G, G'_a, G'_b, G'_c, G'_d *par l'homothétie* $\left(\Omega, \frac{2}{3}\right)$.

Car on a, d'une part,

$$\frac{GG'_a}{\Omega\Omega_a} = \frac{GG'_b}{\Omega\Omega_b} = \frac{GG'_c}{\Omega\Omega_c} = \frac{GG'_d}{\Omega\Omega_d} = \frac{1}{2},$$

et, d'autre part, d'après les mesures des distances du point de MONGE et du centre de la sphère des douze points d'un tétraèdre aux plans des faces,

$$\frac{O'O'_a}{\Omega\Omega_a} = \frac{O'O'_b}{\Omega\Omega_b} = \frac{O'O'}{\Omega\Omega_c} = \frac{O'O'_d}{\Omega\Omega_d} = \frac{1}{3},$$

ce qui donne

$$\frac{O'O'_a}{GG'_a} = \frac{O'O'_b}{GG'_b} = \frac{O'O'_c}{GG'_c} = \frac{O'O'_d}{GG'_d} = \frac{2}{3} = \frac{\Omega O'}{\Omega G}.$$

Il faudra distinguer deux cas dans l'application de ce *Lemme* selon que le point O′ ne sera pas ou sera sur la surface (S) lieu des points dont les projections orthogonales sur les plans des faces de T sont coplanaires (Surface de SARTIAUX), ou suivant que les points O'_i ne seront pas ou seront coplanaires.

PREMIER CAS. — *Le point* O′ *n'est pas sur* (S). THÉORÈME. — *Si les points* A_3, B_3, C_3, D_3, P *des droites* $O\Omega_a$, $O\Omega_b$, $O\Omega_c$, $O\Omega_d$, $O\Omega$ *sont tels que*

$$\frac{OA_3}{OG'_a}=\frac{OB_3}{OG'_b}=\frac{OC_3}{OG'_c}=\frac{OD_3}{OG'_d}=\frac{OP}{OG}=k,$$

le tétraèdre $T_3 \equiv A_3B_3C_3D_3$ *est le transformé du tétraèdre* $t' \equiv O'_aO'_bO'_cO'_d$ *par l'homothétie* $h \equiv \left(Q, \frac{3k}{2}\right)$ *dont le centre* Q *partage le segment* OO′ *dans le rapport*

$$\frac{OQ}{QO'}=\frac{3k}{3k-4}.$$

En effet, il résulte des relations

$$O'O'_a=\frac{2}{3}GG'_a, \qquad PA_3=k.GG'_a,$$

que

$$PA_3=k\cdot\frac{3}{2}O'O'_a=\frac{3k}{2}\cdot O'O'_a.$$

Le tétraèdre T_3 est donc le transformé du tétraèdre t' par l'homothétie h dont le centre Q est le point de la droite OG pour lequel

$$(2) \qquad \frac{QP}{QO'}=\frac{3k}{2} \qquad \text{ou} \qquad QP=\frac{3k}{2}\cdot QO'.$$

Mais on a, en grandeur et en signe,

$$QP=OP-OQ=k.OG-OQ=\frac{3k}{4}\cdot OO'-OQ$$
$$=\frac{3k}{4}(OQ+QO')-OQ,$$

d'où

$$QP=\left(\frac{3k-4}{4}\right)\cdot OQ+\frac{3k}{4}\cdot OO',$$

et, en vertu de la relation (2),

$$(3k-4).OQ=3k.QO'.$$

THÉORÈME. — *Le conjugué isogonal* O″ *du centre* O′ *de la sphère des douze points d'un tétraèdre* T *coïncide avec le symétrique du point* O′ *par rapport au centre de la sphère* (ω) *circonscrite au tétraèdre* t′ *et il*

est situé sur la droite OO_3 *des centres des sphères circonscrites aux tétraèdres* T *et* T_3; *il partage le segment* OO_3 *dans le rapport*

$$\frac{OO''}{O''O_3} = \frac{4}{3k-4}.$$

La symétrie des points O′ et O″, par rapport au point ω, provient de ce que ces deux points sont les foyers de la quadrique de révolution inscrite au tétraèdre T dont la sphère (ω) est la sphère principale.

D'autre part, le point O_3 étant le transformé du point ω par l'homothétie h, les points O_3, O″, O sont sur les côtés Qω, ωO′, O′Q du triangle $Q\omega O'$ et, en vertu de la réciproque du théorème de Ménélaüs pour le point O″ situé sur la droite OO_3, il suffit de démontrer que

$$\frac{QO_3}{O_3\omega} \cdot \frac{\omega O''}{O''O'} \cdot \frac{O'O}{OQ} = -1,$$

et il résulte des relations déjà connues

$$(3) \qquad \frac{QO'}{Q\omega} = \frac{3k}{2}, \quad \omega O'' = -\omega O', \quad \frac{OQ}{QO'} = \frac{3k}{3k-4},$$

qu'on a aussi

$$\frac{QO_3}{O_3\omega} = \frac{3k}{2-3k}, \qquad \frac{\omega O''}{O''O'} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{O'O}{OQ} = \frac{2(3k-2)}{3k},$$

ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Enfin, la dernière propriété se déduit également des formules (3) par application du théorème de Ménélaüs au triangle QOO_3 coupé par la transversale O′ωO″. On a, en effet,

$$\frac{O'O}{O'Q} \cdot \frac{\omega Q}{\omega O_3} \cdot \frac{O''O_3}{O''O} = -1,$$

car

$$\frac{O'O}{O'Q} = \frac{2(3k-2)}{3k-4}, \qquad \frac{\omega Q}{\omega O_3} = \frac{2}{2-3k},$$

et, par suite,

$$(4) \qquad \frac{OO''}{O''O_3} = \frac{4}{3k-4},$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

N. B. — Si $k = \frac{4}{3}$, les points P, Q, O′ sont confondus ainsi que les points O″ et O_3. Le tétraèdre T_3 coïncide avec le tétraèdre ayant pour

sommets les images du point O′, par rapport aux plans des faces du tétraèdre T.

Corollaires. — 1° *Le point* O″ *est aligné sur les centres des sphères* (O, R) et (*o*) *circonscrites aux tétraèdres* T *et* t_1, *et il divise le segment* O*o dans le rapport de* — 2 *à* 1.

Car, dans ce cas,

$$k = OP : OG = O\Omega : OG = 2,$$

et, d'après la relation (4),

$$O''O : O''o = -2 : 1.$$

2° *Le point* O″ *coïncide avec le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* t″ *ayant pour sommets les centres des sphères des douze points des tétraèdres* T_i.

Car le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre *t*″ se confond avec le point O″, puisque, dans cette hypothèse, $k = \frac{4}{3}$.

Second cas. — Lorsque le centre O′ de la sphère des douze points est situé sur la surface de Sartiaux du tétraèdre T, les points de Monge Ω_i des tétraèdres T_i sont dans le plan transformé du plan π de Simson, par rapport au tétraèdre T, du point O′ par l'homothétie (G, 3) et le point O″ est à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan π. Le point O′ coïncide avec le foyer d'un paraboloïde de révolution inscrit au tétraèdre T.

SPHÈRE ORTHOCENTROÏDALE

26. Définition. — Par analogie avec le cercle orthocentroïdal d'un triangle (Tücker), nous appelons sphère *orthocentroïdale* d'un tétraèdre T la sphère (Γ) décrite sur la distance GΩ du centre de gravité au point de Monge comme diamètre.

Théorème. — *Si les médianes* AG_a, BG_b, CG_c, DG_d *d'un tétraèdre* T ≡ ABCD *recoupent la sphère circonscrite* (O, R) *en* A′, B′, C′, D′ *et que l'on porte sur les médianes* $\overrightarrow{G_aA}$, $\overrightarrow{G_bB}$, $\overrightarrow{G_cC}$, $\overrightarrow{G_dD}$ *les segments*

$$\overrightarrow{G_aA''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'G_a}, \quad \overrightarrow{G_bB''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'G_b}, \quad \overrightarrow{G_cC''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'G_c}, \quad \overrightarrow{G_dD''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D'G_d}$$

les points A″, B″, C″, D″ *sont situés sur la sphère* (Γ) *décrite sur le segment* GΩ *comme diamètre.*

En effet, si le point M est le milieu de la corde DD′, par exemple, on obtient, de proche en proche, en grandeur et en signe,

$$MG = \frac{1}{2}(D'G - GD) - \frac{1}{2}(D'G_d + G_dG - GD) = \frac{1}{2}(D'G_d - 2G_dG)$$
$$= \frac{D'G_d}{2} - G_dG,$$

puis, d'après les hypothèses,

$$GD'' = D'D'' - D'G = \frac{3}{2}D'G_d - D'G_d - G_dG = \frac{D'G_d}{2} - G_dG = MG,$$

ce qui prouve que le point D″, et par analogie, les points A″, B″, C″ sont situés sur la sphère (Γ) décrite sur $G\Omega = OG$ comme diamètre.

Théorème. — *Les puissances respectives des sommets du tétraèdre* T, *par rapport à la sphère orthocentroïdale* (Γ), *sont égales aux huitièmes du double de la somme des carrés des arêtes aboutissant à ces sommets diminué de la somme des carrés des arêtes des faces opposées.*

Par application du théorème relatif au carré de la médiane DΓ du triangle DGΩ, ce qui donne

$$\overline{2D\Gamma^2} + \frac{\overline{G\Omega^2}}{2} = \overline{DG^2} + \overline{D\Omega^2},$$

on obtient l'expression

$$P_D = \overline{D\Gamma^2} - \frac{\overline{G\Omega^2}}{4} = \frac{1}{2}(\overline{DG^2} + \overline{D\Omega^2} - \overline{G\Omega^2})$$

de la puissance du sommet D du tétraèdre T pour la sphère (Γ), dans laquelle il suffit d'introduire les valeurs connues

$$\overline{DG^2} = \frac{9}{16}M_a^2 = \frac{1}{16}[3(a'^2 + b'^2 + c'^2) - a^2 - b^2 - c^2],$$
$$\overline{D\Omega^2} = R^2 + \frac{1}{4}(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - b^2 - c^2),$$
$$\overline{G\Omega^2} = \overline{OG^2} = R^2 - \frac{1}{16}\Sigma(a^2 + a'^2),$$

pour avoir

$$P_D = \frac{1}{8}[2(a'^2 + b'^2 + c'^2) - a^2 - b^2 - c^2],$$

et des valeurs analogues pour les puissances des autres sommets du tétraèdre T, par rapport à la sphère (Γ), après des permutations circulaires convenables sur les lettres a, a', b, b', c, c'.

Corollaire. — *La somme des puissances des sommets du tétraèdre* T, *par rapport à la sphère orthocentroïdale* (Γ), *est égale au quart de la somme des carrés des arêtes.*

Théorème. — *La sphère circonscrite, la sphère des douze points et la sphère orthocentroïdale du tétraèdre* T *appartiennent à un même faisceau.*

Car le rapport des puissances d'un sommet quelconque du tétraèdre T pour la sphère des douze points $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ et pour la sphère orthocentroïdale (Γ) est égal au rapport $OO' : O\Gamma = 8 : 9$ des distances du centre O de la sphère circonscrite aux centres O′ et Γ de ces sphères.

N. B. — Nous rencontrerons plus loin d'autres propriétés de cette sphère (Γ) en l'associant à divers éléments du tétraèdre fondamental et nous la retrouverons, en particulier, comme un cas spécial d'une autre sphère plus générale.

ELLIPSOÏDES DE STEINER

Sphères Orthoptiques.

27. A. Ellipsoïde circonscrit. — 1. *C'est l'ellipsoïde* (E_1) *passant par les sommets du tétraèdre de référence* $T \equiv ABCD$ *et tangent en chacun d'eux au plan parallèle à la face opposée.*

La quadrique (E_1) passant par les sommets, son équation barycentrique s'écrit

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$$

où Φ est un polynôme homogène du second degré sans termes carrés c'est-à-dire de la forme $\Phi \equiv \Sigma A\alpha\beta$ ou

$$A\alpha\beta + B\alpha\gamma + C\alpha\delta + D\beta\gamma + E\beta\delta + F\gamma\delta.$$

Au point $M(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ de (E_1) le plan tangent admet pour équation

$$(1)\quad A\alpha_0\beta + A\alpha\beta_0 + B\alpha_0\gamma + B\alpha\gamma_0 + C\alpha_0\delta + C\alpha\delta_0 + D\beta_0\gamma + D\beta\gamma_0 + E\beta_0\delta + E\beta\delta_0 + F\gamma_0\delta + F\gamma\delta_0 = 0.$$

Pour M confondu avec A, $\beta_0 = \gamma_0 = \delta_0 = 0$, $\alpha_0 \neq 0$ et (1) devient

$$A\beta + B\gamma + C\delta = 0,$$

plan parallèle à BCD si A = B = C. Il en résulte que l'équation de (E_1) s'écrit

$$(2) \qquad \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \equiv \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 0.$$

2. *Centre.* — Les équations du centre sont

$$\Phi'_\alpha = \Phi'_\beta = \Phi_\gamma = \Phi'_\delta$$

qui donnent

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta.$$

Le centre de (E_1) *est donc le centre de gravité* G *de* T.

3. *Sphère orthoptique.* — Elle est centrée en G; elle sera donc complètement déterminée par son rayon σ dont le carré σ^2 est la somme des carrés de trois diamètres conjugués deux à deux de (E_1). Soit GA l'un d'eux; les deux autres seront conjugués dans l'ellipse (Γ), section de (E_1) par le plan central parallèle à BCD.

Commençons par calculer le carré r^2 du rayon du cercle orthoptique de la section BCD, [ellipse (γ)], circonscrite au triangle BCD et d'équation :

$$(3) \qquad \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta = 0.$$

$g \equiv G_a$ étant la trace de AG sur le plan BCD, soit gE un demi-diamètre conjugué de gB dans (γ). L'équation de gE parallèle à CD s'écrit

$$(4) \qquad 2\beta - \gamma - \delta = 0.$$

E est un point dont les coordonnées vérifient (3) et (4). On peut prendre pour ces coordonnées

$$\frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{3(\sqrt{3}-1)}, \qquad \frac{2(\sqrt{3}-2)}{3(\sqrt{3}-1)} \quad \text{(qui sont absolues).}$$

On a donc

$$\overline{gE}^2 = \frac{1}{3}c'^2$$

d'où

$$(5) \qquad r^2 = \overline{gB}^2 + \overline{gE}^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b'^2 + c'^2).$$

Pour passer de r^2 au carré R_1^2 du rayon du cercle orthoptique de (Γ), on remarque que (γ) et (Γ) sont homothétiques. Le plan AgB d'équation (dans le tétraèdre T)

$$\gamma - \delta = 0$$

coupe le plan (π) de (Γ) suivant une droite Δ parallèle à gB et passant

par G. Les équations de Δ sont :

$$\gamma - \delta = 0,$$
$$(\pi) \quad 3\alpha - \beta - \gamma - \delta = 0.$$

En adjoignant à ces équations, l'équation (2) de (E_1) on obtient pour l'une des extrémités E′ du diamètre Δ les coordonnées barycentriques absolues

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1-2\sqrt{2}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2}+1}{4}, \quad \frac{\sqrt{2}+1}{4}.$$

D'où

$$\overline{GE'}^2 = \frac{1}{8}(2a^2 + 2b'^2 - c'^2).$$

Or

$$\overline{gB}^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b'^2 - c'^2).$$

Si donc K est le rapport d'homothétie de (Γ) à (γ) on a

$$K^2 = \frac{9}{8}$$

et

$$R_1^2 = \frac{9}{8} r^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b'^2 + c'^2).$$

D'où

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \overline{GA}^2 + R_1^2 \\ &= \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{3}\left(c^2 + b^2 + a'^2 - \frac{a^2 + b'^2 + c'^2}{3}\right) + \frac{1}{4}(a^2 + b'^2 + c'^2) \\ &= \frac{3}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2) = \frac{3}{16}\Sigma(a^2 + a'^2).\end{aligned}$$

Notons ce résultat, obtenu chemin faisant :

Dans l'ellipsoïde de STEINER *circonscrit le rapport d'homothétie* $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ *des sections faites par une face et le plan central qui lui est parallèle ne dépend pas de la face et est le même pour tous les tétraèdres.*

28. B. ELLIPSOÏDE INSCRIT. — *Il est tangent aux faces en leurs centres de gravité.* Il se déduit donc de (E_1) par l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$, ou : l'ellipsoïde (E_2) de STEINER inscrit est le complémentaire de (E_1).

Son équation barycentrique par rapport à T est donc

$$\Sigma\alpha\beta - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 0.$$

(On remplace dans l'équation de E_1 α par $\beta + \gamma + \delta - 2\alpha$, β par $\gamma + \delta + \alpha - 2\beta$, etc.), G est le centre de (E_2) et de sa sphère orthoptique dont le rayon σ_1 vaut le tiers de σ. Donc

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{48}\Sigma(a^2 + a'^2).$$

N.B. — *Dans un ellipsoïde et dans l'autre la grandeur de la sphère orthoptique ne dépend que de la somme des carrés des arêtes de* T.

29. L'expression

$$k = \sum\left(\overline{MA_1}^2 - \frac{1}{4}a^2 + \overline{MA_1'}^2 - \frac{1}{4}a'^2\right)$$

de la somme des puissances d'un point arbitraire M, par rapport aux sphères décrites sur les arêtes d'un tétraèdre $T \equiv ABCD$, comme diamètres, qui se réduit à

$$k = 6\overline{GM}^2 + \frac{1}{2}\sum\overline{A_1A_1'}^2 - \frac{1}{4}\sum(a^2 + a'^2) = 6\overline{GM}^2 - \frac{1}{8}\sum(a^2 + a'^2),$$

donne

$$\overline{GM}^2 = \frac{1}{48}[8k + \Sigma(a^2 + a'^2)].$$

Dès lors, lorsque k a une valeur donnée, *le lieu du point* M *est la sphère de rayon*

$$GM = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}[8k + \Sigma(a^2 + a'^2)]},$$

dont le centre coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre T.

Lorsque $k = 0$, la valeur

$$\sigma_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3\Sigma(a^2 + a'^2)}$$

de GM représente la mesure du rayon de la sphère orthoptique de l'ellipsoïde de Steiner inscrit au tétraèdre T.

Corollaire. — *La sphère orthoptique de l'ellipsoïde de* Steiner *inscrit au tétraèdre* T *est le lieu des points dont la somme des puissances, par rapport aux sphères décrites sur les arêtes, ou sur les bimédianes, comme diamètres, est nulle.*

Car, en raison du théorème relatif au carré de la médiane appliqué

aux triangles $MA_1A'_1$, $MB_1B'_1$, $MC_1C'_1$, on obtient,

$$\sum\left(\overline{MA_1}^2+\overline{MA'_1}^2-\frac{a^2+a'^2}{4}\right)$$
$$=6\overline{MG}^2-\frac{1}{8}\sum(a^2+a'^2)=2\sum\left(\overline{MG}^2-\frac{\overline{A_1A'_1}^2}{4}\right).$$

Si le tétraèdre T est *orthocentrique*, la sphère orthoptique (G, σ_1) de l'ellipsoïde de STEINER inscrit coïncide avec la *première* sphère des douze points qui constitue donc le lieu envisagé dans le corollaire précédent.

Si $k=\Sigma(a^2+a'^2)$, la valeur

$$\sigma=\frac{1}{4}\sqrt{3\Sigma(a^2+a'^2)}$$

représente la mesure du rayon de la sphère orthoptique (G, σ) de l'ellipsoïde de STEINER circonscrit au tétraèdre T.

COROLLAIRE. — *La sphère orthoptique de l'ellipsoïde de* STEINER *circonscrit au tétraèdre* T *est le lieu des points dont la somme des puissances, par rapport aux sphères décrites sur les arêtes, comme diamètres, est égale à la somme des carrés des arêtes.*

30. THÉORÈME. — *Les sphères* S_i *décrites sur les cercles orthoptiques des ellipses de* STEINER *inscrites aux faces* BCD, CDA, DAB, ABC *du tétraèdre* T, *comme grands cercles, rencontrent les sphères décrites sur les médianes, comme diamètres, suivant quatre cercles situés sur la sphère orthoptique* (G, σ_1) *de l'ellipsoïde de* STEINER *inscrit.*

En effet, un point M étant commun à la sphère S_d et à la sphère $\left(G'_d, \frac{M_d}{2}\right)$ décrite sur la médiane DG_d du tétraèdre T, comme diamètre, par application du théorème relatif au carré de la médiane GM du triangle $MG_dG'_d$, on obtient, de proche en proche,

$$\overline{GM}^2=\frac{1}{4}\left(2\overline{G_dM}^2+2\overline{G'_dM}^2-\overline{G_dG'_d}^2\right)=\frac{1}{4}\left(2\overline{G_dM}^2+\frac{M_d^2}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{9}+\frac{M_d^2}{4}\right)=\frac{1}{48}\Sigma(a^2+a'^2)=\sigma_1^2,$$

car le carré du rayon du cercle orthoptique de l'ellipse de STEINER, de centre G_d, inscrite au triangle ABC, a pour mesure

$$\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2).$$

Corollaires. — 1° *Les plans perpendiculaires aux médianes du tétraèdre* T *menés par le point de* Monge *se confondent avec les plans radicaux de la sphère* (G, σ_1) *avec chacune des sphères* S_i.

Car on a, par exemple,

$$\overline{\Omega G_d}^2 - \frac{1}{18}(a^2 + b^2 + c^2) = R^2 - \frac{1}{12}\Sigma(a^2 + a'^2) = \overline{\Omega G}^2 - \sigma_1^2,$$

et des égalités analogues pour les autres plans.

2° *Les transformées de la sphère* (G, σ_1) *par les homothéties* (A, 2), (B, 2), (C, 2), (D, 2) *font partie des faisceaux* F_i *déterminés par la sphère* (G, σ_1) *et chacune des sphères* S_i.

Ces sphères ayant pour centres les symétriques A′, B′, C′, D′ des sommets A, B, C, D du tétraèdre par rapport au centre de gravité G, on a

$$A'\Omega = B'\Omega = C'\Omega = D'\Omega = R,$$

puis

$$\overline{\Omega A'}^2 - 4\sigma_1^2 = R^2 - \frac{1}{12}\Sigma(a^2 + a'^2) = \overline{\Omega G}^2 - \sigma_1^2,$$

de sorte que la sphère (A′, $2\sigma_1$) appartient au faisceau F'_a formé par les sphères (G, σ_1) et S_a, et ainsi de suite pour les autres sphères.

31. Théorème. — *Les puissances respectives des sommets du tétraèdre* T, *par rapport à la sphère orthoptique* (G, σ_1) *de l'ellipsoïde de* Steiner *inscrit au tétraèdre* T, *sont égales aux douzièmes du double de la somme des carrés des arêtes aboutissant à ces sommets diminué de la somme des carrés des arêtes des faces opposées.*

Car la puissance du sommet D du tétraèdre, par exemple, a pour valeur

$$P_d = \overline{DG}^2 - \sigma_1^2 = \frac{9}{16}M_d^2 - \frac{1}{48}\Sigma(a^2 + a'^2)$$
$$= \frac{1}{12}[2(a'^2 + b'^2 + c'^2) - a^2 - b^2 - c^2],$$

et on obtient les valeurs analogues des puissances des points A, B, C pour la sphère (G, σ_1).

Corollaire. — *Les puissances des sommets du tétraèdre* T, *par rapport à la sphère orthoptique* (G, σ) *de l'ellipsoïde de* Steiner *circonscrit, sont égales et de signes contraires aux quarts de la somme des carrés des arêtes des faces opposées.*

En effet, on obtient, par exemple,

$$\overline{DG}^2 - \sigma^2 = \overline{DG}^2 - 9\sigma_1^2 = \frac{9}{16} M_d^2 - \frac{3}{16} \Sigma(a^2 + a'^2) = -\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

et ainsi de suite pour les puissances des autres sommets.

Théorème. — *La sphère circonscrite* (O, R), *la sphère des douze points* $\left(O', \frac{R}{3}\right)$, *la sphère orthocentroïdale* (Γ) *et la sphère orthoptique* (G, σ_1) *de l'ellipsoïde de* Steiner *inscrit au tétraèdre* T *appartiennent à un même faisceau* F.

Car, en vertu des expressions obtenues des puissances $P_{O'}$ et P_G des sommets du tétraèdre T, par rapport aux sphères $\left(O', \frac{R}{3}\right)$ et (G, σ_1), on a

$$P'_O : P_G = \frac{1}{9} : \frac{1}{12} = \frac{4}{3} = OO' : OG,$$

et la sphère (G, σ_1) fait partie du faisceau F des sphères (O, R), $\left(O', \frac{R}{3}\right)$, ($\Gamma$) que nous avons déjà rencontré.

N. B. — En transformant cette configuration de quatre sphères par une homothétie (G, 3), on constate que les sphères (O, R), (G, σ) et les sphères (O_0, 3R), et (Γ_0) circonscrite et orthocentroïdale du tétraèdre anticomplémentaire T_0 du tétraèdre T appartiennent au transformé du faisceau F par cette homothétie. Nous retrouverons ces faisceaux par la suite.

SPHÈRES DE MIQUEL

32. Théorème. — *Si l'on choisit arbitrairement un point sur chaque arête d'un tétraèdre* T ≡ ABCD, *les quatre sphères passant respectivement par chaque sommet et par les points situés sur les trois arêtes adjacentes ont un point commun* [1].

Démonstration géométrique par J. Neuberg [2]. 1. On connaît cette proposition de la géométrie plane : *Si trois circonférences passant*

---

[1] Auguste Miquel a énoncé ce théorème comme une conséquence d'un théorème plus général dans un article inséré au tome III du *Journal de* Liouville, 1838 — 485 à 487. Ce théorème a aussi été publié par S. Roberts dans les *Proceedings of the London Mathematical Society* (t. XII, 1880).

[2] *Mathesis*, 1884 — 17.

par les sommets A, B, C *d'un triangle se coupent deux à deux aux points* a, b, c *sur les côtés, ces circonférences concourent en un même point* D.

Réciproquement, *si trois circonférences passant par un même point* D *se coupent encore, deux à deux, aux points* a, b, c, *il existe une infinité de triangles dont les côtés passent par* a, b, c *et dont les sommets sont sur ces circonférences. Tous ces triangles sont semblables entre eux*; le plus grand d'entre eux a ses côtés perpendiculaires aux cordes D*a*, D*b*, D*c*; le plus petit se réduit au point D, et ses côtés sont dirigés suivant D*a*, D*b*, D*c*.

2. Si l'on soumet la figure précédente à une transformation par rayons vecteurs réciproques, le pôle P étant extérieur au plan ABC, celui-ci se change en une sphère passant par P, et les droites AB, BC, CA sont remplacées par trois cercles se coupant en P. Par conséquent : *Etant donnés sur une sphère trois petits cercles passant par un même point* P *et se coupant deux à deux en* A, B, C, *trois autres petits cercles* Abc, Bca, Cab *passant respectivement par* A, B, C *et se coupant encore deux à deux aux points* a, b, c *situés sur les premiers cercles, se rencontrent en un même point* D.

La figure sphérique a, sur la figure plane dont elle provient, l'avantage d'une symétrie parfaite; elle présente six cercles se coupant, trois à trois, en huit points, et deux à deux en six points.

3. Considérons maintenant un tétraèdre T $\equiv$ ABCD. Soient a, b, c, a', b', c' six points marqués arbitrairement sur les arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC et α, β, γ, δ les quatre sphères A$a'bc$, B$b'ca$, C$c'ab$, D$a'b'c'$.

Les sphères α, β, γ rencontrent le plan ABC suivant trois circonférences Abc, Bca, Cab qui se coupent en un même point D′, 1. De même, les sphères α, β, δ se rencontrent en un même point C′ de la face DAB. Soient encore B′, A′ les points analogues des sphères α, γ, δ et β, γ, δ.

Sur la sphère δ, les cercles $a'b'$C′, $b'c'$A′, $c'a'$B′ passent par un même point D; donc les cercles b'A′C′, c'B′A′, a'C′B′ qui passent par les points d'intersection b', c', a' des premiers cercles et se coupent sur ces cercles, deux à deux, se rencontrent en un même point Q, 2. Mais les cercles b'A′C′, c'B′A′, a'C′B′ sont situés sur les sphères β, γ, δ, donc les quatre sphères se coupent en γ.

4. Réciproquement : *Soient données quatre sphères* α, β, γ, δ *passant par un même point* Q *et se coupant, trois à trois, aux points* A′, B′, C′, D′; *il existe une infinité de tétraèdres dont les faces passent par* A′, B′, C′, D′ *et dont les sommets sont sur les quatre sphères.*

En effet, menons par D′ un plan quelconque, rencontrant les sphères α, β, γ suivant trois cercles qui se coupent, deux à deux, en a, b, c; par a, b, c faisons passer les côtés d'un triangle ABC, dont les sommets se trouvent sur les trois circonférences; les plans ABC′, BCA′, CAB′ se coupent en un point D de la sphère δ. Car les droites AD, BD, CD passent par les points a', b', c' où se coupent les deux cercles (AbB′, AcC′), (BcC′, BaA′), (CbB′, CaA′) suivant lesquels deux des plans ABC′, BCA′, CAB′ rencontrent l'une des sphères α, β, γ; donc, d'après 3, la sphère D$a'b'c'$A′B′C′ passe par Q et se confond avec δ.

Lorsque le plan ABC reste fixe et que le triangle ABC se déforme dans ce plan, le point D décrit, sur la sphère δ, un petit cercle dont le plan est parallèle à ABC. Car la droite DA, par exemple, intersection des plans mobiles ABC′, ACB′ qui engendrent autour des axes cC′, bB′, des faisceaux homographiques, appartient à un hyperboloïde déterminé; elle s'appuie aussi sur les cercles fixes bD′c, QC′B′ qui sont dès lors deux sections cycliques non parallèles de l'hyperboloïde; par suite, la sphère δ qui coupe l'hyperboloïde suivant un premier cercle QC′B′, doit le rencontrer suivant un second cercle dont le plan est parallèle à ABC. Ce cercle est le lieu cherché du point D, sous la condition que le plan ABC reste fixe.

Le maximum du volume ABCD, sous la même condition, a lieu lorsque AB, BC, CA sont perpendiculaires à D′a, D′b, D′c, et le minimum se réduit à la corde QD′.

Supposons maintenant que le plan ABC tourne autour de D′; l'arête DA du tétraèdre engendre une série d'hyperboloïdes ayant en commun la section circulaire QC′B′ et la génératrice QD′ (de même système que DA).

Soient A_1, B_1, C_1, D_1 les secondes extrémités des diamètres menés par Q. Les faces du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ passent par A′, B′, C′, D′ et sont perpendiculaires à QA′, QB′, QC′, QD′; ce tétraèdre est un maximum maximorum.

Par une transformation homologique, on parvient à étendre les théorèmes qui précèdent, à des coniques passant par deux points fixes, et à des surfaces du second degré ayant une conique commune.

Corollaire. — *Si les points* a, b, c, a′, b′, c′ *sont dans un même plan* (P), *les sphères*

$$(\omega_a) \equiv Aa'bc, \quad (\omega_b) \equiv Bb'ca, \quad (\omega_c) \equiv Cc'ab, \quad (\omega_d) \equiv Da'b'c',$$

se coupent en un point M *situé dans le plan* (P). *Les quatre autres intersections de ces sphères prises trois à trois sont sur la sphère* (O, R) *circonscrite au tétraèdre* T.

En effet, les cercles bca', cab', abc', $a'b'c'$ circonscrits aux quatre triangles du quadrilatère complet de sommets a, b, c, a', b', c', situé dans le plan (P), et par suite les sphères (ω_i), $(i = a, b, c, d)$, concourent au point de MIQUEL M de ce quadrilatère.

D'autre part, les sphères (ω_i), prises trois à trois, déterminent quatre autres points M_i respectivement dans les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC et qui coïncident avec les points de MIQUEL des quadrilatères complets formés par les arêtes de chacune des faces et par les traces du plan (P) dans ces faces. Les points M_i appartiennent donc à chacun des cercles BCD, CDA, DAB, ABC et par conséquent à la sphère (O, R).

Enfin, les points M_i se confondent avec les symétriques du point M par rapport aux plans des faces du tétraèdre $t \equiv \omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$ et les points M et O avec les foyers d'une quadrique de révolution inscrite au tétraèdre t.

33. THÉORÈME. — *Si trois sphères* (ω_a), (ω_b), (ω_c), *passant respectivement par les sommets* A, B, C *d'un triangle* ABC, *se rencontrent deux à deux,* (ω_b) *et* (ω_c) *en* a *sur* BC, (ω_c) *et* (ω_a) *en* b *sur* CA, (ω_a) *et* (ω_b) *en* c *sur* AB, *les points* A_1, B_1, C_1, *diamétralement opposés aux sommets* A, B, C *du triangle* ABC *sur les sphères* (ω_a), (ω_b), (ω_c), *sont coplanaires avec le point de concours des trois sphères qui est extérieur au plan* ABC.

Le plan du triangle ABC intercepte sur les sphères (ω_a), (ω_b), (ω_c) trois cercles Abc, Bca, Cab concourants, (32), de sorte que les trois sphères se rencontrent en un second point P extérieur au plan ABC. D'autre part, les points a'_1, b'_1, c_1 diamétralement opposés aux points A, B, C sur les cercles Abc, Bca, Cab coïncident avec les projections orthogonales des points A_1, B_1, C_1 sur le plan ABC; les droites $b'_1c'_1$, $c'_1a'_1$, $a'_1b'_1$ étant perpendiculaires sur BC, CA, AB aux points a, b, c, les droites BC et B_1C_1, CA et C_1A_1, AB et A_1B_1 sont orthogonales.

Les projections orthogonales a_1, b_1, c_1 des points B et C sur B_1C_1, C et A sur C_1A_1, A et B sur A_1B_1 coïncident donc avec les points où les sphères (ω_b) et (ω_c), (ω_c) et (ω_a), (ω_a) et (ω_b) se rencontrent sur les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1.

Dès lors, les cercles $A_1b_1c_1$, $B_1c_1a_1$, $C_1a_1b_1$ situés, d'une part, dans le plan $A_1B_1C_1$ et d'autre part sur chacune des sphères (ω_a), (ω_b), (ω_c) concourent en un point qui se confond nécessairement avec le point P, ce qui achève de démontrer le théorème.

COROLLAIRE. — *Si quatre sphères* (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d), *passant par*

les sommets A, B, C, D *d'un tétraèdre* ABCD, *se coupent deux à deux sur les arêtes* BC, CA, AB, DA, DB, DC, *les points* A_1, B_1, C_1, D_1 *diamétralement opposés aux sommets* A, B, C, D *sur ces sphères sont coplanaires avec le point de concours des quatre sphères.*

Cette proposition est implicitement contenue dans le théorème précédent.

34. Généralisations. — 1. Modifions légèrement les notations en considérant quatre sphères (ω_1), (ω_2), (ω_3), (ω_4) qui passent par les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 d'un tétraèdre $T \equiv A_1A_2A_3A_4$ et se coupent deux à deux aux points a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3 sur les arêtes A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3; ces sphères concourent en un point P.

Les droites A_5A_1, A_5A_2, A_5A_3, A_5A_4 qui joignent un point arbitraire A_5 de l'espace aux sommets du tétraèdre T recoupent les sphères (ω_i), $(i = 1, 2, 3, 4)$, aux points α, β, γ, δ.

En vertu du théorème de Miquel appliqué au tétraèdre $A_5A_1A_2A_3$, par exemple, les sphères $A_5\alpha\beta\gamma$, (ω_1), (ω_2), (ω_3) concourent en un même point qui coïncide nécessairement avec le point P commun aux quatre sphères (ω_i). Or, comme les sphères $A_5\alpha\beta\gamma$ et $A_5\beta\gamma\delta$ sont aussi circonscrites au tétraèdre $A_5\alpha\beta P$, ces deux sphères sont confondues. Il en est de même des sphères $A_5\alpha\gamma\delta$ et $A_5\beta\gamma\delta$, de sorte que les sphères $A_5\alpha\beta\gamma$, $A_5\alpha\beta\delta$, $A_5\beta\gamma\delta$, $A_5\alpha\gamma\delta$ coïncident en une même sphère (ω_5) passant par les points A_5 et P.

D'autre part, si l'on observe que les plans perpendiculaires aux droites A_5A_1, A_5A_2, A_5A_3, A_5A_4 passent par le point A'_5 diamétralement opposé au point A_5 sur la sphère (ω_5), on peut ajouter que la sphère (ω_i) est décrite sur le segment $A_5A'_5$ joignant le point A_5 à l'intersection des plans considérés, comme diamètre. D'où cette proposition qui constitue une extension du théorème de Miquel :

On considère un tétraèdre $T \equiv A_1A_2A_3A_4$ *et quatre sphères* (ω_i) *passant par les sommets* A_1, A_2, A_3, A_4 *et se coupant deux à deux sur les arêtes. Les droites* A_5A_1, A_5A_2, A_5A_3, A_5A_4 *qui joignent un point arbitraire* A_5 *de l'espace aux sommets du tétraèdre, recoupent les sphères* (ω_i) *en des points* α, β, γ, δ *situés sur une sphère* (ω_5) *passant par les points* A_5, A'_5, P *et décrite sur le segment* $A_5A'_5$ *comme diamètre.*

Plus généralement, si l'on considère des points arbitraires A_6, A_7, ..., A_n, n étant un entier quelconque, les droites qui joignent le point A_6 aux points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 recoupent les sphères correspondantes (ω_1), ..., (ω_5) en des points situés sur une même sphère (ω_6) passant par les points A_6 et P, et ainsi de suite, de proche en proche, pour les points A_7, ... Finalement, les droites qui joignent le point A_n aux points A_1, A_2, ..., A_{n-1} recoupent les sphères (ω_1), (ω_2), ...,

(ω_{n-1}) en des points situés sur une sphère (ω_n) qui passe par les points A_n et P.

D'autre part, les plans perpendiculaires aux droites $(A_6A_5, \ldots, A_6A_1), \ldots, (A_nA_{n-1}, \ldots, A_nA_1)$ en leurs points de rencontre avec les sphères $[(\omega_5), \ldots, (\omega_1)], \ldots, [(\omega_{n-1}), \ldots, (\omega_1)]$, concourent aux points $A'_6, \ldots, A'_n$ diamétralement opposés à $A_6, \ldots, A_n$ sur les sphères $(\omega_6), \ldots, (\omega_n)$.

35. Lorsque le point A_n est situé à l'infini dans une direction donnée, *les droites* $A_nA_1, A_nA_2, \ldots, A_nA_{n-1}$ *sont parallèles et la sphère* (ω_n) *dégénère en un plan qui passe par le point* P *commun aux sphères* $(\omega_1), (\omega_2), \ldots, (\omega_{n-1})$.

Corollaire. — *Si des droites parallèles de direction arbitraire issues des sommets* A_1, A_2, A_3, A_4 *d'un tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$ *recoupent des sphères de* Miquel $(\omega_1), (\omega_2), (\omega_3), (\omega_4)$ *aux points* A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, *ces quatre points sont dans un même plan avec le point de concours des quatre sphères.*

Cette hypothèse particulière pour laquelle $n = 5$, peut se démontrer directement de la manière suivante.

Si les sphères $(\omega_1), (\omega_2), (\omega_3), (\omega_4)$ se coupent deux à deux sur les arêtes $A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3$ en $a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c_1$, le plan des droites parallèles $A_2A'_2, A_3A'_3$, par exemple, coupe les sphères $(\omega_2), (\omega_3)$ suivant des cercles $A'_2A_2a_1, A'_3A_3a_1$ qui rencontrent la droite $A'_2A'_3$ au même point a_2. Il en résulte que le plan $A'_2A'_3A'_4$ coupe les sphères $(\omega_2), (\omega_3), (\omega_4)$ suivant un système de trois cercles concourants $A_2b_2c_2, A_3c_2a_2, A_4a_2b_2$ dont le point de concours se confond nécessairement avec le point commun aux sphères $(\omega_2), (\omega_3), (\omega_4)$, extérieur au plan $A_2A_3A_4$ et par suite avec le point de rencontre des quatre sphères $(\omega_1), (\omega_2), (\omega_3), (\omega_4)$.

2. Théorème. — *Les points* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ *diamétralement opposés aux sommets* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *du polygone gauche* $A_1A_2 \ldots A_n$ *sur les sphères correspondantes* $(\omega_1), (\omega_2), \ldots, (\omega_n)$ *sont situés dans un même plan qui passe par le point de concours* P *de ces* n *sphères.*

D'après le théorème (33), on constate en effet, de proche en proche, que les groupes de points $(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4), (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5), \ldots, (A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$, sont situés dans un même plan passant par le point commun aux sphères $(\omega_1), (\omega_2), \ldots, (\omega_n)$.

QUELQUES QUADRUPLES HYPERBOLOÏDIQUES

36. Théorème. — *Si un quadrangle gauche a ses côtés opposés égaux deux à deux, il en est de même de ses angles opposés, et réciproquement.*

En effet, si les côtés opposés MN et PQ d'un quadrangle gauche MNPQ sont égaux ainsi que les côtés opposés NP et QM, les triangles MNP et PQM sont égaux, de même que les triangles QMN et NPQ, ce qui donne les égalités angulaires

$$(1) \qquad (NP, NM) = (QM, QP), \qquad (MN, MQ) = (PQ, PN).$$

Réciproquement, étant donné un quadrangle gauche MNPQ dans lequel les angles opposés (1) sont égaux, si l'on mène des plans perpendiculaires aux côtés QM, MN, NP, PQ de manière que les vecteurs $\overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PQ}$ aient tous le sens des normales intérieures aux faces ABC, BCD, CDA, DAB du tétraèdre T déterminé par ces plans, ou tous le sens des normales extérieures, les dièdres opposés BC et AD de T sont égaux, de même que les dièdres opposés AB et CD. Par suite, les trièdres (A — BCD) et (C — DAB) ont leurs trois dièdres égaux chacun à chacun, ce qui donne les égalités angulaires

$$(AB, AC) = (CD, CA), \qquad (AC, AD) = (CA, CB),$$

et l'égalité des triangles ABC et CDA. Or, d'après une propriété connue, les mesures des côtés QM et NP étant proportionnelles à celles des aires des faces ABC et CDA, on a donc QM = NP, et par analogie, MN = PQ.

Corollaire. — *Les perpendiculaires élevées aux sommets* M, N, P, Q *de ce quadrangle gauche sur les plans des deux côtés aboutissant à ces sommets sont les génératrices d'un même hyperboloïde, et réciproquement.*

En effet, pour que les perpendiculaires Δ_m, Δ_n, Δ_p, Δ_q en M, N, P, Q aux plans (MN, MQ), (NP, NM), (PQ, PN), (QM, QP) soient hyperboloïdiques, il faut et il suffit que les projections orthogonales sur le plan d'une face quelconque du tétraèdre $t \equiv$ MNPQ des perpendiculaires aux trois autres faces soient des droites concourantes et que cette propriété existe pour trois des faces. Or, les projections des droites Δ_m, Δ_p sur le plan MNP passent au point N_1 diamétralement opposé au point N sur le cercle MNP et la projection de la droite Δ_q sur le plan MNP se confond avec la trace sur celui-ci du

plan mené par la hauteur QQ′ du triangle MPQ perpendiculairement au côté MP. Comme, par hypothèse,

$$(2) \qquad MN = PQ, \qquad NP = QM,$$

les hauteurs NN′, QQ′ des triangles MNP, MPQ sont symétriques par rapport à la médiatrice du côté MP et NN′ passe par le point N_1. Mêmes conclusions pour les projections des droites $(\Delta_m, \Delta_n, \Delta_p)$, $(\Delta_m, \Delta_n, \Delta_q)$ sur les plans MPQ, NPQ.

Réciproquement, si les projections des droites $(\Delta_m, \Delta_p, \Delta_q)$ sur le plan MNP concourent en un point N_1, celui-ci est diamétralement opposé au point N sur le cercle MNP et les égalités (2) résultent des suivantes :

$$\overline{QM}^2 - \overline{QP}^2 = \overline{NP}^2 - \overline{NM}^2, \qquad \overline{MQ}^2 - \overline{MN}^2 = \overline{PN}^2 - \overline{PQ}^2,$$

par addition et soustraction des membres correspondants.

37. *Application au tétraèdre.* — Si l'on désigne par M et P, N et Q les angles opposés d'un quadrangle gauche MNPQ et par M′ et P′, N′ et Q′ les supplémentaires de ces angles obtenus en prolongeant un de leurs côtés, si M = P et N = Q, on a aussi

$$(3) \qquad M + P' = P + M' = 180^\circ = N + Q' = Q + N',$$

tandis qu'on ne peut avoir simultanément les égalités

$$M + P = 180^\circ = N + Q \quad \text{et} \quad M' + P' = 180^\circ = N' + Q'.$$

En effet, la diagonale NQ du quadrangle gauche détermine les triangles MNQ, NPQ dont la somme des angles est égale à 360°, et comme une face d'un trièdre est plus petite que la somme des deux autres, on obtient, d'abord,

$$Q < (QM, QN) + (QN, QP), \qquad N < (NQ, NM) + (NP, NQ),$$

ensuite

$$Q + N < 180^\circ - M + 180^\circ - P$$

et finalement

$$M + N + P + Q < 360^\circ.$$

D'où cette proposition : *Un tétraèdre ne peut avoir deux couples de dièdres supplémentaires, ni deux couples de dièdres extérieurs supplémentaires, tandis qu'il peut avoir deux ou trois couples d'un dièdre intérieur et d'un dièdre extérieur opposés supplémentaires.*

38. Théorème. — *Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ *des nombres arbitraires que nous attribuons aux arêtes* BC, CD, DB, AD, AB, AC *d'un tétraèdre quelconque* ABCD; A′, B′, C′, D′ *les points des plans des faces* BCD, CDA, DAB, ABC *dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux nombres* λ *attribués aux arêtes de cette face. Les droites* AA′, BB′, CC′, DD′ *sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde. Elles sont concourantes si*

$$\lambda_1\lambda'_1 = \lambda_2\lambda'_2 = \lambda_3\lambda'_3, \tag{4}$$

et réciproquement.

Les droites AB′, AC′, AD′ rencontrent respectivement les arêtes CD, DB, BC en des points B″, C″, D″ tels que

$$\frac{BC''}{C''D} = \frac{\lambda'_2}{\lambda'_1}, \qquad \frac{CD''}{D''B} = \frac{\lambda'_3}{\lambda'_2}, \qquad \frac{DB''}{B''C} = \frac{\lambda'_1}{\lambda'_3},$$

et les droites BB″, CC″, DD″ sont donc concourantes en un certain point A‴. Il en est ainsi pour les droites analogues correspondant aux trois autres faces du tétraèdre.

Par suite, la droite AA‴, par exemple, rencontre les droites AA′, BB′, CC′, DD′ qui sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde.

Désignant par B''_1, C''_1, D''_1 les intersections de CD, DB, BC avec BA′, CA′, DA′, on a

$$\frac{BC''_1}{C''_1D} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \qquad \frac{CD''_1}{D''_1B} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \qquad \frac{DB''_1}{B''_1C} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les points B″ et B''_1 coïncident ainsi que C″ et C''_1, D″ et D''_1, est donc que l'on ait

$$\lambda_1\lambda'_1 = \lambda_2\lambda'_2 = \lambda_3\lambda'_3.$$

Dans ce cas, les droites AA′, BB′, CC′, DD′ sont concourantes.

Corollaires. — 1° *Si l'on attribue à chaque arête du tétraèdre* ABCD *l'arête opposée (ou son inverse), on obtient en général quatre droites* AA′, BB′, CC′, DD′, *hyperboloïdiques.*

Car, dans chacun de ces cas,

$$\lambda_1 = a' \quad \text{et} \quad \lambda'_1 = a, \qquad \lambda_2 = b' \quad \text{et} \quad \lambda'_2 = b, \qquad \lambda_3 = c' \quad \text{et} \quad \lambda'_3 = c, \tag{5}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{a'} \quad \text{et} \quad \lambda'_1 = \frac{1}{a}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{b'} \quad \text{et} \quad \lambda'_2 = \frac{1}{b}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{c'} \quad \text{et} \quad \lambda'_3 = \frac{1}{c}. \tag{6}$$

Dans les deux hypothèses, si les relations (4) et (5) ou (4) et (6) ont lieu, *le tétraèdre* T *est isodynamique et les droites* AA′, BB′, CC′, DD′ *sont concourantes, et réciproquement.*

De plus, si l'on désigne par A′, B′, C′, D′ les centres des cercles inscrits aux faces BCD, CDA, DAB, ABC d'un tétraèdre *isodynamique* T, et par (B''_A, C''_A, D''_A), (C''_B, D''_B, A''_B), (D''_C, A''_C, B''_C), (A''_D, B''_D, C''_D) les centres des cercles ex-inscrits aux mêmes faces on obtient les quaternes suivants de droites concourantes :

Le quaterne $(DD', AD''_A, BD''_B, CD''_C)$, *et ceux relatifs aux sommets* A, B, C ; *les quaternes*

$$(DD', AC''_A, BA''_B\ CB''_C), \qquad (DD', AB''_A, BC''_B, CA''_C)$$

et leurs analogues pour les sommets A, B, C ; *le quaterne* $(AD''_A, BC''_B, CB''_C, DA''_D)$, *et ceux relatifs aux couples d'arêtes opposées* (CA, DB), (AB, DC) ; *les quaternes*

$$(AD''_A, BA''_B, CB''_C, DC''_D), \qquad (AD''_A, BC''_B, CB''_C, DA''_D),$$
$$(AB''_A, BC''_B, CD''_C, DA''_D), \qquad (AB''_A, BA''_B, CB''_C, DA''_D),$$

et leurs analogues pour les deux autres couples d'arêtes opposées, sont formés de droites concourantes, et réciproquement.

Car, en changeant les signes des nombres a, a', b, b', c, c' dans les égalités $aa' = bb' = cc'$ qui caractérisent le tétraèdre isodynamique T, pour trois arêtes d'une face, ou concourantes, pour deux arêtes opposées, ou pour deux couples, ces égalités se conservent.

2° *Les hauteurs d'un tétraèdre quelconque* T *sont hyperboloïdiques ; elles sont concourantes si le tétraèdre est orthocentrique.*

En effet, d'après le théorème précédent, si l'on pose

$$(7)\quad \begin{array}{lll} \lambda_1 = A.D\cos a, & \lambda_2 = A.B\cos c', & \lambda_3 = A.C\cos b', \\ \lambda'_1 = B.C\cos a', & \lambda'_2 = C.D\cos c, & \lambda'_3 = B.D\cos b, \end{array}$$

les coordonnées barycentriques des points A′, B′, C′, D′ dans les faces BCD, CDA, DAB, ABC sont proportionnelles aux nombres

$$(B\cos c',\ C\cos b',\ D\cos a), \qquad (C\cos a',\ D\cos b,\ A\cos c'),$$
$$(D\cos c,\ A\cos b',\ B\cos a'), \qquad (A\cos a,\ B\cos b,\ C\cos c),$$

c'est-à-dire à ceux qui représentent les coordonnées barycentriques des pieds A_h, B_h, C_h, D_h des hauteurs du tétraèdre T dans les mêmes faces. Par suite, les droites AA′, BB′, CC′, DD′ se confondent avec les hauteurs AA_h, BB_h, CC_h, DD_h du tétraèdre T qui sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde.

Si les égalités (1) ont lieu, les hauteurs AA_h, BB_h, CC_h, DD_h sont

concourantes et le tétraèdre T est orthocentrique. Dans ce cas, d'après les égalités (1) et (7), on retrouve, en outre, les égalités caractéristiques

$$\cos a \cos a' = \cos b \cos b' = \cos c \cos c',$$

entre les cosinus des dièdres opposés de ce tétraèdre particulier.

3° *Si l'on porte sur les perpendiculaires élevées extérieurement (ou intérieurement) aux plans des faces* BCD, CDA, DAB, ABC *d'un tétraèdre* T, *aux centres* A_1, B_1, C_1, D_1 *des cercles inscrits à ces faces, des segments* $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$, $\overrightarrow{D_1D_2}$, *proportionnels respectivement aux rayons de ces cercles, les droites* AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 *sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde.*

En effet, les distances du pied A_h de la hauteur AA_h du tétraèdre T aux arêtes BC, CD, DB ont pour mesures $h_a \operatorname{cotg} a$, $h_a \operatorname{cotg} c'$, $h_a \operatorname{cotg} b'$. D'autre part, si l'on pose $A_1A_2 = mr_a$, r_a étant le rayon du cercle inscrit au triangle BCD, la droite AA_2 rencontre le segment A_hA_1 en un point A_3 qui partage celui-ci dans le rapport

$$\frac{A_hA_3}{A_hA_1} = \frac{ha}{ha + mr_a} = k$$

et dont les distances aux arêtes BC, CD, DB ont pour mesures

$$kr_a(m \operatorname{cotg} a + 1), \quad kr_a(m \operatorname{cotg} c' + 1), \quad kr_a(m \operatorname{cotg} b' + 1).$$

Le point A_3 a donc

$$\lambda_1 = a(m \operatorname{cotg} a + 1), \qquad \lambda_2 = c'(m \operatorname{cotg} c' + 1),$$
$$\lambda_3 = b'(m \operatorname{cotg} b' + 1),$$

pour coordonnées barycentriques dans le triangle BCD, et l'on obtient de même les coordonnées barycentriques

$$(\lambda_2, \lambda_1', \lambda_3), \qquad (\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3), \qquad (\lambda_2', \lambda_1, \lambda_3)$$

des points B_3, C_3, D_3 analogues au point A_3, situés sur les droites BB_2, CC_2, DD_2, par rapport aux triangles des faces CDA, DAB, ABC. La démonstration s'achève en invoquant le théorème précédent (38).

4° *Les droites qui joignent les sommets* A, B, C, D, *d'un tétraèdre* T *respectivement au sommet d'un tétraèdre orthocentrique dont les trois autres coïncident avec les projections orthogonales du premier sur les faces des trièdres* (A), (B), (C), (D) *sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde.*

En effet, pour qu'un tétraèdre D'A'B'C' dont les sommets A', B', C', D' coïncident avec les projections orthogonales d'un point D',

dont on déterminera le lieu sur les faces DBC, DCA, DAB du trièdre (D) soit orthocentrique, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \qquad \overline{D'A''}^2 + \overline{B''C''}^2 = \overline{D'B''}^2 + \overline{C''A''}^2 = \overline{D'C''}^2 + \overline{A''B''}^2.$$

Or, on obtient d'abord, en grandeur et en signe,

$$\overline{B''C''}^2 = \overline{D'B''}^2 + \overline{D'C''}^2 - 2D'B''.D'C'' \cos(\pi - a'),$$

ensuite

$$\begin{aligned}\overline{D'A''}^2 + \overline{D'B''}^2 + \overline{D'C''}^2 &= \overline{D'A''}^2 + \overline{B''C''}^2 + 2D'B''.D'C'' \cos a' \\ &= \overline{D'B''}^2 + \overline{C'A''}^2 + 2D'C''.D'A'' \cos b' \\ &= \overline{D'C''}^2 + \overline{A''B''}^2 + 2D'A''.D'B'' \cos c',\end{aligned}$$

enfin, d'après (1), la relation

$$D'A'' : D'B'' : D'C'' = \cos a' : \cos b' : \cos c',$$

dont il résulte que le point D', et par analogie les sommets A', B', C' de tétraèdres orthocentriques dont les trois autres sommets sont les projections orthogonales de A', B', C' sur les faces des trièdres (A), (B), (C) respectivement, décrivent chacun une droite fixe passant par D, A, B, C. Ces droites rencontrent les faces BCD, CDA, DAB, ABC aux points A_1, B_1, C_1, D_1 dont les coordonnées barycentriques par rapport aux mêmes faces sont proportionnelles aux nombres

$$(2) \quad \begin{array}{l}(B \cos c,\ C \cos b,\ D \cos a'),\ (C \cos a,\ D \cos b',\ A \cos c),\\ (D \cos c',\ A \cos b,\ B \cos a),\ (A \cos a',\ B \cos b',\ C \cos c').\end{array}$$

D'autre part, si l'on pose

$$(3) \quad \begin{array}{l}\lambda_1 = A.D \cos a',\ \lambda_2 = A.B \cos c,\ \lambda_3 = A.C \cos b,\\ \lambda'_1 = B.C \cos a,\ \lambda'_2 = C.D \cos c',\ \lambda'_3 = B.D \cos b',\end{array}$$

et que l'on attribue ces nombres λ aux arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC, les coordonnées barycentriques des points A_1, B_1, C_1, D_1, proportionnelles aux nombres (2), le sont aussi aux nombres (3), et les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde.

Cas particuliers. — *Si le tétraèdre* T *est* orthocentrique, *les droites* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *sont concourantes, et réciproquement.*

Car, dans cette hypothèse, les nombres

$$\begin{array}{l}\lambda_1 = A.D \cos a,\ \lambda_2 = A.B \cos c',\ \lambda_3 = A.C \cos b',\\ \lambda'_1 = B.C \cos a',\ \lambda'_2 = C.D \cos c,\ \lambda'_3 = B.D \cos b,\end{array}$$

proportionnels aux coordonnées barycentriques des pieds des hauteurs d'un tétraèdre quelconque, par rapport aux faces BCD, CDA, DAB, ABC, comparés aux nombres (3), permettent de dire que les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 se confondent avec les isogonales des hauteurs de T dans les trièdres (A), (B), (C), (D), puisque, pour ce tétraèdre particulier,

$$\cos a \cos a' = \cos b \cos b' = \cos c \cos c'.$$

La proposition provient aussi de ce que

$$\lambda_1\lambda_1' = \lambda_2\lambda_2' = \lambda_3\lambda_3'.$$

Lorsque le tétraèdre T *est* équifacial, *les droites* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, *se confondent avec les hauteurs, et réciproquement.*

Dans ce cas, en effet,

$$\cos a = \cos a', \cos b = \cos b', \cos c = \cos c'.$$

N. B. — Nous nous bornons au cas où les points A', B', C', D' sont intérieurs aux trièdres (A), (B), (C), (D), laissant au lecteur le soin d'examiner les autres cas.

HOMOLOGIE, BILOGIE, ORTHOHOMOLOGIE

39. Définitions. — Deux tétraèdres $T \equiv ABCD$, $T' \equiv A'B'C'D'$ tels que les droites AA', BB', CC', DD' se rencontrent en un point S sont dits *homologiques*. Les plans des faces opposées aux sommets A et A', B et B', C et C', D et D' se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan (P). Le point S et le plan (P) sont le centre et le plan de l'homologie (T, T').

Si, de plus, les perpendiculaires sur les plans B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C', issues des points A, B, C, D, concourent en un point Q, les perpendiculaires menées des points A', B', C', D' sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC passent par un même point Q'. Les tétraèdres T et T', homologiques et orthologiques à la fois, sont appelés tétraèdres *bilogiques*, avec les points S et Q, Q' pour centres d'homologie et d'orthologie.

Enfin, deux tétraèdres T et T' dont les plans des faces sont perpendiculaires sont dits tétraèdres *orthohomologiques*.

Ces tétraèdres ont donné lieu à quelques remarques récentes.

40. Théorème. — *Deux tétraèdres* $T \equiv ABCD$, $T' \equiv A'BCD$ *ayant une face commune* BCD, *les perpendiculaires en* A *aux faces* CDA,

DAB, ABC *du tétraèdre* T *coupent les plans des faces* A'CD, A'DB, A'BC *du tétraèdre* T' *en* A_1, A_2, A_3, *et les perpendiculaires en* A' *aux faces* A'CD, A'DB, A'BC *du tétraèdre* T' *rencontrent les plans des faces* CDA, DAB, ABC *du tétraèdre* T *en* A'_1, A'_2, A'_3. *Les perpendiculaires menées de* A *et* A' *aux plans* $A_1A_2A_3$ *et* $A'_1A'_2A'_3$, *respectivement, se coupent en un même point du plan de la face commune* BCD.

Si nous désignons par β, γ, δ les angles des plans A'CD, A'DB, A'BC avec le plan BCD, la perpendiculaire du sommet A du tétraèdre T au plan $A_1A_2A_3$ a pour équation en coordonnées normales

$$\frac{y}{\sin c' \operatorname{cotg}(c'-\beta)} = \frac{z}{\sin b' \operatorname{cotg}(b'-\gamma)} = \frac{t}{\sin a \operatorname{cotg}(a-\delta)},$$

et cette perpendiculaire coupe le plan BCD en un point A'' dont les coordonnées normales, par rapport au triangle BCD, sont proportionnelles à

$$\operatorname{cotg}(c'-\beta), \qquad \operatorname{cotg}(b'-\gamma), \qquad \operatorname{cotg}(a-\delta).$$

Symétriquement, la perpendiculaire du point A' au plan $A'_1A'_2A'_3$ perce le plan BCD au même point A''.

Corollaire. — *Si le tétraèdre* T *est* orthocentrique *et que* A' *se confonde avec l'orthocentre* H, *le point* A'' *coïncide avec le centre de gravité du triangle* BCD.

Car si l'on désigne par B_1, C_1, D_1 les pieds des hauteurs du triangle BCD, on a, d'abord,

$$\frac{y'}{\operatorname{tang} B_1AB} = \frac{z'}{\operatorname{tang} C_1AC} = \frac{t'}{\operatorname{tang} D_1AD}$$

puis, dans le triangle D_1AD,

$$AH = \frac{DD_1}{\operatorname{tang} D_1AD}, \qquad \text{et} \qquad \frac{y'}{BB_1} = \frac{z'}{CC_1} = \frac{t'}{DD_1},$$

et le point A'' (y', z', t') coïncide avec le centre de gravité du triangle BCD.

41. Théorème. — *Etant donnés deux tétraèdres homologiques* $T \equiv ABCD$, $T' \equiv A'B'C'D'$, *les perpendiculaires en* A *aux faces* ABC, ACD, ADB *du tétraèdre* T *coupent les plans des faces* A'B'C', A'C'D', A'D'B' *du tétraèdre* T' *en* (A_d, A_b, A_c), *et l'on obtient de même des points* (B_a, B_c, B_d), (C_a, C_b, C_d), (D_a, D_b, D_c) *relativement aux sommets*

B, C, D *du tétraèdre* T. *De la même manière, en partant du tétraèdre* T′, *on détermine les points* (A'_d, A'_b, A'_c), (B'_a, B'_c, B'_d), (C'_a, C'_b, C'_d), (D'_a, D'_b, D'_c) *sur les plans des faces du tétraèdre* T.

Les perpendiculaires aux plans $A_bA_cA_d$, $B_cB_dB_a$, $C_dC_aC_b$, $D_aD_bD_c$, *issues des points* A, B, C, D, *concourent en un point* Q.

Les perpendiculaires aux plans $A'_bA'_cA'_d$, $B'_cB'_dB'_a$, $C'_dC'_aC'_b$, $D'_aD'_bD'_c$, *menées par les points* A′, B′, C′, D′, *concourent en un point* Q′.

Les points Q, Q′ *sont homologiques dans l'homologie* (T, T′).

Les droites A_cD_c et A_bD_b, par exemple, passent par le point $T_{ad} \equiv (AD, AD')$, et la suite proportionnelle

$$\frac{T_{ad}A}{T_{ad}D} = \frac{T_{ad}A_c}{T_{ad}D_c} = \frac{T_{ad}A_b}{T_{ad}D_b},$$

montre que les droites A_cA_b et D_cD_b sont parallèles. Elles sont perpendiculaires à l'arête AD et aux perpendiculaires p_a, p_d, abaissées respectivement des points A et D sur les plans $A_bA_cA_d$, $D_aD_bD_c$. Les plans (AD, p_a) et (AD, p_d), normaux à la direction $A_cA_b \equiv D_cD_b$, coïncident, et les droites p_a, p_d se coupent. Si l'on désigne par p_c, p_b leurs analogues, deux quelconques des droites p_a, p_b, p_c, p_d, non situées dans un même plan, ont un point commun Q; elles sont donc concourantes. On obtient pareillement la propriété du point Q′. La troisième partie résulte du théorème (41), d'après lequel les droites AQ et A′Q′, BQ et B′Q′, CQ et C′Q′, se coupent en des mêmes points du plan d'homologie (P) des tétraèdres T et T′.

N. B. — Les points Q et Q′ sont situés sur les perpendiculaires au plan (P) abaissées des conjugués isogonaux S_1 et S'_1 du centre d'homologie S des tétraèdres T et T′ par rapport à ces tétraèdres respectivement.

42. D'une manière générale, la perpendiculaire AX menée d'un point $Q \equiv A'$ de coordonnées normales (x_1, y_1, z_1, t_1), par rapport au tétraèdre T, au plan $A_bA_cA_d$, qui a pour équation

$$\frac{y}{\dfrac{\cos c'}{x_1} + \dfrac{1}{y_1}} = \frac{z}{\dfrac{\cos b'}{x_1} + \dfrac{1}{z_1}} = \frac{t}{\dfrac{\cos a}{x_1} + \dfrac{1}{t_1}},$$

coupe le plan BCD en un point P′ de coordonnées

$$\frac{y}{\dfrac{\cos c'}{x_1} + \dfrac{1}{y_1}} = \cdots = \frac{3V}{\dfrac{A}{x_1} + \dfrac{B}{y_1} + \dfrac{C}{z_1} + \dfrac{D}{t_1}}.$$

Cas particuliers. — 1° Si le point Q est sur la surface

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{t}=0$$

de Sartiaux du tétraèdre T, la droite $AX \equiv AQ'$ est parallèle au plan BCD qui est perpendiculaire au plan $A_bA_cA_d$.

2° Les équations des perpendiculaires BY, CZ, DW menées des points B, C, D sur les plans $B_cB_dB_a$, $C_dC_aC_b$, $D_aD_bD_c$ sont de même forme que celle de AX. Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour que les droites* AX, BY, CZ, DW *soient quatre génératrices d'un même hyperboloïde est que l'on ait, à la fois,*

$$\frac{\cos c'}{x_1}+\frac{1}{y_1}=\frac{\cos c'}{y_1}+\frac{1}{x_1}, \qquad \frac{\cos b'}{x_1}+\frac{1}{z_1}=\frac{\cos b'}{z_1}+\frac{1}{x_1},$$

$$\frac{\cos a}{x_1}+\frac{1}{t_1}=\frac{\cos a}{t_1}+\frac{1}{x_1},$$

c'est-à-dire

$$x_1=y_1=z_1=t_1.$$

Le point Q coïncide avec le centre de la sphère inscrite (I, r) au tétraèdre T et les droites joignant les sommets de celui-ci aux points de contact de la sphère (I, r) avec les faces opposées sont des génératrices d'un même hyperboloïde.

Ces droites sont concourantes si

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2}=\cos\frac{b}{2}\cos\frac{b'}{2}=\cos\frac{c}{2}\cos\frac{c'}{2},$$

et le tétraèdre T est *isogone.*

Corollaires. — 1. *Dans un tétraèdre quelconque* $T \equiv ABCD$, *les perpendiculaires en* A *sur les faces* CDA, DAB, ABC *coupent les plans bissecteurs* ICD, IDB, IBC *en* A_b, A_c, A_d, *et ainsi de suite pour les autres sommets du tétraèdre. Les perpendiculaires menées de* A, B, C, D *sur les plans* $A_bA_cA_d$, $B_cB_dB_a$, $C_dC_aC_b$, $D_aD_bD_c$ *passent par les points de contact* A″, B″, C″, D″ *de la sphère inscrite au tétraèdre avec les faces opposées.*

Car $\beta=\frac{c'}{2}$, $\gamma=\frac{b'}{2}$, $\delta=\frac{a}{2}$, et les coordonnées normales du point A″, par rapport au triangle BCD, sont proportionnelles à $\operatorname{cotg}\frac{c'}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{b'}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{a}{2}$.

2. *Dans un tétraèdre* orthocentrique $T \equiv ABCD$, *d'orthocentre* H, *les perpendiculaires en* A *aux faces* ACD, ABD, ABC *coupent respec-*

tivement les plans HCD, HBD, HBC *en* (A_b, A_c, A_d), *et ainsi de suite pour les autres sommets. Les plans* $A_bA_cA_d$, $B_cB_dB_a$, $C_dC_aC_b$, $D_aD_bD_c$ *ainsi obtenus sont perpendiculaires aux médianes.*

C'est une application du corollaire (40).

43. Tétraèdres bilogiques. 1. Théorème. — *Si deux tétraèdres* $T \equiv ABCD$ *et* $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ *sont bilogiques, le centre* P *d'homologie et les centres d'orthologie* Q *et* Q_1 *des tétraèdres* T *et* T_1 *et des tétraèdres* T_1 *et* T *sont sur une même droite perpendiculaire au plan* π *d'homologie.* (V. Thébault).

Le plan π passe par les points

$$B' = (AB, A_1B_1), \quad C' = (AC, A_1C_1), \quad D' = (AD, A_1D_1).$$

Les hauteurs h_1, h_2, h_3, h_4 du tétraèdre $A_1B'C'D'$ sont des génératrices d'un même hyperboloïde (H). Le plan ABQ_1B' normal par hypothèse à la droite C_1D_1 contient la hauteur h_2; la droite AQ_1 rencontre donc h_2 et par analogie h_3, h_4; elle est une directrice de l'hyperboloïde (H).

Ainsi le plan $AA_1Q_1h_1$ qui projette orthogonalement la droite AA_1Q_1 sur le plan d'homologie $\pi \equiv B'C'D'$ passe par le point Q' et par analogie par le point Q. Les plans projetants des droites BB_1Q_1, CC_1Q_1, DD_1Q_1 jouissent de la même propriété et les points Q, Q_1, P sont sur une même droite perpendiculaire au plan π. Le théorème est donc démontré.

2. Théorème. — *La droite* PQQ_1 *est une directrice commune des hyperboloïdes des hauteurs* ($\mathcal{H}$) *et* ($\mathcal{H}_1$) *des tétraèdres* T *et* T_1.

Car la droite PQQ_1 coïncide avec l'intersection des plans (A, QA_1), (B, QB_1), (C, QC_1), (D, QD_1). Le plan (A, QA_1) contient la hauteur AA_h du tétraèdre T et est tangent à l'hyperboloïde ($\mathcal{H}$). Par analogie, les plans (B, QB_1), (C, QC_1), (D, QD_1) possèdent la même propriété qui s'applique, symétriquement, au tétraèdre T_1 et à l'hyperboloïde ($\mathcal{H}_1$).

3. Théorème. — *Les tétraèdres* T, T_1 *et le tétraèdre* $T_2 \equiv A_2B_2C_2D_2$ *ayant pour sommets les points*

$$A_2 \equiv (QA_1, Q_1A), \quad B_2 \equiv (QB_1, Q_1B), \quad C_2 \equiv (QC_1, Q_1C), \quad D_2 \equiv (QD_1, Q_1D),$$

sont deux à deux bilogiques; les centres d'orthologie respectifs sont les points Q, Q_1, P. *Le centre d'orthologie de l'un des tétraèdres coïncide avec le centre d'homologie des deux autres. Les trois homologies ont le même plan* π *d'homologie. Deux quelconques des tétraèdres* T, T_1, T_2 *déterminent le troisième.*

En effet, le point Q_1 est le centre d'homologie des tétraèdres T_1 et T_2. Le plan d'homologie est le plan $\pi \equiv B'C'D'$; car les triangles homologiques Q_1AB, QA_1B montrent que les points (AB, A_1B_1), (QA_1, Q_1A), (QB_1, Q_1B) sont alignés. Les tétraèdres T et T_2 sont orthologiques; le point Q est le centre d'orthologie de T. Le point P est le centre d'orthologie de T_2; car l'intersection B_2C_2 des plans Q_1BC, QB_1C_1 est perpendiculaire au plan ADA_1D_1; la droite AA_1P est donc normale à B_2C_2 et par analogie à C_2D_2, D_2B_2. Par suite, la perpendiculaire abaissée du sommet A du tétraèdre T sur la face correspondante $B_2C_2D_2$ du tétraèdre T_2 passe par le point P.

4. Théorème. — *Les faces de l'un quelconque des tétraèdres bilogiques* T, T_1, T_2 *et le plan d'homologie* π *forment un pentaèdre complet* orthocentrique; *l'orthocentre coïncide avec le centre d'orthologie correspondant au tétraèdre considéré.*

Car les faces α, β, γ, δ du tétraèdre T et le plan π forment un pentaèdre complet. Le plan AA_1PQ est normal aux plans $\alpha \equiv BCD$, π et à leur intersection (α, δ) qui est l'arête du pentaèdre opposée au sommet $A \equiv (\beta, \gamma, \delta)$. Le plan A_1B_1Q normal à l'arête $CD \equiv (\alpha, \beta)$ passe par le sommet opposé $(\gamma, \delta, \pi) \equiv (AB, A_1B_1)$; donc le point Q est commun aux plans menés par les sommets du pentaèdre normalement aux arêtes opposées.

5. Cas particulier. Théorème. — *Si le tétraèdre* T *et son tétraèdre tangentiel* T′ *sont bilogiques, le tétraèdre* T *est* isodynamique, *et réciproquement.*

Puisque les tétraèdres T et T′ sont homologiques, par hypothèse, les plans BCD et B′C′D′, CDA et C′D′A′, DAB et D′A′B′, ABC et A′B′C′ se coupent dans un plan π. D'autre part, les plans A′B′C′ et D′A′B′ rencontrent l'arête AB en un même point C_3, ce qui donne, d'abord,

$$\frac{C_3B}{C_3A} = \frac{\overline{DB}^2}{\overline{DA}^2} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{b'^2}{a'^2} = \frac{a^2}{b^2},$$

ensuite, et par analogie,

$$(1) \qquad aa' = bb' = cc'.$$

Réciproquement, si le tétraèdre T est isodynamique, il résulte des conditions (1) que les centres A_3, B_3, C_3, A'_3, B'_3, C'_3 des cercles d'Apollonius des faces du tétraèdre T relatifs aux arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC sont situés dans un même plan π (*plan de* Lemoine) qui rencontre, à la fois, les plans BCD et B′C′D′, CDA et C′D′A′,

DAB et D'A'B', ABC et A'B'C', ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. — *Le* second *point* de LEMOINE L[1] *d'un tétraèdre sodynamique* T *est situé sur l'hyperboloïde des hauteurs, et réciproquement.*

Car le point L se confond avec le centre d'homologie des tétraèdres T et T' qui sont de plus orthologiques.

44. TÉTRAÈDRES ORTHOHOMOLOGIQUES. THÉORÈME. — *Dans deux tétraèdres orthohomologiques* $T \equiv ABCD$ *et* $T' \equiv A'B'C'D'$, *le centre d'homologie* S *appartient aux surfaces de* SARTIAUX (Σ) *et* (Σ'), *et ses plans podaires relatifs aux deux tétraèdres sont parallèles au plan d'homologie* (P).

Par hypothèse, les plans des faces homologues des tétraèdres T et T' se rencontrent dans le plan (P) et les droites AA', BB', CC', DD' joignant les sommets homologues concourent au point S.

Lorsque le plan (P) se déplace parallèlement à lui-même, le point S est un centre d'homothétie de tous les tétraèdres T' correspondants; l'un de ces tétraèdres se réduit au point S, et le plan (P) devient alors un plan podaire relatif au tétraèdre T. Donc le point S appartient à la surface (Σ) de SARTIAUX du tétraèdre T.

A cause du rôle symétrique des deux tétraèdres T et T', le point S est aussi sur la surface (Σ') de SARTIAUX du tétraèdre T' et le plan podaire du point S relatif à T' est encore parallèle au plan (P).

COROLLAIRE. — *Le centre d'homologie* S *des tétraèdres* T *et* T' *se confond avec les foyers des paraboloïdes de révolution inscrits aux tétraèdres* T *et* T', *dont les axes focaux sont normaux au plan d'homologie* (P).

THÉORÈME. — *Les symétriques du plan d'homologie* (P) *par rapport aux plans des faces du tétraèdre* T (ou T') *déterminent un tétraèdre* $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ (ou $T'_1 \equiv A'_1B'_1C'_1D'_1$) *dont le centre d'une des sphères tangentes aux quatre plans des faces se confond avec le centre d'homologie* S.

En effet, si le plan (P) rencontre les arêtes AB, AC, AD du tétraèdre T en B_2, C_2, D_2, la symétrie de ce plan avec ceux des faces $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, $A_1D_1B_1$ du tétraèdre T_1 par rapport aux plans ABC, ACD, ADB montre, d'une part, que le point A coïncide avec le centre d'une sphère tangente aux quatre plans des faces du tétraèdre T_1 et, d'autre part, que les plans $A'B_2C_2$, $A'C_2D_2$, $A'D_2B_2$ qui sont perpendiculaires respectivement aux plans ABC, ACD, ADB, bissectent

(1) Cf. p. 163.

les dièdres du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ suivant les arêtes B_2C_2, C_2D_2, D_2B_2.

Le sommet A′ du tétraèdre T′ coïncide donc avec le centre d'une sphère tangente aux quatre plans des faces du tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$.

Dès lors, le point A′ étant équidistant des plans $A_1B_2C_2 \equiv A_1B_1C_1$, $A_1C_2D_2 \equiv A_1C_1D_1$, $A_1D_2B_2 \equiv A_1D_1B_1$, la droite AA′, et par analogie, les droites BB′, CC′, DD′, concourent au centre d'une sphère tangente aux quatre plans des faces du tétraèdre T_1 qui se confond nécessairement avec le centre d'homologie S des tétraèdres T et T′. Pour des raisons analogues, le point S coïncide aussi avec le centre d'une sphère tangente aux quatre plans des faces du tétraèdre T'_1.

Corollaire. — *Le centre* S *d'une des sphères tangentes aux quatre plans des faces du tétraèdre* T_1 (ou T'_1) *appartient aux surfaces* (Σ) *et* (Σ').

Théorème. — *Si deux tétraèdres orthocentriques* $T \equiv ABCD$ *et* $T' \equiv A'B'C'D'$, *dont les plans des faces sont perpendiculaires, se correspondent dans une homologie de centre* S, *le plan d'homologie* (P) *partage en deux parties égales la distance des transformés de leurs orthocentres* H *et* H′ *dans l'homothétie* $\left(S, \frac{2}{3}\right)$.

Désignons par p et p' les projections orthogonales du point S sur les plans perpendiculaires BCD et B′C′D′; par q celle du point p' sur le plan BCD, située dans le plan (P), et par m et m' les symétriques du point S par rapport aux plans BCD et B′C′D′.

Le plan du triangle rectangle Smm' contient la droite pq; le point q coïncide avec le milieu de mm' et, à cause des symétries invoquées, le plan (P) passe par ce point.

D'autre part, le centre d'homologie des tétraèdres T et T′ étant situé sur les surfaces de Sartiaux de ceux-ci, les plans podaires π et π' du point S par rapport à T et T′ sont parallèles au plan (P). De plus, d'après un théorème connu, les plans π et π' coupent les droites SH et SH′ au tiers de leur longueur à partir du point S. Les points m et m' coïncident donc avec les transformés dans l'homothétie $\left(S, \frac{2}{3}\right)$ des points de rencontre des plans parallèles à π et π' menés par les orthocentres H et H′ des tétraèdres T et T′ avec les droites Sp et Sp'. Si l'on désigne par n et n' les transformés des points H et H′ dans la même homothétie $\left(S, \frac{2}{3}\right)$, il en résulte que les droites mn et $m'n'$ sont parallèles au plan (P). Ce plan, qui passe au milieu du segment mm', bissecte donc nn', ce qui achève de démontrer le théorème.

COROLLAIRE. — *Lorsque le centre d'homologie* S *est situé dans le plan* (P), *celui-ci passe au milieu de la droite* HH′ *des orthocentres des tétraèdres* T *et* T′.

N. B. — Ces théorèmes constituent une extension au tétraèdre de celui de P. SONDAT relatif à deux triangles orthohomologiques [1].

QUELQUES TÉTRAÈDRES SPÉCIAUX

Après les tétraèdres équifacial, orthocentrique, isodynamique, involutif, dont les propriétés sont devenues classiques, il y a ceux que l'on pourrait réunir sous la rubrique : *Autres tétraèdres spéciaux*, dont voici quelques exemples pris parmi les plus curieux.

45. TÉTRAÈDRES TRANSMUTABLES. — *Définition.* Quand les arêtes d'un tétraèdre $T \equiv ABCD$ vérifient les inégalités

$$(1) \qquad |b' - c'| < a < b' + c', \qquad |b - c| < a' < b + c$$

et celles qu'on en déduit par des permutations circulaires, les arêtes opposées peuvent être permutées pour former un tétraèdre $T'' \equiv A''B''C''D''$, de volume V'', ou un quadrangle plan dans lequel

$$B''C'' = a', \quad C''A'' = b', \quad A''B'' = c', \quad D''A'' = a, \quad D''B'' = b, \quad D''C'' = c.$$

1. LE TÉTRAÈDRE T″ EST EFFECTIF. — *Premier exemple.* Étant donné un triangle ABC dont les côtés BC, CA, AB ont pour mesures a, b, c, les cercles d'APOLLONIUS (A), (B), (C) des triangles CBA_2, ACB_2, BAC_2 ayant un sommet commun avec le triangle anticomplémentaire $A_2B_2C_2$ du triangle ABC recoupent les médianes AA_1, BB_1, CC_1 de celui-ci en A_3, B_3, C_3 et l'on obtient les égalités

$$AA_2 . AA_3 = 2AA_1 . AA_3 = 2(\overline{AA_1}^2 + AA_1 . A_1A_3)$$
$$= 2(\overline{AA_1}^2 + \overline{A_1B}^2) = b^2 + c^2,$$

puis, par analogie,

$$BB_2 . BB_3 = c^2 + a^2, \qquad CC_2 . CC_3 = a^2 + b^2.$$

Si l'on pose

$$b^2 + c^2 = a'^2, \qquad c^2 + a^2 = b'^2, \qquad a^2 + b^2 = c'^2,$$

il est possible de construire un tétraèdre $T \equiv ABCD$ d'arêtes opposées

[1] *Mathesis*, 1895, pp. 265-268.

$BC = a$ et $DA = a'$, $CA = b$ et $DB = b'$, $AB = c$ et $DC = c'$. En effet, on a, d'abord, par exemple,

$$|b' - c'| < a < b' + c'$$

ou ce qui revient au même

$$(2) \qquad \sqrt{c^2 + a^2} - \sqrt{a^2 + b^2} < a < \sqrt{c^2 + a^2} + \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (3)$$

Or, l'inégalité (3) est évidente et l'inégalité (2) équivaut aux suivantes :

$$\frac{|c - b|(c + b)}{\sqrt{c^2 + a^2} + \sqrt{a^2 + b^2}} < |c - b| \qquad \text{et } a \textit{ fortiori} \quad < a.$$

D'autre part, il est clair que

$$|b - c| < a' < b + c.$$

Enfin

$$(4) \qquad |b' - c'| < a' < b' + c', \qquad (5)$$

car l'inégalité (5) est évidente tandis que l'inégalité (4) équivaut aux suivantes :

$$\sqrt{b^2 + c^2} < \sqrt{c^2 + a^2} - \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$= \frac{|c - b|(c + b)}{\sqrt{c^2 + a^2} + \sqrt{a^2 + b^2}} < |c - b| < \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Conclusion. — On peut donc échanger les arêtes opposées a et a' et, par analogie, les arêtes b et b', c et c' du tétraèdre T et obtenir ainsi un second tétraèdre $T'' \equiv A''B''C''D''$.

Corollaire. — *Les tétraèdres* T *et* T″ *sont orthocentriques.*
Car

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Second exemple. Théorème. — *Avec quatre segments rectilignes ayant pour mesures* a, b, c, d, *on construit les tétraèdres*

$$T_1 \equiv O_1A_1B_1C_1, \quad T_2 \equiv O_2A_2B_2C_2, \quad T_3 \equiv O_3A_3B_3C_3, \quad T_4 \equiv O_4A_4B_4C_4,$$

trirectangles en O_1, O_2, O_3, O_4 *et ayant pour arêtes*

$$(O_1A_1 = a,\ O_1B_1 = b,\ O_1C_1 = c), \quad (O_2A_2 = b,\ O_2B_2 = c,\ O_2C_2 = d),$$
$$(O_3A_3 = c,\ O_3B_3 = d,\ O_3C_3 = a), \quad (O_4A_4 = d,\ O_4B_4 = a,\ O_4C_4 = b).$$

On peut toujours construire avec les segments rectilignes

$$OA = B_3C_3, \qquad OB = A_2C_2, \qquad OC = A_3B_3,$$
$$BC = B_1C_1, \qquad CA = C_1A_1, \qquad AB = A_1B_1,$$

un tétraèdre T ≡ OABC *dont les arêtes opposées sont rectangulaires et dont les faces sont des triangles acutangles.*

Il suffira, par exemple, d'établir les conditions

$$(1) \qquad BC + CA > AB > |BC - CA|,$$
$$(2) \qquad OA + OB > AB > |OA - OB|.$$

Or, les triangles ABC et OAB ayant pour côtés

$$a_1 = BC = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad b_1 = CA = \sqrt{c^2 + a^2}, \quad c_1 = AB = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$a'_1 = OA = \sqrt{a^2 + d^2}, \quad b'_1 = OB = \sqrt{b^2 + d^2}, \quad c'_1 = AB = \sqrt{a^2 + b^2},$$

on a, d'abord,

$$\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} > a + b > \sqrt{a^2 + b^2} = AB,$$
$$\left|\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{c^2 + a^2}\right| = \frac{(a + b).|a - b|}{\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}} < |a - b| < \sqrt{a^2 + b^2};$$

ensuite,

$$\sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{b^2 + d^2} > a + b > \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$\left|\sqrt{a^2 + d^2} - \sqrt{b^2 + d^2}\right| = \frac{(a + b).|a - b|}{\sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{b^2 + d^2}} < |a - b| < \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Les conditions (1) et (2) étant remplies et, par analogie, celles relatives aux autres segments, le tétraèdre T ≡ OABC est complètement déterminé. Les arêtes opposées sont rectangulaires, car

$$\overline{BC}^2 + \overline{OA}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \overline{CA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OC}^2,$$

et les triangles de ses faces sont tous acutangles, le carré d'un quelconque de leurs côtés étant plus petit que la somme des carrés des deux autres.

Autres propriétés du tétraèdre T ≡ OABC. Théorème. — *La somme des carrés des aires* O, A, B, C *des faces du tétraèdre* T *est égale à la demi-somme des carrés des aires des faces des tétraèdres* T_1, T_2, T_3, T_4.

D'après un théorème connu, dans un tétraèdre orthocentrique T, on a

$$4(O^2 + A^2 + B^2 + C^2) = (a_1 a'_1)^2 + (b_1 b'_1)^2 + (c_1 c'_1)^2.$$

Dans le cas présent,

$$(a_1 a'_1)^2 = (b^2 + c^2)(a^2 + d^2), \qquad (b_1 b'_1)^2 = (c^2 + a^2).(b^2 + d^2),$$
$$(c_1 c'_1)^2 = (a^2 + b^2).(c^2 + d^2);$$

de sorte que

$$\begin{aligned} O^2 + A^2 + B^2 + C^2 &= 2(\overline{O_1B_1C_1}^2 + \overline{O_1C_1A_1}^2 + \overline{O_1A_1B_1}^2 \\ &\qquad + \overline{O_2A_2C_2}^2 + \overline{O_3A_3B_3}^2 + \overline{O_3B_3C_3}^2) \\ &= \Sigma(\overline{O_1B_1C_1}^2 + \overline{O_1C_1A_1}^2 + \overline{O_1A_1B_1}^2) \\ &= \frac{1}{2}\Sigma(\overline{O_1B_1C_1}^2 + \overline{O_1C_1A_1}^2 + \overline{O_1A_1B_1}^2 + \overline{A_1B_1C_1}^2), \end{aligned}$$

car, dans le tétraèdre trirectangle $O_1A_1B_1C_1$,

$$\overline{O_1B_1C_1}^2 + \overline{O_1C_1A_1}^2 + \overline{O_1A_1B_1}^2 = \overline{A_1B_1C_1}^2.$$

THÉORÈME. — *Les bihauteurs qui correspondent aux arêtes opposées* OA *et* BC, OB *et* CA, OC *et* AB *du tétraèdre* T *sont respectivement égales aux hypoténuses des trois triangles rectangles ayant pour côtés de l'angle droit les hauteurs* O_1O_1' *et* O_3O_3', O_1O_1'' *et* O_2O_2', O_1O_1''' *et* O_2O_2'' *des triangles* $O_1B_1C_1$ *et* $O_3B_3C_3$, $O_1C_1A_1$ *et* $O_2C_2A_2$, $O_1A_1B_1$ *et* $O_2B_2C_2$, *et réciproquement.*

Car, en désignant par δ_a, δ_b, δ_c les plus courtes distances des arêtes OA et BC, OB et CA, OC et AB (bihauteurs) d'un tétraèdre orthocentrique OABC, on sait que

$$4\delta_a^2 = (a_1'^2 + c_1'^2 - b_1'^2)(a_1'^2 - c_1'^2 + b_1'^2) + (a_1^2 + b_1'^2 - c_1'^2)(a_1^2 - b_1'^2 + c_1'^2).$$

Dans le cas actuel, cette relation se réduit aux suivantes :

$$(3) \qquad \delta_a^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2d^2}{a^2+d^2} = \overline{O_1O_1'}^2 + \overline{O_3O_3'}^2,$$

et des permutations circulaires convenables sur les lettres a, b, c, d donnent les formules analogues pour δ_b^2, δ_c^2.

THÉORÈME. — *Le carré du volume* V *du tétraèdre* T *équivaut à la somme des carrés des volumes* V_1, V_2, V_3, V_4 *des tétraèdres* T_1, T_2, T_3, T_4.

Le volume du tétraèdre orthocentrique T étant égal au sixième du produit de deux arêtes opposées par leur plus courte distance, on obtient, en vertu des égalités (3),

$$\begin{aligned} 36V^2 = (a_1a_1'\delta_a)^2 &= (b^2+c^2)(a^2+d^2)\cdot\left(\frac{b^2c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2d^2}{a^2+d^2}\right) \\ &= a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + a^2b^2d^2 + c^2a^2d^2, \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$(4) \qquad V^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2,$$

et la proposition est démontrée.

N. B. — L'égalité (4) constitue une extension du théorème de PYTHAGORE relatif à un triangle rectangle au tétraèdre orthocentrique OABC dans lequel on constate que les faces ABC, OBC, OCA, OAB sont égales aux bases $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$ des tétraèdres trirectangles T_1, T_2, T_3, T_4 qu'on lui associe.

Plus généralement, étant donné un tétraèdre orthocentrique $T \equiv ABCD$, d'orthocentre H, dont les faces sont des triangles acutangles, si on le borde des tétraèdres

$$T_a \equiv A_1BCD, \quad T_b \equiv B_1CDA, \quad T_c \equiv C_1DAB, \quad T_d \equiv D_1ABC$$

trirectangles en leurs sommets A_1, B_1, C_1, D_1 situés sur les hauteurs AA_h, BB_h, CC_h, DD_h du tétraèdre T, on obtient les propositions suivantes :

THÉORÈME. — *La somme des carrés des aires des faces du tétraèdre* T *est égale à la demi-somme des carrés des aires des faces des tétraèdres* T_i.

Car dans chacun des tétraèdres trirectangles T_i, les carrés des aires des faces BCD, CDA, DAB, ABC sont égaux à la somme des carrés de celles qui se rencontrent aux sommets A_1, B_1, C_1, D_1.

THÉORÈME. — *Le carré du volume* V *du tétraèdre* T *équivaut à la somme des carrés des volumes* V_i *des tétraèdres* T_i.

Si l'on désigne par D_2, D_3 les points où la hauteur DA′ du triangle BCD rencontre le côté BC, le cercle BCD et la sphère (O, R) circonscrite au tétraèdre T, le triangle DD_2A_1, rectangle en A_1, donne

$$(5) \qquad \overline{A'A_1}^2 = DA'.A'D_2 = \frac{1}{2}\,DA'.A'D_3 = A'H.A'A,$$

car $A_3A' = 2A'H$, A_3 étant le point où la hauteur AA′ recoupe la sphère (O, R).

D'autre part, les tétraèdres T, T_a, HBCD ayant une base commune BCD, leurs volumes sont proportionnels à leurs hauteurs A_hA, A_1A_h, A_hH et, en vertu des égalités (5), le volume du tétraèdre T_a est moyen proportionnel à ceux des tétraèdres T et HBCD. La même relation a lieu pour les tétraèdres T_b, T_c, T_d et les tétraèdres T et HCDA, T et HDAB, T et HABC. Donc

$$V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 + V_d^2 = V.(HBCD + HCDA + HDAB + HABC) = V^2,$$

et le théorème est démontré.

AUTRES PROPRIÉTÉS DU TÉTRAÈDRE T″. GÉNÉRALITÉS. — Les droites joignant le sommet D d'un tétraèdre $T_2 \equiv DA_2B_2C_2$ aux milieux A, B, C des côtés B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 déterminent un tétraèdre

$T \equiv DABC$ dont on désigne les bimédianes $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ par les lettres l, m, n; ces bimédianes sont les transformées des arêtes DA_2, DB_2, DC_2 du tétraèdre T_2 dans les homothéties de centres A, B, C et de rapport $\frac{1}{2}$.

1° Soient θ_1, θ_2, θ_3 les angles des faces des trièdres égaux de sommets D et G des deux tétraèdres T_2 et $GA_1B_1C_1$. Il résulte des relations

$$\overline{B_2C_2}^2 = \overline{DB_2}^2 + \overline{DC_2}^2 - 2BD_2 . DC_2 \cos\theta_1,$$
$$\overline{B_2C_2}^2 = 2\overline{DB_2}^2 + 2\overline{DC_2}^2 - 4\overline{DA}^2$$

et de leurs analogues que

$$(1) \quad 4mn\cos\theta_1 = a'^2 - a^2, \quad 4nl\cos\theta_2 = b'^2 - b^2, \quad 4lm\cos\theta_3 = c'^2 - c^2.$$

Le volume V du tétraèdre T étant le quart de celui du tétraèdre T_2,

$$(2) \quad V = \frac{1}{3} lmn\Delta = \frac{\Delta}{24}\left[(a'^2 - a^2)(b'^2 - b^2)(c'^2 - c^2)\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\right]^{\frac{1}{2}};$$

Δ est le sinus des trièdres égaux D $(A_2B_2C_2)$, G $(A_1B_1C_1)$, de telle sorte que

$$(3) \quad \Delta^2 = 1 - \cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_3 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3.$$

2° Si l'on désigne par θ_a, θ_b, θ_c les angles des couples d'arêtes opposées BC et DA, CA et DB, AB et DC du tétraèdre T, en égalant deux expressions de l'aire du parallélogramme $B_1C_1B'_1C'_1$, on obtient la relation

$$B_1C_1 . B'_1C'_1 \sin\theta_a = \frac{1}{2} B_1B'_1 . C_1C'_1 \sin\theta_1,$$

et il en résulte que

$$(4) \quad \sin\theta_1 = \frac{aa'\sin\theta_a}{2mn}, \quad \sin\theta_2 = \frac{bb'\sin\theta_b}{2nl}, \quad \sin\theta_3 = \frac{cc'\sin\theta_c}{2lm}$$

3° Si d_a, d_b, d_c sont les plus courtes distances des arêtes opposées précitées du tétraèdre T, on sait que

$$(5) \quad V = \frac{1}{6} aa'd_a \sin\theta_a = \frac{1}{6} bb'd_b \sin\theta_b = \frac{1}{6} cc'd_c \sin\theta_c,$$

et l'on en déduit, par rapprochement avec les relations (4), que

$$(6) \quad \frac{d_a \sin\theta_1}{l} = \frac{d_b \sin\theta_2}{m} = \frac{d_c \sin\theta_3}{n} = \Delta.$$

Or, d'après un théorème connu,

$$\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 = \frac{\Delta^2}{\Delta'}, \tag{7}$$

si Δ' est le sinus du trièdre supplémentaire du trièdre D $(A_2B_2C_2)$. Donc, en vertu des égalités (6),

$$d_a d_b d_c = \Delta\Delta' lmn. \tag{8}$$

4° Lorsque $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$,

$$\frac{d_a}{l} = \frac{d_b}{m} = \frac{d_c}{n} = \frac{\Delta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\left[1 - (3 - 2\cos\theta)\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Donc, si le tétraèdre T_2 est trirectangle en D,

$$d_a = l, \quad d_b = m, \quad d_c = n. \tag{10}$$

Lorsque le tétraèdre $T \equiv ABCD$ est orthocentrique et que

$$l = m = n = \lambda,$$

on a

$$\frac{aa'}{\sin\theta_1} = \frac{bb'}{\sin\theta_2} = \frac{cc'}{\sin\theta_3} = \frac{6V}{\lambda\Delta};$$

dans cette hypothèse, les rayons

$$\rho_1 = \frac{6V}{\lambda\Delta a'}, \qquad \rho_2 = \frac{6V}{\lambda\Delta b'}, \qquad \rho_3 = \frac{6V}{\lambda\Delta c'},$$

des cercles circonscrits aux faces DB_2C_2, DC_2A_2, DA_2B_2 du tétraèdre T_2 sont inversement proportionnels aux médianes $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$ de ces faces.

Application au tétraèdre T″. Il résulte de ces propriétés que nous venons de démontrer que les bimédianes a_1a_1', b_1b_1', c_1c_1' du tétraèdre T″ sont égales à celles A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' du tétraèdre T et forment au centre de gravité G″ du tétraèdre T″, un trièdre dont les faces sont égales aux suppléments des faces θ_1, θ_2, θ_3 du tétraèdre G $(A_1B_1C_1)$. Donc si V″ et Δ'' sont le volume du tétraèdre T″ et le sinus du trièdre $G''a_1'b_1'c_1'$, il résulte des formules déjà démontrées, que

$$\Delta''^2 = 1 - \cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_3 - 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3.$$

$$\Delta^2 - \Delta''^2 = 4\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3,$$

$$V^2 - V''^2 = \frac{1}{9} l^2m^2n^2(\Delta^2 - \Delta''^2) = \frac{4}{9} l^2m^2n^2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 \tag{11}$$

$$= \frac{1}{144}(a'^2 - a^2)(b'^2 - b^2)(c'^2 - c^2).$$

Dans le cas particulier où $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$,

$$(12) \qquad \Delta^2 = 4\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3, \quad V = \frac{2}{3}\,lmn\,(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Le tétraèdre T″ dégénère en un quadrangle plan A″B″C″D″ — Dans le cas particulier que nous venons d'invoquer, et si les tétraèdres T et T″ sont transmutables,

$$(13) \qquad \Delta'' = 0, \quad V'' = 0, \quad V^2 = \frac{1}{144}(a'^2 - a^2)(b'^2 - b^2)(c'^2 - c^2),$$

le tétraèdre T″ dégénère en un quadrangle plan A″B″C″D″.

Exemple remarquable. — Il s'agit du tétraèdre $T \equiv ABCD$ associé à un tétraèdre équifacial $T_2 \equiv DA_2B_2C_2$ dans lequel les faces $\theta_1 = B_2DC_2$, $\theta_2 = C_2DA_2$, $\theta_3 = A_2DB_2$ sont les angles A, B, C du triangle formant la face ABC du tétraèdre T ainsi que les angles A_1, B_1, C_1 et A_2, B_2, C_2 des triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$. Les arêtes opposées DA_2 et B_2C_2, DB_2 et C_2A_2, DC_2 et A_2B_2 étant égales entre elles, le tétraèdre $DA_3B_3C_3$ dont les sommets A_3, B_3, C_3 sont confondus avec ceux du triangle anticomplémentaire du triangle $A_2B_2C_2$ est trirectangle en D et son transformé GABC par l'homothétie $\left(G_d, \frac{1}{4}\right)$ est trirectangle en G. *Les médianes* AG_a, BG_b, CG_c *du tétraèdre* T *sont donc rectangulaires deux à deux en son centre de gravité* G.

Soient m_a, m_b, m_c les médianes AA_1, BB_1, CC_1 du triangle ABC. On a l'ensemble des relations

$$(14) \qquad DA_2 = B_2C_2 = 2a, \quad DB_2 = C_2A_2 = 2b, \quad DC_2 = A_2B_2 = 2c,$$

$$(15) \qquad A_1A_1' = \frac{1}{2}DA_2 = a, \quad B_1B_1' = \frac{1}{2}DB_2 = b, \quad C_1C_1' = \frac{1}{2}DC_2 = c,$$

$$(16) \qquad DA = a' = 2m_a = AA_2, \quad DB = b' = 2m_b = BB_2,$$
$$DC = c' = 2m_c = CC_2.$$

Voici d'autre part, les propriétés suivantes du tétraèdre T :

1° On a les relations

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$V^2 = \frac{4}{9}a^2b^2c^2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 = \frac{1}{144}(a'^2 - a^2)(b'^2 - b^2)(c'^2 - c^2).$$

La première relation se déduit des égalités (14) à (16); les autres, qui proviennent des formules (12) et (13), expriment aussi que *le*

volume du tétraèdre T *est double de celui du tétraèdre équifacial construit sur le triangle* ABC.

2° *Les parallélogrammes* $B_1C_1B'_1C'_1$, $C_1A_1C'_1A'_1$, $A_1B_1A'_1B'_1$ *sont équivalents au triangle* ABC *et une de leurs hauteurs est égale à une des hauteurs de ce triangle.*

En effet, dans le cas actuel, les angles θ_1, θ_2, θ_3 des diagonales de ces parallélogrammes étant égaux aux angles A, B, C du triangle ABC ou à leurs suppléments, il résulte des égalités d'aires

$$\frac{1}{2} B_1B'_1 . C_1C'_1 \sin\theta_1 = \frac{1}{2} bc \sin A = \text{aire ABC},$$

que la hauteur $C'_1C''_1$ du parallélogramme $B_1C_1B'_1C'_1$ relative à la base B_1C_1 est égale à la hauteur $AA' = h'_a$ du triangle ABC.

3° *On a la relation*

$$A^2 + B^2 + C^2 = 11D^2$$

entre les carrés des aires des faces du tétraèdre T *opposées aux sommets* A, B, C, D.

D'après un théorème connu, dans tout tétraèdre,

$$4(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) = (aa' \sin\theta_a)^2 + (bb' \sin\theta_b)^2 + (cc' \sin\theta_c)^2.$$

Or, dans le cas présent,

$$4D = 4B_1C_1B'_1C'_1 = aa' \sin\theta_a = bb' \sin\theta_b = cc' \sin\theta_c;$$

donc

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 12\,D^2.$$

4° *Les plus courtes distances des arêtes opposées sont égales à la moitié de la hauteur* DD_h *du tétraèdre* T *(ou au diamètre de la sphère inscrite au tétraèdre* $DA_2B_2C_2$).

En effet, en vertu des relations (6),

$$d_a = \frac{l\Delta}{\sin\theta_1} = \frac{a\Delta}{\sin A} = \frac{3V}{bc \sin A} = \frac{1}{2} DD_h = d_b = d_c.$$

D'autre part, le tétraèdre $DA_2B_2C_2$ est équifacial, la hauteur DD_h vaut deux fois le diamètre de la sphère inscrite.

5° *Les angles* θ_a, θ_b, θ_c *des arêtes opposées du tétraèdre* T *sont égaux respectivement à l'un des angles formés par les médianes* AA_1, BB_1, CC_1 *avec les côtés correspondants* BC, CA, AB *du triangle* ABC *et on a la relation*

$$\operatorname{cotg}\theta_a + \operatorname{cotg}\theta_b + \operatorname{cotg}\theta_c = 0.$$

Cela résulte de ce que, en vertu du 1°,

$$\sin\theta_a = \frac{C_1C_1''}{C_1B_1'} = \frac{2C_1C_1''}{DA} = \frac{2h_a'}{a'} = \frac{h_a'}{m_a}.$$

N. B. — Les hauteurs B_1B_1''', C_1C_1''', A_1A_1''' des parallélogrammes $B_1C_1B_1'C_1'$, $C_1A_1C_1'A_1'$, $A_1B_1A_1'B_1'$ relatives aux bases B_1C_1', C_1A_1', A_1B_1' ont pour mesures

$$B_1B_1''' = \frac{1}{2}B_1'C_1'\sin\theta_a = \frac{1}{2}a\sin\theta_a = \frac{D}{m_a}, \quad C_1C_1''' = \frac{D}{m_b}, \quad A_1A_1''' = \frac{D}{m_c}.$$

6° *Le parallélépipède* (P) *dont chacune des faces contient une arête du tétraèdre* T *est équifacial et circonscrit à la sphère inscrite au tétraèdre* $T_2 \equiv DA_2B_2C_2$.

En effet, les hauteurs du parallélépipède circonscrit (P) sont égales aux plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre T et le centre de symétrie de (P) coïncide avec le centre de gravité G des tétraèdres T et T_2. Or, celui-ci se confond avec le centre de la sphère inscrite au tétraèdre équifacial T_2 dont le rayon est le quart de la hauteur DD_h, c'est-à-dire la moitié des plus courtes distances d_a, d_b, d_c des arêtes opposées du tétraèdre T.

7° *Si l'on permute les arêtes opposées* DA *et* BC, DB *et* CA, DC *et* AB *du tétraèdre* T, *on obtient un quadrangle plan* A″B″C″D″ *dans lequel*

$$B''C'' = 2m_a,\ C''A'' = 2m_b,\ A''B'' = 2m_c,\ D''A'' = a,\ D''B'' = b,\ D''C'' = c,$$

et dont le sommet D″ *coïncide avec le barycentre des sommets* A″, B″, C″, *et réciproquement.*

D'abord, les relations (1) sont vérifiées, car on a

$$|b'-c'| = |BB_2 - CC_2| < AB + B_2A - (CA + AC_2) < |AB - AC| < BC, \ldots$$
$$|b-c| = |BA_2 - AB| < AA_2 = DA = a', \ldots$$

De plus,

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = A + B + C = \pi.$$

N. B. — Cette propriété constitue un complément au problème des transmutations des éléments d'un triangle; en construisant le quadrangle A″B″C″D″ avec les côtés et les médianes d'un triangle acutangle ABC, on obtient au moyen des transmutations prévues le tétraèdre spécial $T \equiv ABCD$.

46. Tétraèdre isogone généralisé. — 1. Si l'on considère un tétraèdre $t' \equiv a'b'c'd'$ circonscrit à une sphère (i) tangente aux plans

$b'c'd'$, $c'd'a'$, $d'a'b'$, $a'b'c'$ en a, b, c, d, tel que les droites aa', bb', cc', dd' soient concourantes (*tétraèdre isogone*), et que l'on transforme les éléments de cette figure par polaires réciproques relativement à une sphère (F), de centre F, la sphère (i) devient une quadrique de révolution Q dont le foyer principal coïncide avec le point F, les tétraèdres t' et $t \equiv abcd$ deviennent respectivement un tétraèdre $T' \equiv A'B'C'D'$ inscrit à la quadrique Q et son tétraèdre tangentiel $T \equiv ABCD$. Le tétraèdre isogone t' et le tétraèdre isodynamique t étant homologiques, il en est de même de leurs polaires réciproques T′ et T, et réciproquement.

D'autre part, les sommets A_1, B_1, C_1, D_1 du tétraèdre podaire T_1 du point F par rapport au tétraèdre T étant les inverses des sommets a, b, c, d du tétraèdre t par rapport à (F), le tétraèdre T_1 est isodynamique comme t, et réciproquement. Le tétraèdre T'_1 du second foyer F′ de la quadrique Q est également isodynamique, car il est homothétique au tétraèdre dont les sommets sont les inverses de ceux du tétraèdre T_1 dans une inversion de pôle F. D'où cette proposition :

Si un tétraèdre T *circonscrit à une quadrique de révolution* Q *est homologique avec le tétraèdre ayant pour sommets les points de contact des plans des faces du premier avec la quadrique, les tétraèdres podaires des foyers* F *et* F′ *de celle-ci, par rapport au tétraèdre fondamental, sont isodynamiques, et réciproquement.*

2. Si l'on désigne par a, a', b, b', c, c' les mesures des arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC de ce tétraèdre spécial T et celles des dièdres suivant ces arêtes, par α et α', β et β', γ et γ' les projections orthogonales du foyer F de la quadrique sur les arêtes opposées BC et DA, CA et DB, AB et DC, on obtient, de proche en proche,

$$BC.F\alpha.DA.F\alpha' = \frac{aa'}{\sin a \sin a'} \cdot D_1A_1.B_1C_1 = \frac{4A.B.C.D}{9V^2} \cdot D_1A_1.B_1C_1$$
$$= k.D_1A_1.B_1C_1 = k.D_1B_1.C_1A_1 = k.D_1C_1.A_1B_1,$$

car $$F\alpha = D_1A_1 \sin a, \qquad F\alpha' = B_1C_1 \sin a'.$$

Par suite, *les produits* FBC.FDA, FCA.FDB, FAB.FDC *des aires des triangles ayant pour sommet commun* F *et pour bases deux arêtes opposées du tétraèdre* T *sont égaux, ainsi que les produits des sinus des angles sous lesquels deux arêtes opposées sont vues du point* F.

Enfin, si l'on représente par (x, y, z, t), (x', y', z', t') les coordonnées normales absolues des foyers F, F′ de la quadrique Q par rapport au tétraèdre T, par A″, B″, C″, D″ les projections orthogonales des points A′, B′, C′, D′ sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC, et que l'on

pose

$$xx' = yy' = zz' = tt' = \lambda,$$

on constate que

$$xt(x + x') . A'A'' = \lambda . \overline{D_1A_1}^2 = tx(t + t') . D'D'',$$
$$yz(y + y') . B'B'' = \lambda . \overline{B_1C_1}^2 = zy(z + z') . C'C'',$$

car les points A′, B′, C′, D′ divisent les distances des sommets correspondants des tétraèdres podaires des points F et F′ dans les rapports $x : x'$, $y : y'$, $z : z'$, $t : t'$.

Dès lors, *les trois produits de quatre des coordonnées normales absolues des points de contact* A′, B′, C′, D′ *de la quadrique* Q *avec les faces du tétraèdre* T, *convenablement associées, sont égaux entre eux.*

47. Tétraèdres bilogiques particuliers. — Il s'agit, par exemple, du tétraèdre particulier T ≡ ABCD pour lequel les perpendiculaires abaissées des centres des sphères (I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c), (I_d, r_d) inscrites dans les trièdres tronqués sur les plans des faces opposées sont concourantes, de sorte que les tétraèdres T et $T_1 \equiv I_aI_bI_cI_d$ sont bilogiques.

1. Si les perpendiculaires abaissées des points I_a et I_b sur les plans des faces BCD et ACD se rencontrent, le plan qui les contient est perpendiculaire à l'arête CD ; par suite la droite I_aI_b est perpendiculaire à CD et, se trouvant dans le plan bissecteur extérieur du dièdre CD et perpendiculaire à son arête, elle est perpendiculaire au plan bissecteur intérieur de ce dièdre CD. Comme la droite I_aI_b se trouve dans le plan bissecteur intérieur du dièdre AB, *les plans bissecteurs intérieurs des dièdres* AB *et* CD *sont perpendiculaires ainsi que les droites* I_cI_d *et* I_aI_b qui leur sont respectivement perpendiculaires et l'intersection de ces deux plans bissecteurs, qui passe par le centre de la sphère inscrite (I, r) au tétraèdre T, se confond avec la perpendiculaire commune aux arêtes opposées I_aI_b et I_cI_d du tétraèdre T_1. Ces propriétés ayant lieu pour les autres couples d'arêtes, on en déduit cette proposition :

Le tétraèdre T_1 *est orthocentrique, son orthocentre étant confondu avec le centre de la sphère inscrite au tétraèdre* T.

Par suite, comme les droites AI, BI, CI, DI sont aussi perpendiculaires aux plans des faces du tétraèdre T″ ≡ A″B″C″D″ dont les sommets coïncident avec les points de contact de la sphère (I, r) sur les faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre T, *les tétraèdres* T_1 *et* T″ *sont homothétiques et le tétraèdre* T″ *est aussi orthocentrique, son orthocentre* H″ *étant le transformé du point* I *dans cette homothétie.*

En conséquence, des égalités

$$(1)\quad \overline{D''A''}^2 = \overline{ID''}^2 + \overline{IA''}^2 - 2ID''.IA''\cos(\pi - a) = 2r^2(1+\cos a),$$
$$\overline{B''C''}^2 = 2r^2(1+\cos a'), \qquad \overline{D''B''}^2 = 2r^2(1+\cos b),$$
$$\overline{C''A''}^2 = 2r^2(1+\cos b'), \qquad \overline{D''C''}^2 = 2r^2(1+\cos c),$$
$$\overline{A''B''}^2 = 2r^2(1+\cos c'),$$

résultent les relations

$$(2)\qquad \cos a + \cos a' = \cos b + \cos b' = \cos c + \cos c'$$

entre les cosinus des dièdres du tétraèdre T, lesquelles entraînent nécessairement les égalités

$$\overline{B''C''}^2 + \overline{D''A''}^2 = \overline{C''A''}^2 + \overline{D''B''}^2 = \overline{A''B''}^2 + \overline{D''C''}^2.$$

Coordonnées du point H″. — Les coordonnées tétraédriques normales du point A″ par rapport au tétraèdre T sont telles que

$$\frac{1+\cos c'}{x} = \frac{1+\cos b'}{z} = \frac{1+\cos a}{t} = \frac{1}{r},$$

et les hauteurs A″H″, B″H″, C″H″, D″H″ du tétraèdre T″ ont pour équations

$$y - r(1+\cos c') = z - r(1+\cos b') = t - r(1+\cos a),$$
$$x - r(1+\cos c') = z - r(1+\cos a') = t - r(1+\cos b),$$
$$x - r(1+\cos b') = y - r(1+\cos a') = t - r(1+\cos c),$$
$$x - r(1+\cos a) = y - r(1+\cos b) = z - r(1+\cos c).$$

Ces quatre droites passent par H″ et les coordonnées de ce point sont

$$x = \frac{r}{2}(1+\cos c' + \cos b' + \cos a), \qquad y = \frac{r}{2}(1+\cos c' + \cos a' + \cos b),$$
$$z = \frac{r}{2}(1+\cos b' + \cos a' + \cos c), \qquad t = \frac{r}{2}(1+\cos a + \cos b + \cos c).$$

2. Puisque les plans BCD, CDA, DAB, ABC sont perpendiculaires aux rayons A″I, B″I, C″I, D″I de la sphère (I, r), les plans menés par les points I_a, I_b, I_c, I_d parallèlement aux premiers, sont tangents à la sphère (I_1, r_1) circonscrite au tétraèdre T_1 homothétique au tétraèdre T″, et l'orthocentre H″ de ce dernier est sur la droite I_1I qui coïncide avec les droites d'Euler des tétraèdres T_1 et T″.

Les centres d'orthologie de ces tétraèdres sont donc confondus avec les centres I et I_1 de leurs sphères circonscrites.

D'autre part, les distances du centre S d'homothétie des tétraèdres T_1 et T″ aux plans des faces du tétraèdre T étant propor-

tionnelles à r_a, r_b, r_c, r_d, le point S coïncide avec le conjugué isogonal, par rapport au tétraèdre T, du centre de l'ellipsoïde de NAGEL de ce tétraèdre.

3. Soient (H) l'hyperboloïde des hauteurs du tétraèdre T, (H_1) l'hyperboloïde ayant pour génératrices les droites AA″, BB″, CC″, DD″, (H_2) celui dont les génératrices sont les droites AA_a, BB_b, CC_c, DD_d qui joignent les sommets aux points de contact des sphères (I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c), (I_d, r_d) sur les faces opposées du tétraèdre T intérieurement à celles-ci.

Les tétraèdres T et T_1 étant bilogiques, il est clair que la droite I_1I rencontre, à la fois, les quaternes (AA_h, BB_h, CC_h, DD_h), (AA″, BB″, CC″, DD″), (AA_a, BB_b, CC_c, DD_d), et on en déduit que :

Le centre I *de la sphère inscrite au tétraèdre* T *est situé sur les trois hyperboloïdes* (H), (H_1), (H_2) *qui ont une génératrice commune* I_1I.

N. B. — Comme le centre de la sphère (I, r) est sur (H), on peut ajouter que *les plans menés par le point* I *perpendiculairement aux arêtes du tétraèdre* T *coupent les arêtes opposées en six points coplanaires.*

4. Le tétraèdre T_1 étant orthocentrique, ses hauteurs II_a, II_b, II_c, II_d qui sont confondues avec les droites IA, IB, IC, ID, forment un quadrarête orthocentrique, c'est-à-dire tel que le plan contenant deux de ces droites est perpendiculaire au plan des deux autres. *Le point* I *est donc situé sur la biquadratique de* SCHRÖTER $\mathcal{B}$ *du tétraèdre* T, intersection commune des trois hyperboloïdes orthogonaux lieux des arêtes des dièdres droits passant par deux arêtes opposées, et de l'hyperboloïde (H).

AUTRES EXEMPLES. — En procédant comme nous venons de le faire pour les tétraèdres podaires des centres I_1, I_2, I_3 des sphères des combles d'un tétraèdre $T \equiv ABCD$, quand elles existent, on constate que si l'un de ces tétraèdres podaires est orthocentrique, le tétraèdre $T_1 = I_aI_bI_cI_d$ est orthocentrique et les tétraèdres T et T_1 sont bilogiques, mais leurs sommets correspondants sont alors ceux qui sont alignés sur le centre de la sphère considérée.

D'autre part, *la somme des cosinus de deux dièdres opposés est la même pour deux couples, égale et de signe contraire pour le troisième,* et *le centre de la sphère des combles considérée est situé sur l'hyperboloïde* (H) *et sur la biquadratique* $\mathcal{B}$.

Enfin lorsque le tétraèdre podaire de l'un ces centres I_i des sphères exinscrites dans les trièdres tronqués d'un tétraèdre T est orthocentrique, il en est ainsi pour le tétraèdre $T_2 \equiv I_1I_2I_3$ et les tétraèdres T et T_2 sont bilogiques.

Dans ce tétraèdre spécial, *les différences des cosinus de deux dièdres opposés sont égales et le centre considéré* I_i *appartient à l'hyperboloïde* (H) *et à la biquadratique* $\mathcal{B}$.

Ainsi, lorsque A_3, B_3, C_3, D_3 sont les contacts de la sphère (I_a, r_a) avec les plans BCD, CDA, DAB, ABC, les conditions

$$|\cos a - \cos a'| = |\cos b - \cos b'| = |\cos c - \cos c'|,$$

expriment que le tétraèdre $A_3B_3C_3D_3$ est orthocentrique et si, de plus,

$$1 = \cos a + \cos b' + \cos c',$$

ce tétraèdre est trirectangle en A_3, le tétraèdre T est équifacial et réciproquement.

Généralisation. — Pour que le tétraèdre podaire $A''B''C''D''$ d'un point P, par rapport à un tétraèdre $T \equiv ABCD$ soit orthocentrique, il faut et il suffit que l'on ait

$$\overline{A''B''}^2 + \overline{D''C''}^2 = \overline{A''C''}^2 + \overline{D''B''}^2 = \overline{A''D''}^2 + \overline{B''C''}^2,$$

ou, avec les notations usuelles, les égalités

$$xy \cos c' + zt \cos c = xz \cos b' + yt \cos b = xt \cos a + yz \cos a',$$

représentant l'équation en coordonnées tétraèdriques normales rapportées au tétraèdre T, d'une biquadratique qui se réduit à la biquadratique de Schröter quand le point P coïncide avec le centre d'une des sphères quadritangentes du tétraèdre fondamental, et si

$$\pm \cos c \pm \cos c' = \pm \cos b \pm \cos b' = \pm \cos a \pm \cos a'.$$

47'. Tétraèdres supplémentaires. — 1. *Définition.* — Deux trièdres supplémentaires $D(xyz)$ et $D(x'y'z')$ étant coupés par un plan arbitraire (P) qui rencontre les arêtes Dx, Dy, Dz en A, B, C et les arêtes Dx', Dy', Dz', en A', B', C', on peut dire que le tétraèdre $(D) \equiv DA'B'C'$ et le tétraèdre $T \equiv DABC$ sont supplémentaires. Au tétraèdre T peuvent être associés quatre tétraèdres supplémentaires (A), (B), (C), $(D) \equiv DA'B'C'$, de sommets A, B, C, D, dont les faces opposées à ces sommets sont dans les plans BCD, CDA, DAB, ABC.

Cette configuration constitue une analogie avec celle qui est formée par deux triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha\beta'\gamma'$ dont les bases $\beta\gamma$ et $\beta'\gamma'$ sont alignées, les côtés $\alpha\gamma$ et $\alpha\beta'$ étant rectangulaires ainsi que $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma'$.

2. *Les triangles des faces* ABC *et* A'B'C' *des tétraèdres* T *et* (D) *sont bilogiques.*

Les plans DAA', DBB', DCC' coïncident avec les plans hauteurs

des tétraèdres T, (D) et passent par une même droite DM qui rencontre le plan (P) en un point M en lequel concourent les droites AA′, BB′, CC′.

D'autre part, si l'on désigne par D′ le pied de la hauteur DD′ commune à T, (D), le plan A′DD′, perpendiculaire à la fois aux plans DBC et (P), est normal à l'arête BC, de sorte que A′D′ et, par analogie, B′D′, C′D′ sont perpendiculaires à BC, CA, AB. Les triangles ABC, A′B′C′ sont orthologiques, ce qui achève de démontrer le théorème.

Corollaires. — 1° *Les trois produits*

$$D'A' \cdot D'A'', \quad D'B' \cdot D'B'', \quad D'C' \cdot D'C''$$

des distances du point D′ *aux sommets du triangle* A′B′C′ *et aux projections orthogonales de ces sommets sur les côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC *sont égaux et négatifs.*

Car le triangle DA′A″, par exemple, est rectangle en D, ce qui donne, d'abord,

$$D'A' \cdot D'A'' = D'B' \cdot D'B'' = D'C' \cdot D'C'' = -\overline{D'D}^2,$$

ensuite, symétriquement,

$$D'A \cdot D'A''' = D'B \cdot D'B''' = D'C \cdot D'C''' = -\overline{D'D}^2,$$

A‴, B‴, C‴ étant les projections orthogonales de A, B, C sur B′C′, C′A′, A′B′.

Conséquences. — Les triangles ABC et A′B′C′ sont polaires réciproques par rapport à un cercle de centre réel D′ et de rayon imaginaire $\sqrt{-\overline{D'D}^2}$; ils sont donc homologiques.

Cette homologie permet de dire que les points de rencontre des plans DB′C′, DC′A′, DA′B′ perpendiculaires aux arêtes DA, DB, DC avec BC, CA, AB sont alignés [1]. La même propriété a lieu lorsque le sommet D est remplacé par un point quelconque de la droite DD′, car cette configuration est la transformée de la première par une homothétie de centre D′. Enfin la collinéarité a lieu en partant d'un point arbitraire situé sur l'hyperboloïde des hauteurs du tétraèdre T [2].

2° *On a la relation*

$$D'M \cdot D'M' = -\overline{D'D}^2 \tag{1}$$

---

[1] Schenker, AMP, (3), xiv-189; Mathesis 1909-127.
[2] Cl. Servais, BB, 1921-61.

entre les distances du point D′ *au centre d'homologie et à l'axe d'homologie* (d) *des triangles* ABC *et* A′B′C′.

Les droites joignant le sommet D aux points (BC, B′C′), (CA, C′A′), (AB′, A′B′), qui coïncident avec les intersections des plans DBC et DB′C′, DCA et DC′A′, DAB et DA′B′ sont perpendiculaires aux plans DAA′, DBB′, DCC′, et par suite à DD′. D'autre part, elles appartiennent à un plan (Q) normal à DM en D qui coupe le plan (P) suivant la droite (*d*), et MD′ en M′. La droite DM′, située dans le plan (Q), est donc perpendiculaire à MD′ puisque (*d*) est orthogonale à DD′. Dès lors, on obtient la relation (1).

3. *Si un segment arbitraire* DE *se projette orthogonalement en* Da, Db, Dc *sur les plans des faces* DBC, DCA, DAB *d'un tétraèdre* T ≡ ABCD, *les plans perpendiculaires à ces faces menés par les isogonales* Da′, Db′, Dc′ *des droites* Da, Db, Dc *dans les faces correspondantes ont une droite commune confondue avec l'isogonale* DE′ *de la droite* DE *par rapport au tétraèdre supplémentaire* T′ ≡ A′B′C′D′, *et réciproquement.*

Lemme. — *Les plans menés par les bissectrices des faces* DBC, DCA, DAB *du tétraèdre* T *perpendiculairement à ces faces ont une droite commune confondue avec l'axe du tétraèdre supplémentaire* T′ *correspondant au trièdre* D — A′B′C′.

En effet, il est clair que le plan mené par la bissectrice D*d* de la face DAB, par exemple, perpendiculairement à celle-ci, passe par l'arête DC′ et que les arêtes DA, DB, DC sont perpendiculaires aux plans des faces DB′C′, DC′A′, DA′B′ du tétraèdre T′. Par suite, les parallèles à DA et DB menées par un point arbitraire F de la bissectrice D*d*, qui rencontrent DB et DA en N_1 et N_2, sont perpendiculaires aux plans DB′C′ et DC′A′ en des point F_1 et F_2, et les triangles rectangles égaux DN_1F_1, DN_2F_2 donnent

$$FF_1 = FN_1 + N_1F_1 = FN_2 + N_2F_2 = FF_2,$$

ce qui prouve que le point F, équidistant des plans DB′C′ et DC′A′, est situé dans le bissecteur du dièdre DC′. La démonstration s'achève par des conclusions analogues relativement aux faces DBC, DCA de T.

Dès lors, le théorème provient de ce que les plans (DA′, D*a*) et (DA′, D*a*′), (DB′, D*b*) et (DB′, D*b*′), (DC′, D*c*) et (DC′, D*c*′) sont symétriques par rapport aux bissecteurs des dièdres DA′, DB′, DC′ du tétraèdre T′. Les plans (DA′, D*a*′), (DB′, D*b*′), (DC′, D*c*′) ont une droite commune qui coïncide avec l'isogonale DE′ de la

droite donnée DE, par rapport au trièdre D—A'B'C' du tétraèdre T', et réciproquement.

Même conclusion en prenant T' comme tétraèdre fondamental.

Corollaire. — *L'isogonale de la hauteur* DD' *du tétraèdre* T[T'], *par rapport au trièdre* D(A'B'C'), [D(ABC)], *coïncide avec la droite qui joint le sommet* D *au centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* T[T'], *et réciproquement.*

Car la hauteur DD' des tétraèdres T et T' est commune aux plans menés par les hauteurs DA_1, DB_1, DC_1 des faces DBC, DCA, DAB perpendiculairement à ces faces. D'après le théorème précédent, les plans normaux aux mêmes faces et passant par les isogonales DA'_1, DB'_1, DC'_1, dans ces faces, de DA_1, DB_1, DC_1, ont une droite commune qui coïncide avec l'isogonale de la hauteur DD', par rapport au trièdre D—A'B'C', et réciproquement. Or, les plans (DA'_1, DD'), (DB'_1, DD'), (DC'_1, DD') concourent au centre O de la sphère ABCD. Par analogie, l'isogonale de DD', par rapport au trièdre D—ABC, coïncide avec la droite DO' joignant le sommet D au centre O' de la sphère DA'B'C'. Il en résulte que *les droites qui joignent les sommets* A, B, C, D *du tétraèdre* T *aux centres des sphères circonscrites aux tétraèdres supplémentaires* (A), (B), (C), (D) *sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde* (H') *qui se confond avec l'isogonal de l'hyperboloïde des hauteurs* (H) *du tétraèdre fondamental* T.

4. *Les sphères podaires de tous les points de la droite* DO (DO'), *par rapport au tétraèdre* T'(T), *passent par le pied* D' *de la hauteur* DD' *commune aux tétraèdres* T *et* T'.

En effet, d'après le corollaire précédent, le second foyer de la quadrique de révolution inscrite au tétraèdre T'(T) dont le premier foyer est sur DO'(DO) est situé sur la hauteur DD' de T et T', de sorte que la sphère principale de cette quadrique passe nécessairement par le point D'.

Corollaire. — *Le tétraèdre podaire du point de rencontre* J'(J) *de la droite* DO' (DO) *avec le plan* (P), *par rapport au tétraèdre* T(T'), *est homothétique au tétraèdre* T'(T).

Car les projections orthogonales des points J et J' sur les plans DB'C', DC'A', DA'B' et DBC, DCA, DAB déterminent deux plans parallèles au plan (P).

5. Tétraèdres supplémentaires orthocentriques. — *Si le tétraèdre* T *est orthocentrique, il en est de même de son supplémentaire* (D) ≡ DA'B'C', *et réciproquement.*

En effet, si le tétraèdre T est orthocentrique, les traces des plans ADA′, BDB′, CDC′ sur le plan (P) coïncident avec les hauteurs du triangle ABC, et comme celui-ci est polaire réciproque du triangle A′B′C′ par rapport à un cercle centré en l'orthocentre D′ de ABC, les triangles ABC et A′B′C′ se correspondent dans une homothétie de centre D′ dont le module

$$\left|\frac{BC}{B'C'}\right| = \left|\frac{4R^2\cos A\cos B\cos C}{\overline{D'D}^2}\right|$$

provient de ce que les points B″ et C″, par exemple, sont les transformés de B et C, B′ et C′ dans les inversions (D′, D′A · D′A″), (D′, D′A′ · D′A″). Le point D′ coïncide donc avec les orthocentres des triangles ABC, A′B′C′ et les tétraèdres T, (D) sont orthocentriques, et réciproquement.

Théorème. — *Les droites qui joignent les sommets* A, B, C, D *aux centres des sphères circonscrites aux tétraèdres* (A), (B), (C), (D) *concourent en l'orthocentre du tétraèdre complémentaire* t *de* T.

Car les hauteurs du tétraèdre T étant concourantes, leurs isogonales par rapport aux trièdres de sommets A, B, C ,D des tétraèdres (A), (B), (C), (D) passent par l'isogonal de l'orthocentre de T, par rapport à ce tétraèdre, c'est-à-dire par l'orthocentre de *t* [1].

Corollaire. — *La hauteur* DD_h *et la médiane* DG_d *d'un tétraèdre* T trirectangle *en* D *sont isogonales par rapport au trièdre* D(ABC).

---

[1] V. Thébault, *L'Éducation mathématique*, 22e année, p. 128, question 4048 (1920).

CHAPITRE II

SPHÈRES ASSOCIÉES A UN TÉTRAÈDRE ET A UN POLYGONE GAUCHE

Généralités.

48. Considérons une sphère (ω), de rayon ρ, pour laquelle les puissances des sommets A, B, C, D d'un tétraèdre T aient les formes kl^2, km^2, kn^2, kp^2, l, m, n, p ayant des valeurs données et k étant un coefficient arbitraire.

Soient (π) le plan radical des sphères (O) et (ω); α, β, γ, δ les projections orthogonales des sommets A, B, C, D du tétraèdre sur le plan (π); M, N, P, Q, S, U les intersections du même plan et des arêtes BD, DC, CB, BA, AC, AD. On a, en grandeur et en signe,

$$(1)\qquad \begin{aligned} \overline{A\omega}^2 - \rho^2 &= kl^2 = 2O\omega \,.\, A\alpha, \\ \overline{B\omega}^2 - \rho^2 &= km^2 = 2O\omega \,.\, B\beta, \\ \overline{C\omega}^2 - \rho^2 &= kn^2 = 2O\omega \,.\, C\gamma, \\ \overline{D\omega}^2 - \rho^2 &= kp^2 = 2O\omega \,.\, D\delta. \end{aligned}$$

Le plan $(B\beta, D\delta)$ coupe le plan (π) suivant une droite qui passe par le point M et

$$\frac{MB}{MD} = \frac{B\beta}{D\delta} = \frac{m^2}{p^2}.$$

Le point M et, par analogie, les points N, P, Q, S, U et le plan (π) qui les contient restent donc fixes lorsque k varie.

Par suite, *le lieu du centre de la sphère* (ω), *lorsque* k *varie, est la droite* Δ *menée du centre de la sphère circonscrite perpendiculairement au plan* (π) *de coordonnées barycentriques* l^2, m^2, n^2, p^2 *par rapport au tétraèdre* T.

Ayant

$$(2)\qquad \overline{A\omega}^2 - kl^2 = \overline{B\omega}^2 - km^2 = \overline{C\omega}^2 - kn^2 = \overline{D\omega}^2 - kp^2 = \rho^2,$$

le centre de la sphère (ω) coïncide avec le centre radical des sphères $(A, \sqrt{k(l^2+\lambda)})$, $(B, \sqrt{k(m^2+\lambda)})$, $(C, \sqrt{k(n^2+\lambda)})$, $(D, \sqrt{k(p^2+\lambda)})$, quel que soit λ, et la sphère (ω) se confond avec la sphère orthogonale des sphères

$$(A, l\sqrt{k}), \qquad (B, m\sqrt{k}), \qquad (C, n\sqrt{k}), \qquad (D, p\sqrt{k}).$$

A deux valeurs k_1, k_2 du paramètre k correspondent deux sphères (ω_1), (ω_2). Le plan (π) et les distances algébriques $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ restant les mêmes, lorsque k varie, on a cette relation entre les distances des centres des sphères (O), (ω_1), (ω_2) :

$$(3) \qquad \frac{O\omega_1}{O\omega_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Plus généralement, à n valeurs $k_1, k_2, \ldots, k_n$ du coefficient k correspondent les sphères (ω_1), (ω_2), ..., (ω_n) pour lesquelles

$$\frac{O\omega_1}{k_1} = \frac{O\omega_2}{k_2} = \cdots = \frac{O\omega_n}{k_n}.$$

Si trois coefficients k_1, k_2, k_3 vérifient les relations

$$k_1 = \frac{1}{2}(k_2 + k_3), \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{k_1} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3},$$

les centres des sphères (ω_2), (ω_3) *sont symétriques par rapport à celui de la sphère* (ω_1), ou *la division* $(O, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ *est harmonique.*

49. Si l'on change les signes pour avoir $(-kl^2, -km^2, -kn^2, -kp^2)$, à ces puissances correspond une sphère (ω'), de rayon ρ', dont le centre est symétrique du point ω par rapport au centre de la sphère (O) circonscrite au tétraèdre T, car les droites $O\omega$ et $O\omega'$ sont normales au plan de coordonnées barycentriques l^2, m^2, n^2, p^2 et, de plus,

$$\overline{\omega B}^2 - \overline{\omega C}^2 = k(m^2 - n^2) = -(\overline{\omega' B}^2 - \overline{\omega' C}^2), \quad \ldots$$

Il en résulte que le carré du rayon de la sphère (ω') a pour expression, en posant $O\omega = d$,

$$\rho'^2 = 2(R^2 + d^2) - \rho^2,$$

ou

$$\rho'^2 = 2(R^2 + d^2),$$

quand la sphère (ω) se réduit à son centre.

Si l'on change le signe d'une des puissances pour avoir successivement $(-kl^2, km^2, kn^2, kp^2)$, $(kl^2, -km^2, kn^2, kp^2)$, $(kl^2, km^2, -kn^2,$

kp^2), (kl^2, km^2, kn^2, $-kp^2$), à ces puissances nouvelles correspondent des sphères (ω_1), (ω_2), (ω_3), (ω_4).

Il est clair que trois sommets du tétraèdre T ont mêmes puissances par rapport à la sphère (ω) et à trois des sphères (ω_1), (ω_2), (ω_3), (ω_4).

Les plans radicaux des sphères (ω) *et* (ω_1), (ω) *et* (ω_2), (ω) *et* (ω_3), (ω) *et* (ω_4) *sont donc les plans des faces et les centres radicaux des quaternes de sphères* $[(\omega), (\omega_1), (\omega_2), (\omega_3)]$, ..., *coïncident avec les sommets du tétraèdre* T. *Les plans radicaux des couples de sphères* (ω_1) *et* (ω_2), (ω_1) *et* (ω_3), ..., (ω_3) *et* (ω_4), *passent chacun par une arête du tétraèdre* T *et concourent au centre radical des sphères* (ω_1), (ω_2), (ω_3), (ω_4) *dont les coordonnées barycentriques sont*

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \frac{1}{l^2} : \frac{1}{m^2} : \frac{1}{n^2} : \frac{1}{p^2}.$$

50. D'après les égalités (1) et (2), la droite Δ passe aussi par le point J tel que l'on ait

$$(4) \qquad \overline{JA}^2 + l^2 = \overline{JB}^2 + m^2 = \overline{JC}^2 + n^2 = \overline{JD}^2 + p^2.$$

D'autre part, les centres des sphères (ω_1), (ω_2), (ω_3), de rayons ρ_1, ρ_2, ρ_3, que nous appellerons sphères *associées* de la sphère (ω), telles que les puissances des sommets A, B, C, D, par rapport à ces sphères, soient proportionnelles aux quantités (km^2, kn^2, kp^2, kl^2), (kn^2, kp^2, kl^2, km^2), (kp^2, kl^2, km^2, kn^2), obtenues par des permutations convenables des puissances kl^2, km^2, kn^2, kp^2 des points A, B, C, D pour la sphère (ω), décrivent, lorsque k varie, chacun une droite Δ_1, Δ_2, Δ_3 confondue avec le diamètre de la sphère (O) qui passe par les points J_1, J_2, J_3 définis par les égalités

$$(5) \qquad \overline{J_1A}^2 + m^2 = \overline{JB}^2 + n^2 = \overline{JC}^2 + p^2 = \overline{JD}^2 + l^2,$$
$$(6) \qquad \overline{J_2A}^2 + n^2 = \overline{JB}^2 + p^2 = \overline{JC}^2 + l^2 = \overline{JD}^2 + m^2,$$
$$(7) \qquad \overline{J_3A}^2 + p^2 = \overline{JB}^2 + l^2 = \overline{JC}^2 + m^2 = \overline{JD}^2 + n^2.$$

Si l'on désigne par λ, λ_1, λ_2, λ_3 les valeurs communes des quantités égales qui figurent aux égalités (4) à (7) et par G_1 le centre de gravité du tétraèdre $JJ_1J_2J_3$, par addition des égalités (4) à (7), on obtient, de proche en proche,

$$\begin{aligned}
\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - l^2 - m^2 - n^2 - p^2 &= \overline{JA}^2 + \overline{J_1A}^2 + \overline{J_2A}^2 + \overline{J_3A}^2 \\
&= \overline{JB}^2 + \overline{J_1B}^2 + \overline{J_2B}^2 + \overline{J_3B}^2 = \overline{JC}^2 + \overline{J_1C}^2 + \overline{J_2C}^2 + \overline{J_3C}^2 \\
&= \overline{JD}^2 + \overline{J_1D}^2 + \overline{J_2D}^2 + \overline{J_3D}^2 = \overline{JG_1}^2 + \overline{J_1G_1}^2 + \overline{J_2G_1}^2 + \overline{J_3G_1}^2 + 4\overline{AG_1}^2 \\
&= K^2 + 4\overline{AG_1}^2 = K^2 + 4\overline{BG_1}^2 = K^2 + 4\overline{CG_1}^2 = K^2 + 4\overline{DG_1}^2.
\end{aligned}$$

En conclusion : *le centre* O *de la sphère circonscrite au tétraèdre* T *coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre* $JJ_1J_2J_3$, car

$$AG_1 = BG_1 = CG_1 = DG_1;$$

il en résulte que *la somme des distances algébriques des points* J, J_1, J_2, J_3 *aux plans des faces du tétraèdre* T *est égale à quatre fois celle des distances du centre* O *de la sphère circonscrite aux mêmes plans.*

51. Lorsque $k = 1$, *les points* ω *et* J, ω_1 *et* J_1, ω_2 *et* J_2, ω_3 *et* J_3 *sont symétriques par rapport au centre* O *de la sphère* ABCD *et ce point coïncide aussi avec le centre de gravité du tétraèdre* $\omega\omega_1\omega_2\omega_3$.

La somme des distances algébriques des points ω, ω_1, ω_2, ω_3 *aux plans des faces du tétraèdre* T *est aussi égale à quatre fois celle des distances du centre* O *de la sphère* (O) *aux mêmes plans.*

Dans ce cas particulier, en effet, d'après les relations (1), la distance algébrique du sommet A du tétraèdre au plan radical des sphères (B, m) et (C, n) a pour mesure

$$Ax = \frac{c^2 - m^2 - b^2 + n^2}{2a} = A_mA_{m'} - \frac{m^2 - n^2}{2a},$$

en désignant par A_m et A′ le milieu de l'arête BC et le pied de la hauteur AA′ du triangle ABC. Or, en vertu de (4),

$$-(m^2 - n^2) = \overline{JB}^2 - \overline{JC}^2 = 2a.d,$$

d représentant la mesure de la projection orthogonale du segment JA_m sur BC. Donc,

$$A_mA' - Ax = \frac{m^2 - n^2}{2a} = -d,$$

ce qui achève de démontrer la première et par suite la seconde partie de la proposition.

52. Si le coefficient k varie, les points ω, ω_1, ω_2, ω_3 décrivent des ponctuelles semblables sur les droites Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 et *l'octogone gauche* $\omega\omega_1\omega_2\omega_3JJ_1J_2J_3$ *reste semblable à lui-même.*

53. Comme

$$\overline{\omega A}^2 + \overline{\omega B}^2 + \overline{\omega C}^2 + \overline{\omega D}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 + 4\overline{\omega G}^2,$$

on a

$$\overline{\omega G}^2 - \rho^2 = \frac{k}{4}(l^2 + m^2 + n^2 + p^2) - \frac{1}{16}\Sigma(a^2 + a'^2)$$
$$= \overline{\omega_1 G}^2 - \rho_1^2 = \overline{\omega_2 G}^2 - \rho_2^2 = \overline{\omega_3 G}^2 - \rho_3^2.$$

La sphère orthogonale aux sphères (ω), (ω_1), (ω_2), (ω_3) *a donc pour centre le centre de gravité* G *du tétraèdre* T *et pour carré du rayon*

$$(8) \qquad \sigma^2 = \frac{1}{16}\left[4k(l^2 + m^2 + n^2 + p^2) - \Sigma(a^2 + a'^2)\right].$$

Suivant que l'on a

$$k(l^2 + m^2 + n^2 + p^2) \gtreqless \frac{1}{4}\Sigma(a^2 + a'^2),$$

la sphère (G, σ) est réelle, se réduit à son centre ou est imaginaire. Dans le premier cas, *la sphère* (G, σ) *est le lieu des points dont la somme des carrés de leurs distances aux sommets du tétraèdre* T *est égale à*

$$k(l^2 + m^2 + n^2 + p^2).$$

54. Si l'on intervertit deux des puissances parmi (kl^2, km^2, kn^2, kp^2) pour obtenir quatre nouvelles sphères (ω'_1), (ω'_2), (ω'_3), (ω'_4) que nous appellerons sphères *semi-associées* à la sphère (ω), on obtient, d'après ce qui précède, cette proposition :

Le centre radical de quatre sphères semi-associées *à la sphère* (ω) *se confond avec le centre de gravité* G *du tétraèdre* T. *Les plans radicaux de la sphère* (ω) *par rapport à toutes ses sphères* semi-associées *passent par les médianes* AG, BG, CG, DG *et une sphère quelconque* (ω), *ses sphères* associées *et ses sphères* semi-associées, *coupent orthogonalement une même sphère* (G, σ).

55. *Lorsque le coefficient* k *varie, les sphères* (O_A), (O_B), (O_C), (O_D) *circonscrites aux faces* BCD, CDA, DAB, ABC *du tétraèdre* T *et orthogonales aux sphères* $(A, l\sqrt{k})$, $(B, m\sqrt{k})$, $(C, n\sqrt{k})$, $(D, p\sqrt{k})$, *conservent le même centre radical qui coïncide avec le conjugué isogonal* F, *par rapport au tétraèdre* T, *du point* E *dont les distances aux plans* BCD, CDA, DAB, ABC *sont proportionnelles aux quantités* l^2A, m^2B, n^2C, p^2D.

Le plan radical des sphères (O_A), (O) est le plan BCD et la puissance du sommet A du tétraèdre pour la première est kl^2 tandis que la puissance de A pour la seconde sphère est nulle.

On a donc, en grandeur et en signe,

$$(9) \qquad kl^2 = 2OO_A \cdot AA_h, \qquad \text{ou} \qquad OO_A = \frac{kl^2}{2AA_h} = -\frac{kl^2A}{6V},$$

et

$$OO_A : OO_B : OO_C : OO_D = l^2A : m^2B : n^2C : p^2D.$$

Dès lors, le tétraèdre $O_AO_BO_CO_D$ est homothétique au tétraèdre

podaire $E_AE_BE_CE_D$ du point E, par rapport au tétraèdre T, et le théorème résulte de ce que l'axe radical des sphères (O_B), (O_C), (O_D) coïncide avec la perpendiculaire abaissée du point A de ces trois sphères sur le plan $O_BO_CO_D$ et, par suite, aussi sur le plan $E_BE_CE_D$.

56. Si l'on pose

$$(10)\qquad \begin{aligned} l^2 &= a^2 + b'^2 + c'^2, & m^2 &= b^2 + c'^2 + a'^2,\\ n^2 &= c^2 + a'^2 + b'^2, & p^2 &= a^2 + b^2 + c^2, \end{aligned}$$

les relations (1) deviennent

$$(11)\qquad \begin{aligned} \overline{A\omega}^2 - \rho^2 &= k(a^2 + b'^2 + c'^2) = 2O\omega \,.\, A\alpha,\\ \overline{B\omega}^2 - \rho^2 &= k(b^2 + c'^2 + a'^2) = 2O\omega \,.\, B\beta,\\ \overline{C\omega}^2 - \rho^2 &= k(c^2 + a'^2 + b'^2) = 2O\omega \,.\, C\gamma,\\ \overline{D\omega}^2 - \rho^2 &= k(a^2 + b^2 + c^2) = 2O\omega \,.\, D\delta. \end{aligned}$$

Le plan $(B\beta, D\delta)$ coupe le plan radical (π) des sphères (O), (ω) suivant une droite qui passe par M, et

$$(12)\qquad \frac{MB}{MD} = \frac{B\beta}{D\delta} = \frac{b^2 + c'^2 + a'^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

D'autre part, on a

$$(13)\qquad \begin{aligned} \overline{A\omega}^2 - \overline{B\omega}^2 &= k\left[(a^2 - a'^2) - (b^2 - b'^2)\right],\\ \overline{B\omega}^2 - \overline{C\omega}^2 &= k\left[(b^2 - b'^2) - (c^2 - c'^2)\right], \quad \ldots, \end{aligned}$$

et aussi, en vertu de formules classiques,

$$(14)\qquad \begin{aligned} \overline{AG}^2 - \overline{BG}^2 &= -\frac{1}{4}\left[(a^2 - a'^2) - (b^2 - b'^2)\right],\\ \overline{BG}^2 - \overline{CG}^2 &= -\frac{1}{4}\left[(b^2 - b'^2) - (c^2 - c'^2)\right], \quad \ldots, \end{aligned}$$

D'où cette proposition : *Le lieu du centre* ω *de la sphère* (ω) *orthogonale aux sphères* $(A, l\sqrt{k})$, $(B, m\sqrt{k})$, $(C, n\sqrt{k})$, $(D, p\sqrt{k})$, *lorsque* k *varie, est la droite qui joint le centre* O *de la sphère circonscrite au centre de gravité* G *du tétraèdre* T. (Droite d'Euler).

Autrement, les égalités (13) prouvent que les plans menés par le point ω normalement aux arêtes du tétraèdre T engendrent six faisceaux semblables de plans parallèles, dans lesquels les plans médiateurs sont homologues. Le lieu de ω est donc un diamètre de la sphère (O) confondu avec la droite OG à cause des égalités (14).

En vertu de l'égalité (3), on a, en grandeur et en signe,

$$(15)\qquad O\omega : OG = k : -\frac{1}{4}, \qquad \text{et} \qquad O\omega = -4k.OG.$$

De plus, en raison des relations (1), et par analogie, on obtient

$$A\alpha = -\frac{k(a^2+b'^2+c'^2)}{8OG}, \qquad B\beta = -\frac{k(b^2+c'^2+a'^2)}{8OG},$$
$$C\gamma = -\frac{k(c^2+a'^2+b'^2)}{8OG}, \qquad D\delta = -\frac{k(a^2+b^2+c^2)}{8OG}.$$

Si la droite OG rencontre le plan (π) au point K, on a

$$(16)\qquad \overline{GK} = \frac{1}{4}(\overline{A\alpha}+\overline{B\beta}+\overline{C\gamma}+\overline{D\delta}) = -\frac{\Sigma(a^2+a'^2)}{16OG}.$$

57. Calcul du carré du rayon ρ de la sphère (ω). — Il est facile d'obtenir la mesure du rayon de la sphère (ω) quand l^2, m^2, n^2, p^2 satisfont aux relations (10). Le centre ω de la sphère (ω) étant sur la droite OG, si l'on applique le théorème de Stewart au triangle AOG, on obtient

$$\overline{AO}^2.\overline{G\omega}+\overline{AG}^2.\overline{\omega O}+\overline{A\omega}^2.\overline{OG}+\overline{G\omega}.\overline{\omega O}.\overline{OG}=0;$$

d'où, en vertu de la relation (15), d'abord,

$$\overline{A\omega}^2 = (1+4k).R^2 - 4k.\overline{AG}^2 + 4k(1+4k).\overline{OG}^2,$$

ensuite, en introduisant dans cette égalité les expressions

$$\overline{AG}^2 = \frac{9}{16}M_a^2 = \frac{1}{16}\left[3(a'^2+b^2+c^2)-(a^2+b'^2+c'^2)\right],$$
$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{16}\Sigma(a^2+a'^2),$$

des carrés des segments AG, OG, et après réductions,

$$(17)\qquad \begin{aligned}
\overline{A\omega}^2 &= (1+4k)^2.R^2 - k(a'^2+b^2+c^2) - k^2\Sigma(a^2+a'^2),\\
\overline{B\omega}^2 &= (1+4k)^2.R^2 - k(b'^2+c^2+a^2) - k^2\Sigma(a^2+a'^2),\\
\overline{C\omega}^2 &= (1+4k)^2.R^2 - k(c'^2+a^2+b^2) - k^2\Sigma(a^2+a'^2),\\
\overline{D\omega}^2 &= (1+4k)^2.R^2 - k(a'^2+b'^2+c'^2) - k^2\Sigma(a^2+a'^2),
\end{aligned}$$

et enfin, d'après les égalités (11),

$$(18)\qquad \rho^2 = \overline{A\omega}^2 - k(a^2+b'^2+c'^2) = (1+4k)^2.R^2 - k(k+1)\Sigma(a^2+a'^2).$$

De plus, les relations (17) et (18) donnent, d'une part,

$$(19)\quad \overline{A\omega}^2+\overline{B\omega}^2+\overline{C\omega}^2+\overline{D\omega}^2=[2(1+4k)]^2.R^2-2k(k+1)\Sigma(a^2+a'^2),$$

d'autre part, la puissance

$$(20)\quad \overline{G\omega}^2-\rho^2=[(1+4k).OG]^2-\rho^2=\frac{1}{16}\cdot(8k-1).\Sigma(a^2+a'^2)$$

du centre de gravité G du tétraèdre T pour la sphère (ω).

58. Lorsque $k=\frac{1}{2}$, on a

$$O\omega=2OG=O\Omega.$$

Dans cette hypothèse, la formule (19), qui devient

$$\overline{A\Omega}^2+\overline{B\Omega}^2+\overline{C\Omega}^2+\overline{D\Omega}^2=4R^2,$$

permet d'énoncer ce théorème :

La somme des carrés des distances du point de Monge *aux sommets du tétraèdre* T *est égale au carré du diamètre de la sphère circonscrite.*

Le pôle du plan radical (π) *des sphères* (O) *et* (ω), *par rapport au tétraèdre* T, *et le centre radical des sphères* (O_A), (O_B), (O_C), (O_D) *correspondantes coïncident avec le réciproque du barycentre* F *des carrés des arêtes opposées.*

Car les coordonnées barycentriques du pôle du plan (π), par rapport au tétraèdre T, sont proportionnelles aux quantités

$$\frac{1}{a^2+b'^2+c'^2},\quad \frac{1}{b^2+c'^2+a'^2},\quad \frac{1}{c^2+a'^2+b'^2},\quad \frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lorsque $k=1$, on a, d'après les relations (11) et (15),

$$O\omega=4GO,$$

et comme

$$c^2-m^2+b^2-n^2+a'^2-p^2=-\Sigma(a^2+a'^2),$$

la somme des puissances de chacun des centres des sphères $(A, l)\equiv(O_A)$, $(B, m)\equiv(O_B)$, $(C, n)\equiv(O_C)$, $(D, p)\equiv(O_D)$, *par rapport aux trois autres, est la même pour les quatre centres.*

Le centre de la sphère (ω) orthogonale aux sphères (A, l), (B, m), (C, n), (D, p) se confond avec le symétrique du point O par rapport au centre de la sphère de Longchamps du tétraèdre T [1].

---

[1] Cf. § 61, p. 103.

Les sommes des carrés des arêtes des tétraèdres

$$T_a \equiv \omega BCD, \qquad T_b \equiv \omega CDA, \qquad T_c \equiv \omega DAB, \qquad T_d \equiv \omega ABC$$

sont égales entre elles.

En effet, dans le cas présent, d'après les égalités (11), on obtient pour le tétraèdre T_a et, par suite, pour les trois autres,

$$\Sigma(\overline{\omega B}^2 + \overline{DC}^2) = 3\rho^2 + 2\Sigma(a^2 + a'^2) = 75R^2 - 4\Sigma(a^2 + a'^2),$$

car, en vertu de la formule (18),

$$\rho^2 = 25R^2 - 2\Sigma(a^2 + a'^2).$$

Le tétraèdre T *se confond avec le transformé du tétraèdre* $T_2 \equiv A_2B_2C_2D_2$ *ayant pour sommets les centres de gravité des tétraèdres* T_a, T_b, T_c, T_d *dans l'homothétie* $(O, -4)$ *et la sphère* $A_2B_2C_2D_2$ *coïncide avec la sphère* $\left(O, \frac{R}{4}\right)$.

On obtient, en effet, successivement

$$\frac{G_aA}{G_aG} = \frac{G_a\omega}{G_aA_2} = \frac{4}{1} = \frac{O\omega}{GO} = \frac{AO}{OA_2},$$

et

$$OA_2 = \frac{AO}{4} = \frac{R}{4} = OB_2 = OC_2 = OD_2.$$

Corollaire. — *On a*

$$AA_2 = BB_2 = CC_2 = DD_2 = \frac{5R}{4}.$$

Si $k = -1$, les relations (11) et (15) donnent

$$O\omega' = 4OG = OO_1,$$

O_1 étant le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre anticomplémentaire $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ de T. Si l'on pose

$$l'^2 = -l^2, \qquad m'^2 = -m^2, \qquad n'^2 = -n^2, \qquad p'^2 = -p^2,$$

les sphères (A, l'), (B, m'), (C, n'), (D, p') coupent orthogonalement la sphère (ω) de centre O_1 qui leur correspond. De plus, comme

$$m^2 - c^2 + n^2 - b^2 + p^2 - a'^2 = \Sigma(a^2 + a'^2),$$

la somme des antipuissances de chacun des centres des sphères (A, l'), (B, m'), (C, n'), (D, p'), *par rapport aux trois autres, est la même pour les quatre centres.*

D'autre part, *la différence entre la somme des carrés des arêtes d'un*

des tétraèdres $T'_a \equiv O_1BCD$, $T'_b \equiv O_1CDA$, $T'_c \equiv O_1DAB$, $T'_d \equiv O_1ABC$ *aboutissant au sommet* O_1 *et celle des carrés des arêtes de la face opposée est constante pour les quatre tétraèdres.*

Car, d'après la formule (18), on a

$$\Sigma(\overline{O_1B}^2 - \overline{DC}^2) = 27R^2 - 2\Sigma(a^2 + a'^2).$$

Enfin, *la sphère circonscrite au tétraèdre* $T'_2 \equiv A'_2B'_2C'_2D'_2$ *ayant pour sommets les centres de gravité des tétraèdres* T'_a, T'_b, T'_c, T'_d *se confond avec la symétrique de la sphère* $\left(O, \frac{R}{4}\right)$, *par rapport au centre de gravité du tétraèdre* T *qui coïncide avec le transformé du tétraèdre* T'_2 *dans l'homothétie* $(S, -4)$ *dont le centre* S *partage le segment* $O\Omega$ *dans le rapport* -4.

Il résulte, en effet, des égalités évidentes

$$A_2A'_2 = \frac{1}{4}\omega O_1 = 2OG = O\Omega$$

que le quadrangle $OA_2A'_2\Omega$ est un parallélogramme dans lequel

$$\Omega A'_2 = OA_2 = \frac{R}{4}.$$

Le parallélisme et les sens des segments $\overline{AO}$ et $\overline{\Omega A'_2}$ donnent

$$\overline{SO} : \overline{SM} = -4,$$

ce qui achève la démonstration.

59. Si l'on suppose que

$$l^2 = b^2 + c^2 + a'^2, \qquad m^2 = c^2 + a^2 + b'^2,$$
$$n^2 = a^2 + b^2 + c'^2, \qquad p^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

les relations (1) deviennent, en grandeur et en signe,

$$(21) \qquad \begin{aligned} \overline{A\omega}^2 - \rho^2 &= k(b^2 + c^2 + a'^2) = 2O\omega.A\alpha, \\ \overline{B\omega}^2 - \rho^2 &= k(c^2 + a^2 + b'^2) = 2O\omega.B\beta, \\ \overline{C\omega}^2 - \rho^2 &= k(a^2 + b^2 + c'^2) = 2O\omega.C\gamma, \\ \overline{D\omega}^2 - \rho^2 &= k(a'^2 + b'^2 + c'^2) = 2O\omega.D\delta. \end{aligned}$$

D'autre part, comme on a

$$\overline{A\omega}^2 - \overline{B\omega}^2 = -k[(a^2 + a'^2) - (b^2 + b'^2)]$$

et des expressions analogues pour

$$\overline{B\omega}^2 - \overline{C\omega}^2, \qquad \overline{C\omega}^2 - \overline{D\omega}^2, \qquad \overline{D\omega}^2 - \overline{A\omega}^2,$$

déduites de la première par des permutations circulaires convenables sur les lettres a, a', b, b', c, c', d'après les égalités (14), *le centre* ω *de la sphère* (ω) *est situé sur la droite* OG, et

$$(22) \qquad O\omega : OG = -k : -\frac{1}{4} = 4k; \qquad \text{d'où} \qquad O\omega = 4k . OG.$$

Les relations (15) et (22) permettent déjà de dire que les centres des sphères (ω) orthogonales aux deux quaternes de sphères ayant pour centres les sommets A, B, C, D du tétraèdre T et dont les carrés des rayons respectifs sont proportionnels à la somme des carrés des arêtes des faces opposées aux sommets considérés et à la somme des carrés des arêtes aboutissant à ces sommets sont symétriques par rapport au centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

De plus, en appliquant le théorème de STEWART au triangle $AO\omega$, on obtient

$$\overline{A\omega}^2 = (1-4k)^2 . R^2 + k(b^2+c^2+a'^2) - k^2\Sigma(a^2+a'^2),$$

et des expressions analogues pour $\overline{B\omega}^2$, $\overline{C\omega}^2$, $\overline{D\omega}^2$. D'après les égalités (21), on a

$$(23) \qquad \rho^2 = (1-4k)^2 . R^2 - k^2\Sigma(a^2+a'^2).$$

Le pôle du plan radical (π) *des sphères* (O) *et* (ω), *par rapport au tétraèdre* T, *et le centre radical des sphères* (O_A), (O_B), (O_C), (O_D) *orthogonales aux sphères* $(A, l\sqrt{k})$, $(B, m\sqrt{k})$, $(C, n\sqrt{k})$, $(D, p\sqrt{k})$ *coïncident avec le réciproque du barycentre* E *des carrés des arêtes correspondantes.*

Car les coordonnées barycentriques du pôle du plan (π), et celles du point E, par rapport au tétraèdre T, sont proportionnelles aux quantités

$$\frac{1}{b^2+c^2+a'^2}, \quad \frac{1}{c^2+a^2+b'^2}, \quad \frac{1}{a^2+b^2+c'^2}, \quad \frac{1}{a'^2+b'^2+c'^2}.$$

59. Dans l'hypothèse suivant laquelle

$$(24) \qquad \begin{aligned} l^2 &= 2(b^2+c^2+a'^2) - a^2 - b'^2 - c'^2, \\ n^2 &= 2(a^2+b^2+c'^2) - c^2 - a'^2 - b'^2, \\ m^2 &= 2(c^2+a^2+b'^2) - b^2 - c'^2 - a'^2, \\ p^2 &= 2(a'^2+b'^2+c'^2) - a^2 - b^2 - c^2, \end{aligned}$$

les égalités (1) donnent, en grandeur et en signe,

$$(25)\quad \begin{aligned} \overline{A\omega}^2-\rho^2 &= k.\left[2(b^2+c^2+a'^2)-a^2-b'^2-c'^2\right]=2O\omega.A\alpha\\ \overline{B\omega}^2-\rho^2 &= k.\left[2(c^2+a^2+b'^2)-b^2-c'^2-a'^2\right]=2O\omega.B\beta\\ \overline{C\omega}^2-\rho^2 &= k.\left[2(a^2+b^2+c'^2)-c^2-a'^2-b'^2\right]=2O\omega.C\gamma\\ \overline{D\omega}^2-\rho^2 &= k.\left[2(a'^2+b'^2+c'^2)-a^2-b^2-c^2\right]=2O\omega.D\delta, \end{aligned}$$

et les puissances des sommets A, B, C, D du tétraèdre T par rapport à la sphère (ω) sont proportionnelles au double de la somme des carrés des arêtes aboutissant à chacun de ces sommets diminué de la somme des carrés des arêtes des faces opposées.

Les différences

$$\overline{A\omega}^2-\overline{B\omega}^2=-3k\left[(a^2-a'^2)-(b^2-b'^2)\right],\quad \ldots,$$

des carrés des distances de deux sommets du tétraèdre T au centre de la sphère (ω), qui résultent des égalités (25), sont de mêmes formes que les égalités

$$\overline{AG}^2-\overline{BG}^2=-\frac{1}{4}\left[(a^2-a'^2)-(b^2-b'^2)\right],\quad \ldots$$

des carrés des distances de deux sommets au centre de gravité du tétraèdre, et le centre du cercle (ω) décrit la droite OG, lorsque k varie. De plus, en vertu de la relation (3),

$$(26)\quad O\omega : OG = -3k : -\frac{1}{4} = 12k,\quad \text{et}\quad O\omega = 12k.OG.$$

Si l'on applique ces remarques aux tétraèdres $T_a \equiv \Omega BCD$, $T_b \equiv \Omega CDA$, $T_c \equiv \Omega DAB$, $T_d \equiv \Omega ABC$ ayant pour sommets le point de Monge et trois sommets du tétraèdre T, à un même coefficient k correspondent dans chacun des tétraèdres T_i, $(i = a, b, c, d)$, des sphères (ω_i, ρ_i) telles que les puissances P_A, P_B, P_C, P_D du sommet Ω, par rapport à ces sphères, soient des formes

$$(27)\quad P_A=\overline{A\omega_a}^2-\rho_a^2=k\left[2(\overline{\Omega B}^2+\overline{\Omega C}^2+\overline{\Omega D}^2)-a^2-b'^2-c'^2\right],$$
$$P_B=\ldots,\ \ldots,$$

et, d'après la relation (26),

$$O_i\omega_i = 12k.O_iG_i,$$

O_i et G_i désignant le centre de la sphère circonscrite et le centre de gravité du tétraèdre T_i. Or, en introduisant les expressions des carrés des distances du point de Monge aux sommets du tétraèdre T dans les égalités (27) et dans celles qui proviennent de permutations cir-

culaires convenables faites sur les lettres A, B, C, D et a, a', b, b', c, c', pour les valeurs de P_B, P_C, P_D, on obtient

$$P_A = k\left[6R^2 - \frac{1}{2}\Sigma(a^2 + a'^2)\right] = 2\,k(\overline{\Omega O}^2 - R^2) = P_B = P_C = P_D.$$

Ainsi, *le centre radical des sphères* (ω_i, ρ_i) *telles que les puissances respectives des sommets des tétraèdres* T_i, *par rapport à ces sphères, soient égales à* k *fois le double de la somme des carrés des arêtes aboutissant à ces sommets diminué de la somme des carrés des arêtes des faces opposées, se confond avec le point de* MONGE *du tétraèdre fondamental* T.

Lorsque $k = \frac{1}{6}$, les sphères (ω_i) se confondent avec la sphère DE LONGCHAMPS des tétraèdres complémentaires des tétraèdres T_i.

Si $k = \frac{1}{8}$, les sphères (ω_i) coïncident avec les sphères orthocentroïdales des tétraèdres T_i.

Quand $k = \frac{1}{9}$, les sphères (ω_i) se confondent avec les sphères des douze points des tétraèdres T_i.

60. Lorsque le tétraèdre T est *orthocentrique*, d'orthocentre H, les points H, A, B, C, D coïncident avec les points de MONGE des tétraèdres T, T_i et chacun d'eux se confond avec le centre radical de quatre sphères prises parmi les cinq sphères (ω) et (ω_i) précédemment définies et relatives à une même valeur du coefficient donné k.

Il en résulte que *les plans des faces du tétraèdre* T *coïncident avec les plans radicaux de la sphère* (ω) *et de chacune des sphères* (ω_i) *et les arêtes avec les axes radicaux de la sphère* (ω) *associée à deux sphères* (ω_i).

Dans un tétraèdre quelconque T, les hypothèses (25) donnent encore d'autres propriétés intéressantes.

Le pôle du plan radical (π) *des sphères* (O) *et* (ω), *par rapport au tétraèdre* T, *se confond avec le réciproque de l'anticomplémentaire du barycentre* F *des carrés des arêtes opposées.*

En effet, les puissances des sommets A, B, C, D du tétraèdre, par rapport à la sphère (ω), indiquées par les égalités (25), sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques α, β, γ, δ de l'anticomplémentaire du barycentre F de coordonnées

$$\alpha' = a^2 + b'^2 + c'^2,\quad \beta' = b^2 + c'^2 + a'^2,\quad \gamma' = c^2 + a'^2 + b'^2,\quad \delta' = a^2 + b^2 + c^2,$$

car

$$\alpha = \beta' + \gamma' + \delta' - 2\alpha',\qquad \beta = \gamma' + \delta' + \alpha' - 2\beta',$$
$$\gamma = \delta' + \alpha' + \beta' - 2\gamma',\qquad \delta = \alpha' + \beta' + \gamma' - 2\delta'.$$

COROLLAIRE. — *Si le tétraèdre* T *est* orthocentrique, *le pôle du plan radical* (π) *des sphères* (O) *et* (ω), *par rapport au tétraèdre, coïncide avec l'orthocentre* H.

Car, dans ce tétraèdre particulier, le réciproque F′ de l'anticomplémentaire du barycentre F des carrés des arêtes opposées coïncide avec le point de concours des quatre droites joignant les sommets aux orthocentres des faces opposées, autrement dit, avec l'orthocentre H de coordonnées

$$\frac{1}{b^2+a'^2-c'^2}=\frac{1}{c^2+a'^2-b'^2}=\frac{1}{b^2+c^2-a^2},\quad \ldots$$

NOTE. — Le point F′ est une généralisation, pour un tétraèdre quelconque, de l'orthocentre d'un tétraèdre orthocentrique.

Le plan radical (π) *des sphères* (O) *et* (ω) *coïncide avec le plan transformé de la sphère décrite sur le segment* OG, *comme diamètre, par l'inversion* (G, $-\sigma_1^2$), σ_1 *désignant le rayon de la sphère orthoptique* (G, σ_1) *de l'ellipsoïde de* STEINER *inscrit à un tétraèdre quelconque* T.

Car, en raison des égalités (25), on obtient, d'abord,

$$\overline{A\alpha}+\overline{B\beta}+\overline{C\gamma}+\overline{D\delta}=\frac{\Sigma(a^2+a'^2)}{12.\overline{OG}}=4\overline{GK},$$

K étant la projection orthogonale du point G sur le plan (π), ensuite

$$\overline{GK}.\overline{GO}=-\overline{GK}.\overline{OG}=-\frac{1}{48}\Sigma(a^2+a'^2)=-\sigma_1^2,$$

d'après l'expression connue du rayon de la sphère (G, σ_1).

SPHÈRE DE LONGCHAMPS

61. DÉFINITION. — Le cercle DE LONGCHAMPS (ω) est celui qui coupe orthogonalement les trois cercles (A, a), (B, b), (C, c) ayant pour centres les sommets A, B, C d'un triangle et comme rayons les mesures des côtés opposés BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$. Autrement dit, les puissances des sommets A, B, C, par rapport au cercle (ω), sont égales aux carrés a^2, b^2, c^2 des côtés opposés [1].

Nous avons proposé d'appeler sphère DE LONGCHAMPS d'un tétraèdre quelconque T$\equiv$ABCD, une sphère (ω), de rayon ρ, telle que les puissances des sommets A, B, C, D du tétraèdre T, par

[1] *Journal de Mathématiques spéciales de* G. DE LONGCHAMPS, 1886, pp. 51, ...

rapport à cette sphère, soient respectivement égales aux quantités

$$\frac{1}{2}(a^2+b'^2+c'^2),\ \frac{1}{2}(b^2+c'^2+a'^2),\ \frac{1}{2}(c^2+a'^2+b'^2),\ \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),$$

qui représentent les demi-sommes des carrés des arêtes des faces opposées à chacun des sommets considérés. De cette façon, la somme des puissances pour les quatre sommets équivaut à la somme

$$a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2=\Sigma(a^2+a'^2)$$

des carrés des six arêtes du tétraèdre, de même que la somme des puissances des sommets d'un triangle ABC, par rapport au cercle DE LONGCHAMPS, est équivalente à la somme des carrés des côtés.

Nous avons montré que cette sphère présente bien des analogies avec le cercle en question [1].

62. CENTRE DE LA SPHÈRE (ω). — Cette sphère correspond au coefficient $k=\frac{1}{2}$ dans les égalités (11) et, en vertu des relations (3), (13), (15), on a

$$O\omega : OG = \frac{1}{2} : -\frac{1}{4} = -2, \qquad \text{et} \qquad O\omega = -2OG.$$

Le centre ω *de la sphère* DE LONGCHAMPS *coïncide donc avec le transformé du centre de gravité* G *par l'homothétie* (O, — 2), ou ce qui revient au même, *avec le point de* MONGE *du tétraèdre anticomplémentaire* T_1 *du tétraèdre* T.

Si le tétraèdre T est *orthocentrique, le centre de la sphère* (ω) *coïncide avec le symétrique de l'orthocentre* H *du tétraèdre, par rapport au centre de la sphère circonscrite,* c'est-à-dire *avec l'orthocentre du tétraèdre anticomplémentaire.*

63. CALCUL DU RAYON ρ. — La mesure

$$\rho^2 = 9R^2 - \frac{3}{4}\Sigma(a^2+a'^2) \tag{28}$$

du carré du rayon de la sphère (ω) provient immédiatement de la formule (18) dans laquelle $k=\frac{1}{2}$. D'ailleurs, en appliquant le théorème du carré de la médiane aux triangles AOΩ et AΩω, on obtient

[1] V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1932, 223 à 229; etc.

les diverses relations suivantes :

$$(29)\quad \begin{aligned} \overline{A\Omega}^2 &= R^2 + \frac{1}{4}(a'^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b'^2 - c'^2),\\ \overline{B\Omega}^2 &= R^2 + \frac{1}{4}(b'^2 + c^2 + a^2 - b^2 - c'^2 - a'^2),\\ \overline{C\Omega}^2 &= R^2 + \frac{1}{4}(c'^2 + a^2 + b^2 - c^2 - a'^2 - b'^2),\\ \overline{D\Omega}^2 &= R^2 + \frac{1}{4}(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - b^2 - c^2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{A\omega}^2 &= 9R^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b'^2 + c'^2) - \frac{3}{4}(a'^2 + b^2 + c^2),\\ \overline{B\omega}^2 &= 9R^2 - \frac{1}{4}(b^2 + c'^2 + a'^2) - \frac{3}{4}(b'^2 + c^2 + a^2),\\ \overline{C\omega}^2 &= 9R^2 - \frac{1}{4}(c^2 + a'^2 + b'^2) - \frac{3}{4}(c'^2 + a^2 + b^2),\\ \overline{D\omega}^2 &= 9R^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{3}{4}(a'^2 + b'^2 + c'^2), \end{aligned}$$

desquelles on tire la formule (28).

La sphère (ω) est réelle, se réduit à son centre, ou est imaginaire, suivant que l'on a

$$3R^2 > \frac{1}{4}\Sigma(a^2 + a'^2), \quad 3R^2 = \frac{1}{4}\Sigma(a^2 + a'^2), \quad 3R^2 < \frac{1}{4}\Sigma(a^2 + a'^2).$$

Lorsqu'elle est réelle, le centre de gravité G du tétraèdre est extérieur à cette sphère, car

$$\overline{\omega G}^2 = 9\overline{OG}^2 = 9R^2 - \frac{9}{16}\Sigma(a^2 + a'^2) > 9R^2 - \frac{3}{4}\Sigma(a^2 + a'^2).$$

Quand elle se réduit à son centre ω, on a

$$\Sigma(a^2 + a'^2) = 12R^2, \qquad \text{et} \qquad OG = \frac{R}{2};$$

le point de Monge Ω *est sur la sphère circonscrite au tétraèdre.*

Si le tétraèdre T est orthocentrique, d'orthocentre H, le carré du rayon de la sphère conjuguée a pour mesure

$$\begin{aligned} \rho'^2 = \frac{1}{3}(\overline{OH}^2 - R^2) = \frac{1}{3}(4\overline{OG}^2 - R^2) &= R^2 - \frac{1}{12}\Sigma(a^2 + a'^2)\\ &= R^2 - \frac{1}{4}(a^2 + a'^2), \end{aligned}$$

et $\rho = 3\rho'$. D'où cette proposition :

La sphère de Longchamps *d'un tétraèdre* orthocentrique *se confond*

avec la sphère conjuguée au tétraèdre anticomplémentaire du tétraèdre fondamental.

COROLLAIRES. — *Le centre de la sphère* DE LONGCHAMPS (Ω, ρ_1) *du tétraèdre complémentaire* $t \equiv G_a G_b G_c G_d$ *coïncide avec le point de* MONGE Ω *du tétraèdre* T *et le carré du rayon de cette sphère a pour mesure*

$$\rho_1^2 = \frac{\rho^2}{9} = R^2 - \frac{1}{12}\Sigma(a^2 + a'^2).$$

Si le tétraèdre T *est* orthocentrique, *d'orthocentre* H, *la sphère* DE LONGCHAMPS (H, ρ_1) *du tétraèdre complémentaire* t *se confond avec la sphère conjuguée du tétraèdre* T.

64. AUTRES PROPRIÉTÉS DE LA SPHÈRE (ω). — *Le plan* (π) *coïncide avec le plan polaire du centre de gravité* G *du tétraèdre, par rapport à la sphère* (ω).

Si la droite OG perce le plan (π) en K, d'après la formule (20), la puissance du point G pour la sphère (ω) a pour mesure, en grandeur et en signe,

$$\overline{\omega G}^2 - \rho^2 = \frac{1}{16}\left(8 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)\Sigma(a^2 + a'^2) = \frac{3}{16}\Sigma(a^2 + a'^2)$$
$$= \frac{\Sigma(a^2 + a'^2)}{16 . OG}\left(1 + 4 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot OG = GK \cdot O\omega,$$

ce qui justifie le théorème.

La sphère (ω) *est orthogonale à la sphère orthoptique* (G, σ) *de l'ellipsoïde de* STEINER *circonscrit au tétraèdre* T *et le plan* (π) *coïncide avec le plan polaire du centre* ω, *par rapport à la sphère* (G, σ).

Car le centre de la sphère orthogonale aux sphères de centres A, B, C, D relatives aux hypothèses (11), avec $k = -\frac{1}{4}$, se confond avec le centre de gravité G du tétraèdre T. D'autre part, en raison de la formule (18), le carré du rayon de cette sphère a pour mesure

$$\rho_1^2 = \overline{AG}^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b'^2 + c'^2) = \frac{3}{16}\Sigma(a^2 + a'^2) = \sigma^2.$$

N. B. — Le carré

$$(30) \qquad \sigma^2 = \frac{3}{16}\Sigma(a^2 + a'^2) = \frac{1}{4}\left(\overline{A_m A'_m}^2 + \overline{B_m B'_m}^2 + \overline{C_m C'_m}^2\right)$$

du rayon de la sphère (G, σ) équivaut aussi au quart de la somme des carrés des bimédianes du tétraèdre T.

Si ce tétraèdre est *orthocentrique*, on a, d'abord,

$$A_mA'_m = B_mB'_m = C_mC'_m,$$

ensuite

$$\overline{GA}^2_m = \overline{GB}^2_m = \overline{GC}^2_m = \frac{3}{16}\Sigma(a^2 + a'^2),$$

et dans ce tétraèdre particulier, *la sphère* (G, σ) *est confondue avec la* première *sphère des douze points.*

La sphère (ω) DE LONGCHAMPS *coupe orthogonalement les sphères* (A_2, A_2A), (B_2, B_2B), (C_2, C_2C), (D_2, D_2D) *dont les centres* A_2, B_2, C_2, D_2 *coïncident avec les symétriques des sommets* A, B, C, D *du tétraèdre* T *par rapport à son centre de gravité* G.

Les tétraèdres $T_2 \equiv A_2B_2C_2D_2$ et T étant symétriques par rapport au point G, on a déjà

$$\omega A_2 = 3OG_a,$$

de sorte que la puissance du point A_2 pour la sphère (ω) a pour mesure, de proche en proche,

$$\begin{aligned}\overline{A_2\omega}^2 - \rho^2 &= 9 . \overline{OG}^2_a - \rho^2 = 9R^2 - (a^2 + b'^2 + c'^2) - \rho^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[3(a'^2 + b^2 + c^2) - a^2 - b'^2 - c'^2\right] = 9M_a^2 = \overline{A_2A}^2,\end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les points B_2, C_2, D_2, ce qui justifie le théorème.

COROLLAIRE. — *Les sphères décrites sur les médianes* AG_a, BG_b, CG_c, DG_d *du tétraèdre* T, *comme diamètres, sont orthogonales à la sphère* DE LONGCHAMPS *du tétraèdre complémentaire* t.

La figure constituée par ces sphères et par celle qui leur est orthogonale est, en effet, la transformée de la configuration du théorème précédent par l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$.

Les sphères (O), (O_1) *circonscrites aux tétraèdres* T, T_1 *et la sphère* DE LONGCHAMPS (ω) *du tétraèdre* T *ont le même plan radical* (π).

D'après les égalités (11), il suffit de montrer que le plan radical (π) des sphères (O) et (ω) se confond avec celui des sphères (G, σ) et (O_1, 3R). Or, si l'on désigne par d la distance algébrique du point G au plan radical de ces sphères, on obtient, en grandeur et en signe,

$$-\sigma^2 - (\overline{GO}_1^2 - 9R^2) = 2O_1G . d,$$

ce qui donne, d'abord,

$$-\frac{3}{16}\Sigma(a^2 + a'^2) + \frac{9}{16}\Sigma(a^2 + a'^2) = -6OG . d,$$

ensuite, d'après la formule (16),

$$d = -\frac{\Sigma(a^2 + a'^2)}{16.\mathrm{OG}} = \mathrm{GK};$$

ceci achève de démontrer le théorème.

Si les droites qui joignent les sommets A_1, B_1, C_1, D_1 *du tétraèdre anticomplémentaire* T_1 *du tétraèdre* T *à son point de* MONGE Ω_1 *recoupent la sphère circonscrite* $(O_1, 3R)$ *en des points dont les transformés par l'homothétie* $\left(\Omega_1, \frac{1}{3}\right)$ *sont* A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, *les sphères décrites sur les segments* $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$, $D_1D'_1$, *comme diamètres, sont orthogonales à la sphère* DE LONGCHAMPS (ω) *du tétraèdre fondamental* T.

En effet, on a, de proche en proche, en grandeur et en signe,

$$\Omega_1A_1 . \Omega_1A'_1 = \frac{1}{3}(\overline{\Omega_1O_1}^2 - 9R^2) = \frac{1}{3}(4\overline{O_1G}^2 - 9R^2)$$
$$= \frac{1}{3}\left[36R^2 - \frac{36}{16}\Sigma(a^2 + a'^2) - 9R^2\right] = 9R^2 - \frac{3}{4}\Sigma(a^2 + a'^2) = \rho^2$$
$$= \Omega_1B_1 . \Omega_1B'_1 = \Omega_1C_1 . \Omega_1C'_1 = \Omega_1D_1 . \Omega_1D'_1.$$

N. B. — Lorsque la sphère (ω) est *réelle*, le théorème résulte de ce que les points A_1 et A'_1, B_1 et B'_1, C_1 et C'_1, D_1 et D'_1 divisent harmoniquement les cordes interceptées sur les droites $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$, $D_1D'_1$ par la sphère DE LONGCHAMPS du tétraèdre T.

COROLLAIRE. — *La puissance du milieu d'une hauteur d'un tétraèdre orthocentrique, par rapport à la sphère conjuguée, est égale au quart du carré de cette hauteur.*

65. En vertu des égalités (12) et de leurs analogues pour les autres arêtes du tétraèdre T, les points M, N, P, Q, S, U sont les centres des sphères (M), (N), (P), (Q), (S), (U) ayant pour diamètres les distances de deux centres de similitude des sphères

$$(A, l\sqrt{k}), \qquad (B, m\sqrt{k}), \qquad (C, n\sqrt{k}), \qquad (D, p\sqrt{k}),$$

orthogonales à la sphère DE LONGCHAMPS (ω) du tétraèdre, prises deux à deux.

Les sphères $(B, m\sqrt{k})$, $(D, p\sqrt{k})$, (M) ont même plan radical, de même que les ternes de sphères analogues, de centres (D, C, N), (C, B, P), (B, A, Q), (A, C, S), (A, D, U). La sphère (ω) est aussi orthogonale aux sphères (M), (N), (P), (Q), (S), (U) qui sont elles-mêmes orthogonales aux sphères (O), (O_1) circonscrites aux

tétraèdres T, T_1, puisque les points M, N, P, Q, S, U sont situés dans le plan radical (π) commun aux sphères (O), (O_1), (ω).

Les six sphères de similitude précédentes se coupent donc en deux points W et W', symétriques par rapport au plan (π), sur la droite OG, et l'on a

$$OW.OW' = R^2, \qquad \omega W.\omega W' = \rho^2.$$

En observant que $O_1A_1 = 3R$, on obtient cette proposition qui étend au tétraèdre un théorème relatif aux cercles d'Apollonius d'un triangle :

Le centre O_1 *de la sphère circonscrite au tétraèdre anticomplémentaire* T_1 *du tétraèdre* T, *a la même puissance, égale à* $9R^2$, *par rapport aux six sphères lieux des points dont les rapports des distances à deux sommets du tétraèdre* T *sont égaux aux rapports des sommes des carrés des arêtes des faces opposées aux sommets considérés.*

FAISCEAUX REMARQUABLES DE SPHÈRES

66. Théorème. — *La sphère circonscrite* (O), *la sphère* de Longchamps (ω), *la sphère orthoptique* (G, σ) *de l'ellipsoïde de* Steiner *circonscrit du tétraèdre* T *et la sphère circonscrite* (O_1), *la sphère orthocentroïdale* (Γ_1) *du tétraèdre anticomplémentaire* T_1, *appartiennent à un même faisceau* (F_1).

En effet, il résulte du paragraphe 13 que les sphères (O), (ω), (O_1), (G, σ) appartiennent à un faisceau dont le plan coïncide avec le plan (π).

D'autre part, si l'on prend le tétraèdre T_1 comme tétraèdre de référence et qu'on lui applique les hypothèses adéquates (24) et (25), la sphère de Longchamps (ω), la sphère des douze points (O) de son tétraèdre complémentaire T et la sphère orthocentroïdale (Γ_1) du tétraèdre T_1 appartiennent à un faisceau de plan (π) qui se confond nécessairement avec (F_1).

N. B. — On arrive au même résultat en constatant que les puissances

$$\overline{KO}^2 - R^2, \quad \overline{K\omega}^2 - \rho^2, \quad \overline{KG}^2 - \sigma^2, \quad \overline{KO_1}^2 - (3R)^2, \quad \overline{K\Gamma_1}^2 - \left(\frac{3}{2}OG\right)^2,$$

du point de rencontre de la droite OG avec le plan (π) sont égales à

$$\frac{\Sigma(a^2 + a'^2)}{64.\overline{OG}^2}.\left[\Sigma(a^2 + a'^2) - 12R^2\right].$$

Corollaire. — *La sphère circonscrite, la sphère des douze points, la sphère orthocentroïdale, la sphère orthoptique de l'ellipsoïde de* Steiner *inscrit du tétraèdre* T *et la sphère* de Longchamps *du tétraèdre complémentaire* t, *appartiennent à un même faisceau* (F).

Il suffit de transformer la configuration envisagée dans le théorème précédent par l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$.

Corollaire. — *Les grands cercles des sphères* (G_i, σ_i) *décrites sur les cercles orthoptiques des ellipses de* Steiner *inscrites aux faces* BCD, CDA, DAB, ABC *du tétraèdre* T, *comme grands cercles, et dont les plans sont perpendiculaires aux droites* ΩG_i, *sont situés sur une même sphère* (m, r) *appartenant au faisceau* (F).

Car le centre de la sphère (m, r) coïncide avec le point de Monge du tétraèdre t et l'on a, d'abord,

$$mG_a = \frac{1}{3}\Omega A, \qquad mG_b = \frac{1}{3}\Omega B, \qquad mG_c = \frac{1}{3}\Omega C, \qquad mG_d = \frac{1}{3}\Omega D,$$

ensuite, d'après les égalités (29),

$$\overline{mG_a}^2 + \sigma_a^2 = \frac{1}{9}\overline{\Omega A}^2 + \frac{1}{18}(a^2 + b'^2 + c'^2)$$
$$= \frac{1}{9}\left[R^2 + \frac{1}{4}\Sigma(a^2 + a'^2)\right] = r^2.$$

D'autre part, la distance du centre de gravité G des tétraèdres T et t au plan radical de la sphère (m, r) et de la sphère orthoptique (G, σ_1) de l'ellipsoïde de Steiner inscrit à T, a pour mesure, en raison de la relation (16),

$$\frac{\overline{Gm}^2 - r^2 + \sigma_1^2}{2\overline{Gm}} = \frac{\Sigma(a^2 + a'^2)}{48 . \overline{OG}} = \overline{GK},$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *La sphère circonscrite, la sphère conjuguée, la* première *et la* seconde *sphères des douze points d'un tétraèdre* orthocentrique *appartiennent à un même faisceau dont le plan coïncide avec le plan polaire du centre de gravité du tétraèdre par rapport à la sphère conjuguée.* (Wostenholme).

Car la sphère conjuguée et la *première* sphère des douze points d'un tétraèdre orthocentrique se confondent avec les sphères de Longchamps des tétraèdres anticomplémentaire et complémentaire.

67. Lemme. — *La somme des puissances des sommets du tétraèdre* T *pour la sphère symétrique de la sphère circonscrite, par rapport au centre de gravité du tétraèdre, est nulle.*

En effet, d'après les formules (29), la somme

$$\overline{A\Omega}^2 - R^2 + \overline{B\Omega}^2 - R^2 + \overline{C\Omega}^2 - R^2 + \overline{D\Omega}^2 - R^2$$

des puissances des sommets du tétraèdre pour la sphère (Ω, R), symétrique de la sphère (O, R), par rapport au point G, est nulle.

Comme la somme des puissances des points A, B, C, D pour la sphère circonscrite (O, R) est nulle, les sphères (O, R) et (Ω, R) déterminent un faisceau (F') dont le plan coïncide avec celui qui est perpendiculaire à la droite OG en G.

Toutes les sphères du faisceau sont telles que la somme des puissances des sommets A, B, C, D du tétraèdre, par rapport à chacune d'elles, est nulle; car ces puissances sont des formes

(31)
$$l^2 = k(b^2 + c^2 + a'^2 - a^2 - b'^2 - c'^2), \quad m^2 = k(c^2 + a^2 + b'^2 - b^2 - c'^2 - a'^2),$$
$$n^2 = k(a^2 + b^2 + c'^2 - c^2 - a'^2 - b'^2), \quad p^2 = k(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

D'autre part, le plan du faisceau (F') se confond avec le plan radical (π) de la sphère circonscrite au tétraèdre et de la sphère (ω) pour laquelle les puissances des points A, B, C, D sont des formes (31).

Le pôle M du plan (π), par rapport au tétraèdre, dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux quantités (31), possède d'intéressantes propriétés que met en évidence le paragraphe suivant.

COURBE GAUCHE ASSOCIÉE A UN TÉTRAÈDRE

68. Définition. — Il s'agit de la courbe (Γ) lieu des points M tels que les droites passant par M et s'appuyant respectivement sur deux arêtes opposées rencontrent ces arêtes en six points d'une même sphère (S).

Si l'on désigne par $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ les coordonnées barycentriques d'un point quelconque M, la droite issue de M et s'appuyant sur AB et CD rencontre ces deux droites respectivement aux points

$$\begin{cases} \alpha_0, & \beta_0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \gamma_0, & \delta_0. \end{cases}$$

On trouve de même sur les deux autres couples d'arêtes opposées les points

$$\begin{cases} \alpha_0, & 0, & \gamma_0, & 0 \\ 0, & \beta_0, & 0, & \delta_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha_0, & 0, & 0, & \delta_0 \\ 0, & \beta_0, & \gamma_0, & 0. \end{cases}$$

Ces points sont sur une même sphère (S) à condition que leurs coordonnées vérifient une même équation de la forme

$$-a^2\beta\gamma - b^2\gamma\alpha - c^2\alpha\beta - a'^2\delta\alpha - b'^2\delta\beta - c'^2\delta\gamma \\ + (\alpha+\beta+\gamma+\delta)(u\alpha + v\beta + w\gamma + h\delta) = 0.$$

On obtient ainsi

$$-c^2\alpha_0\beta_0 + (\alpha_0+\beta_0)(u\alpha_0 + v\beta_0) = 0,$$
$$-c'^2\gamma_0\delta_0 + (\gamma_0+\delta_0)(w\gamma_0 + h\delta_0) = 0,$$

et les relations analogues.

On en déduit

$$u\alpha_0 + v\beta_0 + w\gamma_0 + h\delta_0 = \frac{c^2\alpha_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0} + \frac{c'^2\gamma_0\delta_0}{\gamma_0+\delta_0}.$$

Les équations de (Γ) sont donc

$$(1) \qquad \frac{c^2\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \frac{c'^2\gamma\delta}{\gamma+\delta} = \frac{b^2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma} + \frac{b'^2\beta\delta}{\beta+\delta} = \frac{a^2\beta\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{a'^2\alpha\delta}{\alpha+\delta}.$$

69. *Un point remarquable de* (Γ). — Il s'agit du point P dont les coordonnées barycentriques sont inversement proportionnelles aux quantités

$$l^2 = b^2 + c^2 + a'^2 - a^2 - c'^2 - b'^2,$$
$$m^2 = c^2 + a^2 + b'^2 - b^2 - a'^2 - c'^2,$$
$$n^2 = a^2 + b^2 + c'^2 - c^2 - b'^2 - a'^2,$$
$$p^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

Le premier membre des équations (1) peut en effet s'écrire

$$\frac{c^2}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}} + \frac{c'^2}{\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}}$$

que l'on peut prendre égal à

$$\frac{c^2}{l^2+m^2} + \frac{c'^2}{n^2+p^2} = \frac{c^2}{2(c^2-c'^2)} + \frac{c'^2}{2(c'^2-c^2)} = \frac{1}{2}.$$

De même pour les deux autres membres.

[Notons que les nombres l, m, n, p ne sont pas tous réels bien que leurs carrés le soient car : $l^2 + m^2 + n^2 + p^2 = 0$.]

70. *Points associés de* (Γ). — M $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ étant un point de (Γ), la sphère (S) correspondante recoupe les arêtes du tétraèdre en six autres points. Les droites joignant les points situés sur deux arêtes opposées concourent en un point M′ $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$. Les paramètres de l'équation de (S) étant u, v, w, h, on a

$$-c^2\alpha\beta + (\alpha+\beta)(u\alpha + v\beta) = 0,$$
$$-c^2\alpha'\beta' + (\alpha'+\beta')(u\alpha' + v\beta') = 0,$$

et des relations analogues. Ces 12 relations permettent de calculer u, v, w, h de diverses manières. Il revient au même d'exprimer la puissance de A pour (S) sur les arêtes AB, AC, AD, ou celle de B sur les arêtes BC, BD, BA, etc. On obtient ainsi des relations du type suivant :

$$\frac{c^2\beta\beta'}{(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')} = \frac{b^2\gamma\gamma'}{(\alpha+\gamma)(\alpha'+\gamma')},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{c^2\alpha\alpha'\beta\beta'}{(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')} = \frac{b^2\alpha\alpha'\gamma\gamma'}{(\alpha+\gamma)(\alpha'+\gamma')}$$

ou

$$\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}\right)}{c^2} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\gamma'}\right)}{b^2}.$$

D'une manière générale les rapports suivants sont égaux :

$$(\mathcal{R})\quad \begin{array}{lll} \dfrac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}\right)}{c^2}, & \dfrac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\gamma'}\right)}{b^2}, & \dfrac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\delta'}\right)}{a'^2}, \\[2ex] \dfrac{\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\gamma'}\right)}{a^2}, & \dfrac{\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\delta'}\right)}{b'^2}, & \dfrac{\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\gamma'}+\frac{1}{\delta'}\right)}{c'^2}. \end{array}$$

En les égalant on obtient cinq équations homogènes par rapport à $\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}, \frac{1}{\delta'}$; α, β, γ, δ étant supposés donnés, elles permettent le calcul de $\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}, \frac{1}{\delta'}$, et donc de α', β', γ', δ' (à un facteur près).

Retour au point $P\left(\frac{1}{l^2}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{p^2}\right)$. — Soit P′$(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ son

associé au sens du paragraphe précédent. On a, par exemple,

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\delta}=-\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

Donc en égalant les 3e et 4e rapports de la suite $(\mathcal{R})$,

$$\frac{\dfrac{1}{\alpha'}+\dfrac{1}{\delta'}}{a'^2}+\frac{\dfrac{1}{\beta'}+\dfrac{1}{\gamma'}}{a^2}=0,$$

soit

$$a^2\frac{1}{\alpha'}+a'^2\frac{1}{\beta'}+a'^2\frac{1}{\gamma'}+a^2\frac{1}{\delta'}=0.$$

De même :

$$b'^2\frac{1}{\alpha'}+b^2\frac{1}{\beta'}+b'^2\frac{1}{\gamma'}+b^2\frac{1}{\delta'}=0,$$
$$c'^2\frac{1}{\alpha'}+c'^2\frac{1}{\beta'}+c^2\frac{1}{\gamma'}+c^2\frac{1}{\delta'}=0.$$

De sorte que $\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}, \frac{1}{\delta'}$ sont proportionnels aux déterminants du 3e ordre du tableau

$$\left\|\begin{matrix} a^2 & a'^2 & a'^2 & a^2 \\ b'^2 & b^2 & b'^2 & b^2 \\ c'^2 & c'^2 & c^2 & c^2 \end{matrix}\right\|.$$

Autrement dit, les coordonnées de P′ sont inversement proportionnelles aux quantités

$$l'^2=2(bca')^2+(b'c'a)^2-[(c'a'b)^2+(a'b'c)^2+(abc)^2],$$
$$m'^2=2(cab')^2+(c'a'b)^2-[(a'b'c)^2+(b'c'a)^2+(bca)^2],$$
$$n'^2=2(abc')^2+(a'b'c)^2-[(b'c'a)^2+(c'a'b)^2+(cab)^2],$$
$$p'^2=2(a'b'c')^2+(abc)^2-[(b'c'a)^2+(c'a'b)^2+(a'b'c)^2].$$

Le point P′ coïncide avec le pôle, par rapport au tétraèdre, du plan dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux quantités l'^2, m'^2, n'^2, p'^2. Ce plan est parallèle au plan radical (π') de la sphère circonscrite au tétraèdre et de la sphère (ω') relative aux quantités

$$l''^2=(bca')^2+(b'c'a)^2,$$
$$m''^2=(cab')^2+(c'a'b)^2,$$
$$n''^2=(abc')^2+(a'b'c)^2,$$
$$p''^2=(a'b'c')^2+(abc)^2;$$

On a en effet par exemple

$$l'^2 - m'^2 = 2(l''^2 - m''^2).$$

71. Remarque. — Pour que le centre de gravité G soit sur la courbe (Γ) il faut et il suffit que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ vérifient les équations (1) de (Γ). D'où les conditions

$$c^2 + c'^2 = b^2 + b'^2 = a^2 + a'^2.$$

Donc : il faut et il suffit que la tétraèdre soit orthocentrique.

Dans ces conditions le point G′ associé à G sur (Γ) est le point dont les coordonnées barycentriques α', β', γ', δ' vérifient

$$\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} = c^2, \qquad \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\gamma'} = b^2, \qquad \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'} = a^2.$$

On trouve que α', β', γ' sont proportionnelles à

$$b^2 + c^2 - a^2, \qquad c^2 + a^2 - b^2, \qquad a^2 + b^2 - c^2.$$

Donc dans le plan BCD la trace de AG′ est l'orthocentre de la face BCD; G′ est par suite sur la hauteur issue de A. Finalement G′ se confond avec l'orthocentre H du tétraèdre ABCD.

Les transversales relatives à G sont les bimédianes et celles relatives à H les bihauteurs. On retrouve donc les douze points, deux par arête, définissant la *première* sphère des douze points du tétraèdre orthocentrique.

72. Corollaire. — *Les parallèles aux médianes du tétraèdre* T *menées par le point* M *de coordonnées barycentriques inversement proportionnelles aux quantités*

$$(b^2 + c^2 + a'^2 - a^2 - b'^2 - c'^2), \qquad (c^2 + a^2 + b'^2 - b^2 - c'^2 - a'^2),$$
$$(a^2 + b^2 + c'^2 - c^2 - a'^2 - b'^2), \qquad (a'^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - b^2 - c^2),$$

percent les plans des faces correspondantes en quatre points situés dans un même plan.

D'une manière générale, le lieu des points dont les projections sur les plans des faces du tétraèdre T effectuées parallèlement à des droites fixes sont coplanaires est une surface du troisième ordre (Σ_1). Si l'on désigne par (x_1, y_1, z_1, t_1) les coordonnées du point sur les directions fixes, et avec les conventions habituelles de signes, les directions sont celles des médianes du tétraèdre T, l'équation de (Σ_1) s'écrit

$$(2) \qquad \Sigma y_1 z_1 t_1 . \Delta_a = 0,$$

Δ_a désignant le sinus du trièdre G — BCD de sommet G.

Or, (x, y, z, t) étant les coordonnées tétraédriques normales du point (x_1, y_1, z_1, t_1), on a

$$\frac{y_1}{M_b} = \frac{y}{h_b} = \frac{\beta}{B.h_b},$$

M_b, h_b étant la médiane et la hauteur issues du sommet B du tétraèdre T, β la seconde coordonnée barycentrique (à un facteur inutile près).

L'équation (2), en coordonnées barycentriques, s'écrit donc

$$\Sigma \frac{\beta.M_b}{B.h_b} \cdot \frac{\gamma.M_c}{C.h_c} \cdot \frac{\delta.M_d}{D.h_d} \cdot \Delta_a = 0. \tag{3}$$

Mais

$$\Delta_a = \frac{1}{4} \cdot \frac{V}{6.GB.GC.GD},$$

et l'équation (3) s'écrit, d'abord,

$$\Sigma \frac{\beta.\gamma.\delta}{B.C.D} \cdot \frac{M_b.M_c.M_d}{h_b.h_c.h_d} \cdot \frac{1}{GB.GC.GD} = 0,$$

ensuite

$$\Sigma \frac{\beta.\gamma.\delta.h_a}{B.C.D} = 0, \qquad \Sigma \frac{\beta.\gamma.\delta}{A.B.C.D} = 0.$$

En définitive (Σ_1) a pour équation baryoentrique

$$\Sigma \beta.\gamma.\delta = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma \frac{1}{\alpha} = 0.$$

Or, les coordonnées barycentriques du point M ayant pour inverses les quantités $(b^2 + c^2 + a'^2 - a^2 - b'^2 - c'^2)$, ..., dont la somme est nulle, M est un point de la surface (Σ_1) et il en résulte bien que ses projections, parallèlement aux médianes, sur les plans des faces correspondantes du tétraèdre T sont quatre points situés dans un même plan.

AUTRES GROUPES DE SPHÈRES

73. Des sommets du tétraèdre T ≡ ABCD, comme centres, décrivons quatre sphères quelconques, et de leur centre radical S abaissons les perpendiculaires p_a, p_b, p_c, p_d, sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC. Ces droites coïncident avec les axes radicaux des ternes de sphères (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C).

Soient A′, B′, C′, D′ quatre points quelconques de ces axes. A′, B′, C′, D′ sont les centres de quatre sphères respectivement orthogonales aux sphères (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C) La sphère A, par exemple, coupant orthogonalement les sphères (B′, C′, D′), son centre est situé sur l'axe radical de ces dernières sphères; de même les centres des sphères B, C, D appartiennent respectivement aux axes radicaux des groupes de sphères (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C).

On en conclut que les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, D respectivement sur les plans des faces du tétraèdre A′B′C′D′, concourent en un point S′, centre radical des sphères A′, B′, C′, D′. Les points S, S′ sont par suite confondus avec les centres d'orthologie des tétraèdres (A′B′C′D′, ABCD) et (ABCD, A′B′C′D′).

Prenons sur les droites p_a, p_b, p_c, p_d un second quaterne de points A″, B″, C″, D″, desquels, comme centres, nous décrivons des sphères coupant orthogonalement les ternes de sphères (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C). Soit S″ le centre d'orthologie des tétraèdres T et A″B″C″D″. Les points S′, S″ sont les centres de deux sphères coupant orthogonalement, l'une les sphères A′, B′, C′, D′, l'autre les sphères A″, B″, C″, D″. Les sphères B′, C′, D′ sont orthogonales aux sphères A et S′; donc le plan B′C′D′ est le plan radical des sphères A et S′. De même le plan B″C″D″ est le plan radical des sphères A et S″. Par suite, l'intersection des plans B′C′D′, B″C″D″ appartient au plan radical des sphères S′, S″. En continuant ainsi, on constate que ce dernier plan contient toutes les intersections de deux faces homologues des tétraèdres A′B′C′D′ et A″B″C″D″. Autrement dit, *le plan d'homologie de ces tétraèdres est normal à la droite qui joint les centres d'orthologie des tétraèdres* (ABCD, A′B′C′D′) *et* (ABCD, A″B″C″D″). (Steiner).

74. Soient α_1, α_2, α_3, α_4 et α'_1, α'_2, α'_3, α'_4 les projections orthogonales des points S′, S″ sur les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC du

tétraèdre. La droite AS′, par exemple, est perpendiculaire au plan B′C′D′. Mais AS′ est un diamètre de la sphère $S'\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, et, comme les trièdres $(S' - \alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ et $(S - B'C'D')$ ont leurs arêtes respectivement parallèles, le plan $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ est antiparallèle au plan B′C′D′ par rapport au trièdre $(S - B'C'D')$. De même les plans $\alpha_3\alpha_4\alpha_1$, $\alpha_4\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ sont antiparallèles aux plans C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′ par rapport aux trièdres de sommet S qui leur correspondent.

Le tétraèdre $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ est donc homothétique à un tétraèdre $a'b'c'd'$ dont les sommets, situés sur SA′, SB′, SC′, SD′, sont les transformés des points A′, B′, C′, D′ dans une inversion de centre S et de module arbitraire k^2. Pareillement, le tétraèdre $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4$ est homothétique à un tétraèdre $a''b''c''d''$ obtenu par inversion des points A″, B″, C″, D″, le centre étant S et le module k'^2.

Remarquons aussi que les points S′ et S, S″ et S sont des couples de points homologues dans les homothéties $(a'b'c'd', \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$, $(a''b''c''d'', \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4)$, car ces points sont les concours de parallèles issues de points homologues. Par suite, on a, d'abord,

$$\frac{\overline{S'\alpha_1}}{\overline{Sa'}} = \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2}}{\overline{a'b'}} = m, \qquad \frac{\overline{S''\alpha'_1}}{\overline{Sa''}} = \frac{\overline{\alpha'_1\alpha'_2}}{\overline{a''b''}} = m',$$

ensuite

$$\overline{S'\alpha_1}\,.\,\overline{S''\alpha'_1} = mm'\,.\,\overline{Sa'}\,.\,\overline{Sa''} = \frac{mm'k^2k'^2}{\overline{SA'}\,.\,\overline{SA''}},$$

si bien que

$$\begin{aligned}(\overline{SA'}\,.\,\overline{SA''})\,.\,(\overline{S'\alpha_1}\,.\,\overline{S''\alpha'_1}) &= (\overline{SB'}\,.\,\overline{SB''})\,.\,(\overline{S'\alpha_2}\,.\,\overline{S''\alpha'_2})\\ &= (\overline{SC'}\,.\,\overline{SC''})\,.\,(\overline{S'\alpha_3}\,.\,\overline{S''\alpha'_3}) = (\overline{SD'}\,.\,\overline{SD''})\,.\,(\overline{S'\alpha_4}\,.\,\overline{S''\alpha'_4}),\end{aligned}$$

relation remarquable entre les produits des distances des points S′ et S″ aux plans des faces du tétraèdre T et du point S aux sommets des tétraèdres A′B′C′D′ et A″B″C″D″.

Cette égalité présente un intérêt tout particulier lorsque

$$(1) \qquad \overline{SA'}\,.\,\overline{SA''} = \overline{SB'}\,.\,\overline{SB''} = \overline{SC'}\,.\,\overline{SC''} = \overline{SD'}\,.\,\overline{SD''} \neq 0,$$

c'est-à-dire quand les points A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″, D′ et D″ sont des points inverses dans une inversion de centre S. Alors, en effet,

$$(2) \qquad \overline{S'\alpha_1}\,.\,\overline{S''\alpha'_1} = \overline{S'\alpha_2}\,.\,\overline{S''\alpha'_2} = \overline{S'\alpha_3}\,.\,\overline{S''\alpha'_3} = \overline{S'\alpha_4}\,.\,\overline{S''\alpha'_4},$$

et S′, S″ *sont deux points conjugués isogonaux par rapport au tétraèdre* T, autrement dit, *les foyers d'une quadrique de révolution inscrite à ce tétraèdre. Cette quadrique est un paraboloïde lorsque* S′, *par exemple, appartient à la surface de* Sartiaux *du tétraèdre fondamental.*

75. On obtient un rapport simple entre les mesures des axes δ et $2b$ de la quadrique de révolution de foyers S′, S″ inscrite au tétraèdre T, en fonction des rayons R′, R″ des sphères circonscrites aux tétraèdres A′B′C′D′, A″B″C″D″ et de la puissance d'inversion $\overline{SA'}.\overline{SA''} = p$, en observant que

$$\overline{S'\alpha_1} : \overline{SA''} = \delta : 2R'', \qquad \overline{S''\alpha_1'} : \overline{SA'} = \delta : 2R',$$
$$b^2 = \overline{S'\alpha_1}.\overline{S''\alpha_1'} = \delta^2.p : 4R'R''.$$

Il vient

$$\frac{\delta}{2b} = \sqrt{\frac{R'R''}{p}}. \tag{3}$$

Lorsque $p = R'R''$, les centres S′, S″ des sphères orthogonales aux sphères (A′, B′, C′, D′), (A″, B″, C″, D″) coïncident chacun avec l'un des centres des sphères tangentes aux quatre plans des faces du tétraèdre T.

76. Cas particuliers. — 1° Si les quatre sphères A, B, C, D se coupent trois par trois en A′, B′, C′, D′ et en A″, B″, C″, D″, on obtient cette proposition :

Théorème. — *Quatre sphères* A, B, C, D, *décrites des sommets d'un tétraèdre* T, *comme centres, se coupent trois par trois aux points* (A′, A″), (B′, B″), (C′, C″), (D′, D″) *qui peuvent être répartis en les huit quaternes*

A′, B′, C′, D′	et	A″, B″, C″, D″;		A″, B′, C′, D′	et	A′, B″, C″, D″;	
B″, C′, D′, A′	et	B′, C″, D″, A″;		C″, D′, A′, B′	et	C′, D″, A″, B″;	
D″, A′, B′, C′	et	D′, A″, B″, C″;		A′, B′, C″, D″	et	A″, B″, C′, D′;	
B′, C′, D″, A″	et	B″, C″, D′, A′;		C′, D′, A″, B″	et	C″, D″, A′, B′.	

Les centres ω, ω′ *des deux sphères passant par les quaternes de points d'un même groupe sont conjugués isogonaux par rapport au tétraèdre* T *et alignés sur le centre radical* S *des sphères* A, B, C, D. *Les quaternes de points considérés déterminent quatre couples de tétraèdres homologiques. Le point* S *coïncide avec l'un des centres de similitude des sphères* (ω), (ω′) *et la droite* Sωω′ *est normale au plan d'homologie des tétraèdres correspondants. Les points* ω, ω′ *sont les foyers d'une quadrique de révolution inscrite au tétraèdre* T *dont la sphère principale relative à l'axe focal a pour diamètre la somme ou la différence des rayons des sphères* (ω), (ω′). *Si les points* A″, B″, C″, D″, *par exemple, sont coplanaires, le centre* ω *de la sphère* A′B′C′D′ *est situé sur la surface de* Sartiaux *du tétraèdre* T *et réciproquement.*

2° Si les sphères A, B, C, D sont égales, leur centre radical S coïn-

cide avec le centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre T et les centres des sphères (ω), (ω') sont alignés sur le point O.

Lorsque le rayon des sphères égales A, B, C, D varie, les points ω, ω' décrivent une courbe gauche du septième ordre ayant les points A, B, C, D, O comme points triconiques [1], c'est-à-dire les points d'où la courbe est projetée par des cônes cubiques. Les droites-supports des couples de points isogonaux constituant le complexe du troisième ordre des génératrices des quadriques passant par les huit centres O_i des sphères tangentes aux quatre plans des faces du tétraèdre T, celles de ces droites qui passent par le point O forment un cône du troisième ordre. Ce cône est coupé par un plan quelconque passant par O suivant trois droites sur chacune desquelles se trouve un couple de points isogonaux.

Ces six points et le point O forment sept points de la courbe situés dans un tel plan.

La courbe peut se représenter comme intersection partielle de deux cônes du troisième ordre de sommets A et B par exemple. Si α_1, α_2, α_3, α_4 désignent les coordonnées normales du point O, ces équations sont

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} & \frac{1}{x_4} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_3} & \frac{1}{x_4} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\alpha_2 x_2 (x_3^2 - x_4^2) + \alpha_3 x_3 (x_4^2 - x_2^2) + \alpha_4 x_4 (x_2^2 - x_3^2) = 0$$

et

$$\alpha_1 x_1 (x_3^2 - x_4^2) + \alpha_3 x_3 (x_4^2 - x_1^2) + \alpha_4 x_4 (x_1^2 - x_3^2) = 0,$$

cônes qui ont pour plan tangent commun

$$\alpha_3 x_3 - \alpha_4 x_4 = 0$$

le long de l'arête AB et qui par suite se coupent suivant cette arête comptée deux fois et une courbe du septième ordre.

Outre les points A, B, C, D, O, la courbe passe par les huit centres O_i des sphères quadritangentes du tétraèdre T.

Théorème. — *Le plan tangent en un point* P *d'une quadrique passant par les huit centres* O_i *des sphères quadritangentes d'un tétraèdre* T *contient l'isogonal* P′ *de* P.

En effet, les points P et P′ sont harmoniques par rapport aux

[1] Schoute (A. F. A. S., 1887, p. 190).

points d'intersection de la droite PP′ avec toute quadrique passant par les huit points O_i et, par suite, le second point de rencontre de la droite PP′ avec la quadrique en question coïncide nécessairement avec le point P.

COROLLAIRE. — *La tangente en un point* P *à une biquadratique contenant les huit points* O_i *contient l'isogonal* P′ *du point* P *par rapport au tétraèdre* T.

CONCLUSION. — *Le lieu des couples de points isogonaux alignés sur le centre* O *de la sphère circonscrite au tétraèdre* T *se confond avec le lieu des points de contact des tangentes issues du point* O *aux biquadratiques contenant les huit centres* O_i *des sphères quadritangentes du tétraèdre fondamental.*

N. B. — Ces propriétés, dont l'analogie avec des remarques connues relatives à un triangle est complète, s'étendent aisément à des couples de points isogonaux alignés sur un point donné Q. Cette hypothèse est considérée par SCHOUTE (*loc. cit.*).

3° Si l'un des produits (1) est nul, on ne peut plus conclure à la relation (2); les points S et S′ sont confondus et la sphère S′ coïncide dans ce cas avec la sphère orthogonale aux sphères A, B, C, D. Pour que le point S″ soit le conjugué isogonal de S′, par rapport au tétraèdre T, il faut et il suffit que les droites AS″, BS″, CS″, DS″ soient respectivement perpendiculaires aux plans des faces du tétraèdre podaire de S par rapport au tétraèdre T, autrement dit, que le tétraèdre A″B″C″D″ soit homothétique à ce tétraèdre podaire.

Voici une application de ce cas particulier.

Soit un tétraèdre ABCD dont les plans des faces sont coupés respectivement par une sphère de centre S suivant quatre cercles de centres O_a, O_b, O_c, O_d. Considérons les sphères de centres A, B, C, D orthogonales à la sphère S; leur centre radical est S et leurs axes radicaux, si on les groupe trois à trois, les droites SO_a, SO_b, SO_c, SO_d.

Désignons par (M, N), (P, Q) les extrémités des diamètres du grand cercle de la sphère B et du cercle O_a, tous deux dirigés suivant BO_a. Ce grand cercle est orthogonal au cercle O_a; par suite la division (M, P, N, Q) est harmonique et la sphère dont O_a est un grand cercle est orthogonale à la sphère B. On conclut de même que cette sphère O_a coupe orthogonalement les sphères C et D et que, dans les autres faces, les sphères qui ont O_b, O_c, O_d pour grands cercles coupent orthogonalement les sphères (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C). D'après ce qui précède, le centre radical S″ de ces sphères O_a, O_b, O_c, O_d est le conjugué isogonal du centre radical S des sphères A, B, C, D.

D'où ce théorème : *si une sphère* S *coupe les plans des faces* BCD, CDA, DAB, ABC *du tétraèdre* ABCD *suivant les cercles* O_a, O_b, O_c, O_d, *le centre radical des sphères décrites sur ces cercles comme grands cercles se confond avec le conjugué isogonal* S′ *du point* S *par rapport au tétraèdre.*

Théorème réciproque. — *Des projections orthogonales* α, β, γ, δ *d'un point arbitraire* S *sur les plans des faces d'un tétraèdre* ABCD, *comme centres, on décrit les sphères orthogonales à une sphère* S′, *réelle ou imaginaire, dont le centre* S′ *coïncide avec le conjugué isogonal du point* S *par rapport au tétraèdre. Ces quatre sphères coupent les plans des faces du tétraèdre suivant quatre cercles* O_a, O_b, O_c, O_d *situés sur une même sphère de centre* S.

En effet, si l'on désigne par r, ρ et d les rayons des sphères $\alpha\beta\gamma\delta$, S′ et la distance SS′, on obtient, de proche en proche, pour un point a de la circonférence O_α,

$$\overline{Sa}^2 = \overline{a\alpha}^2 + \overline{S\alpha}^2 = \overline{S'\alpha}^2 - \rho^2 + \overline{S\alpha}^2 = 2\overline{\alpha\omega}^2 + \frac{\overline{SS'}^2}{2} - \rho^2$$
$$= \frac{1}{2}(4r^2 + d^2 - 2\rho^2) = \text{constante},$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

4° Quand les points A′, B′, C′, D′ et A″, B″, C″, D″ sont situés sur une même sphère Σ, les relations (1) et (2) sont évidentes. D'autre part, si $P_{S'}$, $P_{S''}$ et P_A représentent les puissances respectives du centre radical S des sphères A, B, C, D, pour les sphères S′, S″ et A, et K′, K″ les projections orthogonales du point S sur les plans B′C′D′, B″C″D″, on obtient, d'abord,

$$P_{S'} - P_A = 2\overline{S'A}.\overline{SK'}, \qquad P_{S''} - P_A = 2\overline{S''A}.\overline{SK''},$$

ensuite

$$P_{S'} + P_{S''} = 2(\overline{S'A}.\overline{SK'} + \overline{S''A}.\overline{SK''} + P_A).$$

Enfin, dans le cas présent, il résulte des homothéties des tétraèdres SB″C″D″ et $S'\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, SB′C′D′ et $S''\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4$ que la somme

$$\overline{S'A}.\overline{SK'} + \overline{S''A}.\overline{SK''}$$

est nulle. D'où cette proposition : *si les points* A′, B′, C′, D′ *et* A″, B″, C″, D″ *sont sur une même sphère* Σ, *la somme algébrique des puissances du centre radical* S *des sphères* A, B, C, D, *par rapport aux sphères* S′ *et* S″, *reste constante lorsque* Σ *varie.*

77. Considérons deux sphères (O, R), (O′, R′), une autre sphère (ω) dont le centre se déplace sur la sphère (O, R) et assujettie, de plus,

à couper orthogonalement la sphère (O′, R′). Le plan OωO′ intercepte sur ces sphères des grands cercles et si l'on désigne par A et B, A′ et B′ les points de rencontre des cercles (O, R) et (ω), (O′, R′) et (ω), par d la distance OO′, par K, Q les projections orthogonales du point O′ sur les droites Oω, AB et par M le point de rencontre des droites Oω et AB, on obtient, d'abord,

$$\overline{\omega O'}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{O\omega}^2 - 2\overline{O\omega}.\overline{OK}, \tag{4}$$

$$\overline{\omega A'}^2 = \overline{\omega A}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{O\omega}^2 - 2\overline{O\omega}.\overline{OM}, \tag{5}$$

ensuite

$$\overline{O'A'}^2 = \overline{OO'}^2 - \overline{OA}^2 - 2\overline{O\omega}.\overline{MK},$$

enfin

$$\overline{O'Q} = \overline{MK} = \frac{d^2 - R^2 - R'^2}{2R} = \sigma. \tag{6}$$

Dès lors, *le plan radical* (P) *des sphères* (O, R) *et* (ω) *enveloppe une sphère, de rayon* σ, *concentrique à la sphère* (O′, R′), *lorsque le point* ω *varie sur la sphère* (O, R).

Réciproquement, si le plan radical (P) de deux sphères (O, R) et (ω) enveloppe une sphère donnée (O′, R′), le centre ω étant un point de la sphère (O, R), la sphère (ω) est orthogonale à une sphère de centre O′, car, d'après les relations (4) et (5), on a

$$\overline{\omega O'}^2 - \overline{\omega A'}^2 = d^2 - R^2 - 2\overline{O\omega}.\overline{MK} = \text{constante}.$$

Lorsque la sphère (O′, R′) est extérieure à la sphère (O, R), le plan (P) ne rencontre la sphère (O, R) que si l'on a $\omega A' \leqslant 2R$.

Le point ω est alors situé sur la zone de la sphère (O, R) déterminée par une sphère $(O', \sqrt{4R^2 + R'^2})$, intérieure à la précédente. Le plan (P) enveloppe la zone correspondante de la sphère (O′, σ) de rayon $\sigma = \dfrac{d^2 - R^2 - R'^2}{2R}$.

Si la sphère (O′, R′) est intérieure à la sphère (O, R), tous les points de celle-ci sont intérieurs à la sphère $(O', \sqrt{4R^2 + R'^2})$ et l'enveloppe du plan (P) comprend la totalité de la surface de la sphère (O′, σ), de rayon $\sigma = \dfrac{-d^2 + R^2 + R'^2}{2R}$.

Quand les sphères (O, R), (O′, R′) sont orthogonales, $d^2 = R^2 + R'^2$; le plan (P) passe constamment par le point fixe O′.

La sphère (ω′) du faisceau déterminé par la sphère (O, R) et le plan (P), dont le centre ω′ coïncide avec le point diamétralement opposé au centre de la sphère (ω) sur la sphère (O, R), est aussi

orthogonale à une sphère concentrique à la sphère (O′, R′) et ayant pour carré du rayon

$$\sigma'^2 = 2(d^2 - R^2) - R'^2,$$

car il est clair que

$$\overline{\omega'O'}^2 - \overline{\omega'A}^2 = 2(d^2 - R^2) - R'^2.$$

Corollaire. — *Le plan radical* (P′) *des sphères* (O′, R′) *et* (ω) *enveloppe une quadrique de révolution de foyer* O′.

78. Reprenons le cas particulier du paragraphe 75 où les centres des sphères (S′, R′), (S″, R″) orthogonales aux sphères (A′, B′, C′, D′), (A″, B″, C″, D″) coïncident chacun avec l'un des centres des sphères quadritangentes du tétraèdre T. Les remarques contenues dans les paragraphes 76, 1° et 77, appliquées à cette configuration spéciale, conduisent à des propriétés intéressantes qui ont d'ailleurs leurs analogues dans le triangle.

Les diamètres de la sphère (O, R) *circonscrite à un tétraèdre* ABCD, *qui sont perpendiculaires aux plans des faces, percent respectivement la sphère aux points* A′ *et* A″, B′ *et* B″, C′ *et* C″, D′ *et* D″. *Les quatre sphères de centres* A′, B′, C′, D′ *qui passent aux sommets des faces correspondantes* BCD, CDA, DAB, ABC *et les quatre sphères de centres* A″, B″, C″, D″, *qui contiennent les mêmes ternes de sommets du tétraèdre, ont même centre radical, le centre* I *de la sphère inscrite au tétraèdre* ABCD.

Les axes radicaux des sphères A′, B′, C′, D′ puis des sphères A″, B″, C″, D″, prises trois à trois, sont les droites AI, BI, CI, DI. Désignons par a', b', c', d' et a'', b'', c'', d'' les intersections de ces sphères trois à trois.

Les centres ω′, ω″ *des sphères circonscrites aux tétraèdres* a′b′c′d′ *et* a″b″c″d″ *sont situés sur la droite* IO *des centres des sphères inscrite et circonscrite au tétraèdre* ABCD. *Cette droite* IO *est perpendiculaire aux plans d'homologie des tétraèdres* (ABCD, a′b′c′d′), (ABCD, a″b″c″d″) [1]. *Ces plans d'homologie sont d'ailleurs les plans radicaux des sphères* (O, R) *et* (ω′), (O, R) *et* (ω″). *Le point* I *coïncide avec un centre de similitude de ces sphères* (O, R) *et* (ω′), (O, R) *et* (ω″). *Enfin,* O *et* ω′, O *et* ω″ *sont des couples de points conjugués isogonaux par rapport aux tétraèdres* A′B′C′D′ *et* A″B″C″D″.

Les points A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″, D′ et D″ peuvent être répartis

---

[1] On peut remarquer aussi que les tétraèdres $a'b'c'd'$ et $a''b''c''d''$ sont homothétiques, le centre étant le point I.

en les huit groupes de quatre points

(E) A′, B′, C′, D′ et A″, B″, C″, D″;

(F) A″, B′, C′, D′ et A′, B″, C″, D″; B″, C′, D′, A′ et B′, C″, D″, A″;
C″, D′, A′, B′ et C′, D″, A″, B″; D″, A′, B′, C′ et D′, A″, B″, C″;
A′, B′, C″, D″ et A″, B″, C′, D′; B′, C′, D″, A″ et B″, C″, D′, A′;

(G) C′, D′, A″, B″ et C″, D″, A′, B′.

Dans chacune des configurations (F) et (G), si l'on considère les sphères déterminées pareillement à celle de la configuration (E) précédente, deux quadruples de sphères qui se correspondent ont même centre radical.

En résumé, pour huit groupes de quatre sphères (E), (F), (G), *les centres radicaux sont le centre* I *de la sphère inscrite, les centres* I_a, I_b, I_c, I_d *des sphères exinscrites et les centres* I_1, I_2, I_3 *des sphères des combles du tétraèdre* ABCD, *quand elles existent.*

D'autre part, d'après la proposition réciproque invoquée au paragraphe 77, les sphères (A′, B′, C′, D′) et les sphères (A″, B″, C″, D″) respectivement, coupent orthogonalement une sphère (I, R_1) et une sphère (I, R_2) concentriques à la sphère (I, r) inscrite au tétraèdre ABCD, et, en vertu de la formule (6), on obtient

$$R_1^2 = d^2 - R^2 + 2Rr, \qquad R_2^2 = d^2 - R^2 - 2Rr,$$

en désignant par d la distance OI des centres des sphères circonscrite et inscrite au tétraèdre T.

Les sommets des tétraèdres $a'b'c'd'$ et $a''b''c''d''$ correspondent aux transformés des sommets du tétraèdre ABCD dans les inversions de centre I et de modules R_1^2 et R_2^2. On en déduit aisément les mesures

$$\rho' = \frac{R(d^2 - R^2 + 2Rr)}{d^2 - R^2}, \qquad \rho'' = \frac{R(d^2 - R^2 - 2Rr)}{d^2 - R^2}$$

des rayons des sphères $a'b'c'd'$ et $a''b''c''d''$ et les égalités

$$\frac{\overline{O\omega'}}{\overline{IO}} = -\frac{2Rr}{d^2 - R^2} = -\frac{\overline{O\omega''}}{\overline{IO}}.$$

Corollaire. — *Les tétraèdres* A′B′C′D′ *et* A″B″C″D″ *sont chacun circonscrits à une quadrique de révolution dont un foyer se confond avec le centre* O *de la sphère circonscrite au tétraèdre* ABCD *tandis que les deux autres foyers, symétriques par rapport au point* O, *coïncident avec les centres* ω' *et* ω'' *des sphères* a′b′c′d′ *et* a″b″c″d″.

Les axes focaux de ces quadriques ont pour mesures

$$\alpha_1 = R - \rho' = \frac{2R^2 r}{R^2 - d^2} = \alpha_2,$$

et les axes non focaux,

$$\beta_1 = \frac{2Rr}{\sqrt{R^2 - d^2}} = \beta_2.$$

Ces remarques peuvent aussi être étendues aux groupes de points (F) et (G).

79. On considère une sphère arbitraire (ω, ρ) et les sphères de centres A_2, B_2, C_2, D_2 qui coupent orthogonalement la première et passent respectivement par les sommets (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C) du tétraèdre T. Si l'on désigne par d_a, d_b, d_c, d_d les distances du centre de la sphère (ω, ρ) aux plans BCD, CDA, DAB, ABC, par d la distance $O\omega$ et par P_{A_2}, P_O les puissances du point ω pour les sphères (A_2), (O, R), ce qui donne déjà, d'après une propriété classique,

$$P_{A_2} - P_O = 2\overline{OA_2} \cdot d_a,$$

on obtient, d'abord,

$$\overline{OA_2} = \frac{\rho^2 - d^2 + R^2}{2d_a}, \tag{7}$$

ensuite

$$6V.\alpha.\overline{OA_2} = (\rho^2 - d^2 + R^2).A, \qquad 6V.\beta.\overline{OB_2} = (\rho^2 - d^2 + R^2).B,$$
$$6V.\gamma.\overline{OC_2} = (\rho^2 - d^2 + R^2).C, \qquad 6V.\delta.\overline{OD_2} = (\rho^2 - d^2 + R^2).D,$$

α, β, γ, δ étant les coordonnées barycentriques du point ω par rapport au tétraèdre T. Par suite, les mesures des segments

$$\alpha.\overline{OA_2}, \qquad \beta.\overline{OB_2}, \qquad \gamma.\overline{OC_2}, \qquad \delta.\overline{OD_2},$$

sont proportionnelles à celles des aires A, B, C, D des faces du tétraèdre T auxquelles ils sont perpendiculaires. Les forces représentées par $\alpha.\overline{OA_2}$, $\beta.\overline{OB_2}$, $\gamma.\overline{OC_2}$, $\delta.\overline{OD_2}$ se font donc équilibre et, en conséquence, *le centre* O *de la sphère* ABCD *coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre ayant pour sommets les extrémités de ces forces et qui se confond avec le centre des moyennes distances des points* A_2, B_2, C_2, D_2 *affectés des masses* α, β, γ, δ.

COROLLAIRES. — 1° *Lorsque le centre de la sphère* (ω, ρ) *coïncide avec le centre de gravité* G *du tétraèdre* T, *le centre de gravité du*

tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ *se confond avec le centre* O *de la sphère circonscrite au tétraèdre* T.

2° *Le centre de gravité du tétraèdre ayant pour sommets les centres des sphères* GBCD, GCDA, GDAB, GABC *coïncide avec le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* T.

3° *La sphère circonscrite au tétraèdre* $A_2B_2C_2D_2$ *ayant pour sommets les centres des sphères* IBCD, ICDA, IDAB, IABC, *est concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre* T.

Car, d'après la relation (7),

$$OA_2 = \frac{R^2 - d^2}{2r} = OB_2 = OC_2 = OD_2.$$

Si ρ représente la mesure du rayon de la sphère $A_2B_2C_2D_2$, on obtient la formule

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2\rho r$$

qui étend à un tétraèdre quelconque la relation d'Euler dans un triangle. Des conclusions analogues ont lieu pour les autres sphères quadritangentes du tétraèdre T et pour les distances OI_i, $(i = a, b, c, d)$, et OI_1, OI_2, OI_3 du centre de la sphère (O, R) à ceux de ces sphères.

4° *La sphère circonscrite au tétraèdre* $A_2B_2C_2D_2$ *ayant pour sommets les centres des sphères circonscrites aux faces du tétraèdre* T *et coupant orthogonalement une sphère, de rayon* r', *concentrique à l'une des sphères quadritangentes est concentrique à la sphère* (O, R).

En effet, en vertu de la relation (7),

$$OA_2 = \frac{r'^2 - d^2 + R^2}{2r_j} = OB_2 = OC_2 = OD_2,$$

r_j étant le rayon de la sphère quadritangente considérée.

5° *Les sphères tangentes intérieurement (ou extérieurement) à l'une des sphères quadritangentes, et circonscrites aux faces* BCD, CDA, DAB, ABC *sont tangentes à une sphère concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre* T.

En considérant, par exemple, les sphères (S'_i, R'_i) tangentes intérieurement à la sphère inscrite (I, r), et circonscrites aux faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre T, on obtient, en grandeur et en signe, d'abord,

$$2OS'_a \cdot r = \overline{IS'_a}^2 - R'^2_i - (\overline{IO}^2 - R^2) = (R'_a - r)^2 - R'^2_a - d^2 + R^2,$$

ensuite

$$OS'_a + R'_a = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2r},$$

ce qui donne

$$R' = \rho + \frac{r}{2} = OS'_a + R'_a = OS'_b + R'_b = OS'_c + R'_c = OS'_d + R'_d,$$

ρ désignant la mesure du rayon de la sphère $A_2B_2C_2D_2$, (3°), concentrique à la sphère (O, R).

Les sphères (S'_i, R'_i) sont donc tangentes intérieurement à la sphère (O, R') qui passe par les points A'', B'', C'', D'' situés sur les droites OA_2, OB_2, OC_2, OD_2 et tels que l'on ait

$$OA'' = OA_2 + \frac{r}{2} = \rho + \frac{r}{2} = OB'' = OC'' = OD''.$$

Les sphères (S'_i, R'_i) sont par suite circonscrites aux tétraèdres A''BCD, B''CDA, C''DAB, D''ABC et respectivement tangentes aux sphères (I) et (I_a), (I) et (I_b), (I) et (I_c), (I) et (I_d); des conclusions analogues ont lieu quand on remplace la sphère (I) par chacune des sphères des combles (I_1), (I_2), (I_3) si elles existent, d'après le théorème suivant [1] : *Il existe une sphère* (S'_a, R'_a) *qui passe par les sommets* B, C, D *du tétraèdre* T *et qui touche intérieurement les sphères inscrite et exinscrite* (I) *et* (I_a). *Deux sphères quadritangentes appartenant à deux groupes différents*, $[(I_i)]$ ou $[(I), (I_1), (I_2), (I_3)]$, *sont tangentes à une même sphère* (Σ) *passant par trois sommets du tétraèdre. Chaque sphère quadritangente touche quatre sphères* (Σ) *et chacune de celles-ci touche deux sphères quadritangentes. Par trois sommets donnés du tétraèdre passent quatre sphères* (Σ) [2].

6° *Les sphères de centres* A'', B'', C'', D'', (5°), *circonscrites respecti-*

---

[1] R. Bricard, *L'Enseignement scientifique*, 1936, 162.

[2] Le théorème de R. Bricard résulte de la construction des sphères A''BCD, B''CDA, C''DAB, D''ABC. Car il y a, en général, deux sphères (Σ) qui passent par un cercle donné (C) et touchent une sphère (S_1), les points de contact étant ceux des deux plans tangents à (S_1) menés par l'axe radical d du cercle (C) et du cercle intercepté par la sphère (S_1) sur le plan du cercle (C). Dans le cas du cercle BCD et de la sphère inscrite (I, r), [ou exinscrite (I_a, r_a)], au tétraèdre ABCD, l'une des sphères (Σ) est la sphère A''BCD, l'autre, dégénérée, le plan BCD.

D'autre part, cette sphère $(\Sigma) \equiv$ A''BCD tangente à la sphère (I, r), l'est aussi à la sphère (I_a, r_a), car la droite d, qui ne passe pas par l'un des centres de similitude des sphères (I, r), (I_a, r_a), est située dans le plan BCD tangent à l'un des cônes circonscrits aux deux sphères, mais elle n'est pas tangente au second cône circonscrit. Or, pour qu'il y ait deux sphères tangentes à deux sphères (S_1), (S'_1) et passant par un cercle (C), il faut que la droite d définie plus haut soit tangente aux deux cônes circonscrits aux sphères (S_1), (S'_1).

vement aux faces BCD, CDA, DAB, ABC *du tétraèdre* T *coupent orthogonalement la sphère inscrite* (I).

Car la distance du centre A″ de la sphère passant par les points B, C, D et orthogonale à la sphère (I, r), au centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre a pour mesure

$$OA'' = (R^2 + r^2 - d^2) : 2r.$$

Cette remarque s'étend aux sphères des combles quand elles existent.

80. Si les points P, Q partagent les arêtes opposées AB, CD du tétraèdre T dans les rapports égaux

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \frac{m}{n},$$

on sait que la droite PQ coupe la bimédiane $B_1B'_1$ en un point L qui est le milieu du segment rectiligne PQ et qui partage la bimédiane $B_1B'_1$ dans le rapport

$$\frac{B_1L}{LB'_1} = \frac{m}{n}.$$

Cette propriété est une conséquence facile de la théorie des transversales et elle résulte aussi de ce que le lieu de la droite PQ, lorsque le rapport $\frac{m}{n}$ varie, est le paraboloïde hyperbolique dont les côtés du quadrangle gauche ABDC sont des génératrices rectilignes.

On se propose d'évaluer les longueurs des segments PQ et ΩL, en fonction des nombres m, n et des longueurs des arêtes du tétraèdre T dont le point de Monge est Ω.

1° En appliquant le théorème de Stewart relatif aux carrés des distances de trois points collinéaires à un point quelconque, d'abord aux distances des points A, B, P au point Q, puis à celles des points C, D, Q aux points A et B, on obtient les trois relations

$$\overline{PQ}^2 = \frac{n\overline{AQ}^2}{m+n} + \frac{m\overline{BQ}^2}{m+n} - \frac{mnc'^2}{(m+n)^2},$$

$$\overline{AQ}^2 = \frac{nb^2}{m+n} + \frac{ma'^2}{m+n} - \frac{mnc^2}{(m+n)^2},$$

$$\overline{BQ}^2 = \frac{ma^2}{m+n} + \frac{mb'^2}{m+n} - \frac{mnc^2}{(m+n)^2}.$$

Il en résulte que

$$(1) \qquad \overline{PQ}^2 = \frac{1}{(m+n)^2}[n^2b^2 + m^2b'^2 + mn(a^2 + a'^2 - c^2 - c'^2)].$$

2° Lorsque $\frac{m}{n} = 1$, les points P, Q sont les milieux C_1, C'_1 des arêtes opposées AB_1 CD du tétraèdre ; les carrés des bimédianes sont donc

$$\overline{A_1A'_1}^2 = \frac{1}{4}[-a^2 - a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2],$$

$$\overline{B_1B'_1}^2 = \frac{1}{4}[a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2 + c^2 + c'^2],$$

$$\overline{C_1C'_1}^2 = \frac{1}{4}[a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2],$$

d'où l'on déduit que la somme des carrés des bimédianes est

$$\overline{A_1A'_1}^2 + \overline{B_1B'_1}^2 + \overline{C_1C'_1}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2),$$

ou le quart de la somme des carrés des arêtes du tétraèdre.

3° Les points Ω, O étant symétriques par rapport au centre de gravité G du tétraèdre, de même que les points B_1, B'_1, on a

$$\overline{\Omega B_1}^2 = \overline{OB'_1}^2 = R^2 - \frac{1}{4}b'^2, \qquad \overline{\Omega B'_1}^2 = \overline{OB_1}^2 = R^2 - \frac{1}{4}b^2.$$

Or, en vertu du théorème de Stewart,

$$\overline{\Omega L}^2 = \frac{n\overline{\Omega B_1}^2}{m+n} + \frac{m\overline{\Omega B'_1}^2}{m+n} - \frac{mn\overline{B_1B'_1}^2}{(m+n)^2};$$

donc

$$(2) \qquad \overline{\Omega L}^2 = R^2 - \frac{1}{4(m+n)^2}[n^2b'^2 + m^2b^2 + mn(a^2 + a'^2 + c^2 + c'^2)].$$

4° Des relations (1) et (2), on déduit que la puissance du point de Monge Ω par rapport à la sphère décrite sur le segment rectiligne PQ comme diamètre, est

$$\overline{\Omega L}^2 - \frac{1}{4}\overline{PQ}^2 = R^2 - \frac{1}{4(m+n)^2}[(m^2+n^2)(b^2+b'^2) + 2mn(a^2+a'^2)].$$

Cette puissance conserve donc la même valeur quand on y permute m avec n; c'est-à-dire quand on remplace les points P, Q par leurs isotomiques sur les segments rectilignes AB, CD. On est ainsi conduit à ce théorème qui généralise une propriété connue : *Etant donné un tétraèdre quelconque* ABCD, *si les points* P, Q *partagent les arêtes opposées* AB, CD *dans le même rapport, et si* P′, Q′ *partagent ces deux arêtes dans le rapport inverse du précédent, le point de* MONGE *a la même puissance pour les sphères décrites sur les segments rectilignes* PQ, P′Q′ *comme diamètres.*

Les centres des deux sphères ou les milieux des segments PQ, P′Q′, sont les points L, L′ qui partagent la bimédiane $B_1B'_1$ dans les rapports suivant lesquels les points P et P′, Q et Q′ partagent les arêtes AB, CD, et les points B_1, B'_1 sont les milieux des arêtes AC, BD. La propriété est donc applicable aux sphères décrites sur les segments PQ′, P′Q comme diamètres, et l'on observe que les points P et P′, Q et Q′ partagent les arêtes AB, DC dans les mêmes rapports inverses; les centres de ces sphères ou les milieux des segments PQ′, P′Q partagent de la même manière la médiane $A_1A'_1$. La valeur de la puissance du point Ω pour ces deux sphères se déduit de la relation (2) en permutant $a^2 + a'^2$ avec $b^2 + b'^2$.

Donc, *à une même valeur du rapport* $\frac{m}{n}$, *correspondent, sur chaque bimédiane, deux points équidistants du centre de gravité du tétraèdre et, sur chaque arête, deux points équidistants du milieu de cette arête; les points situés sur une bimédiane sont les centres de symétrie de deux parallélogrammes dont les sommets opposés sont les points situés sur deux autres couples d'arêtes opposées du tétraèdre; les diagonales dont les extrémités sont sur les mêmes arêtes opposées sont les diamètres de sphères dont le plan radical est le plan perpendiculaire à la bimédiane considérée par le point de* MONGE *du tétraèdre. Si les arêtes dont la bimédiane joint les milieux sont perpendiculaires, les parallélogrammes sont des rectangles et les sphères décrites sur les diagonales de chacun d'eux comme diamètres se correspondent.*

Ces sphères se réduisent aussi à celles décrites sur les arêtes opposées, quel que soit le tétraèdre, si le rapport $\frac{m}{n} = 0$.

81. Les résultats obtenus dans le cas d'un tétraèdre quelconque se simplifient dans le cas particulier d'un tétraèdre orthocentrique T. En effet, dans cette hypothèse,

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2;$$

de sorte que

$$\overline{PQ}^2 = \frac{n^2b^2 + m^2b'^2}{(m+n)^2}; \qquad \overline{A_1A_1'}^2 = \overline{B_1B_1'}^2 = \overline{C_1C_1'}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a'^2);$$

$$\overline{\Omega L}^2 = R^2 - \frac{1}{4(m+n)^2}\left[n^2b'^2 + m^2b^2 + 2mn(b^2 + b'^2)\right];$$

$$\overline{\Omega L}^2 - \frac{1}{4}\overline{PQ}^2 = R^2 - \frac{1}{4}(a^2 + a'^2) = \rho^2,$$

ρ étant le rayon de la sphère conjuguée au tétraèdre.

De la dernière formule, il résulte : *Dans tout tétraèdre orthocentrique, si les points* P, Q *partagent les arêtes opposées* AB, CD *dans le même rapport, la sphère décrite sur* PQ *comme diamètre est orthogonale à la sphère conjuguée.*

En particulier, *dans tout tétraèdre orthocentrique, la sphère conjuguée est orthogonale aux sphères décrites sur les arêtes comme diamètres et à la* première *sphère des douze points.*

Il résulte d'ailleurs de ces propriétés que : *La sphère conjuguée au tétraèdre orthocentrique* T *est le lieu d'un point* M *dont les plans polaires par rapport aux sphères décrites sur les arêtes comme diamètres, à la* première *sphère des douze points, et, en général, à toute sphère décrite sur un segment dont les extrémités partagent deux arêtes opposées dans le même rapport, comme diamètre, concourent au point* M′ *diamétralement opposé au point* M *sur la sphère conjuguée.*

SPHÈRES ASSOCIÉES A UN POLYGONE GAUCHE

Polygone gauche quelconque.

82. Notations. — A chaque sommet A_i, ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), d'un polygone gauche $(P) \equiv A_1A_2 \ldots A_n$, on fait correspondre le polygone (P_i) déterminé par tous les autres. Soient G le barycentre des sommets (A_i) du polygone (P); G_i celui des sommets de chacun des polygones (P_i). Les points G_i se confondent avec les transformés des points A_i par l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{n-1}\right)$. (Bellavitis).

Convenons d'appeler *médianes* du polygone (P) les segments A_iG' qui joignent les sommets du polygone fondamental (P) à ceux de son *complémentaire* $(p) \equiv G_1G_2G_3 \ldots G_n$ et désignons par K^2 la somme des carrés des distances des sommets du polygone (P) pris deux à deux de toutes les manières possibles; par K_i^2 la somme analogue des

carrés des distances des sommets du polygone (P_i) et par k_i^2 la somme des carrés des $(n-1)$ côtés aboutissant au sommet A_i.

On a

$$K_i^2 + k_i^2 = K^2, \quad \Sigma k_i^2 = 2K^2, \quad \Sigma K_i^2 = (n-2)K^2, \quad \Sigma(K_i^2 + k_i^2) = n \,.\, K^2.$$

83. Relations métriques. — Par application du théorème de Leibniz au point A_i pour les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on obtient la formule

$$(1) \qquad \overline{A_iG}^2 = \frac{1}{n^2}(nk_i^2 - K^2),$$

dont il résulte, d'une part,

$$(2) \qquad \Sigma_{i=1}^n \overline{A_iG}^2 = \frac{1}{n^2}(n\Sigma k_i^2 - nK^2) = \frac{1}{n}(\Sigma k_i^2 - K^2) = \frac{1}{n}(2K^2 - K^2) = \frac{K^2}{n},$$

et, d'autre part,

$$(3) \qquad \overline{A_iG_i}^2 = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot (nk_i^2 - K^2).$$

84. Sphère fondamentale du polygone (P). Théorème. — *Le lieu des points* M *dont la somme des carrés des distances aux sommets* A_i *du polygone* (P) *est égale à la somme* K^2 *des carrés des distances des sommets pris deux à deux de toutes les manières possibles est une sphère* (G, σ_P) *dont le carré du rayon vaut le* $\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{\text{ème}}$ *de* K^2.

Par hypothèse et en raison du théorème de Leibniz,

$$K^2 = \Sigma\overline{MA_i}^2 = \Sigma\overline{GA_i}^2 + n.\overline{MG}^2;$$

d'où

$$(4) \qquad \overline{GM}^2 = \frac{1}{n}(K^2 - \Sigma\overline{GA_i}^2) = \frac{n-1}{n^2} \cdot K^2 = \sigma_P^2.$$

Corollaire. — *La somme des puissances des sommets de* (P) *pour la sphère fondamentale vaut le* $\left(-\frac{n-2}{n^2}\right)^{\text{ème}}$ *de* K^2.

Car la puissance d'un sommet A_i par rapport à la sphère (G, σ_P) est égale à $-\frac{K_i^2}{n}$.

Corollaire. — *Dans un tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$, *la sphère fondamentale* (G, σ_P) *se confond avec la sphère orthoptique de l'ellipsoïde de* Steiner *circonscrit.*

Car [1]

$$\sigma_P^2 = \frac{3}{16} \cdot K^2.$$

COROLLAIRE. — *Dans un triangle* $A_1A_2A_3$, *la sphère fondamentale* (G, σ_P) *coïncide avec la sphère décrite sur le cercle orthoptique de l'ellipse de* STEINER *circonscrite comme grand cercle.*

Car

$$\sigma_P^2 = \frac{2}{9} K^2.$$

85. FAISCEAUX REMARQUABLES DE SPHÈRES. THÉORÈME. — *La sphère* (a_i) *décrite sur la médiane* A_iG_i *du polygone* (P) *comme diamètre, la sphère fondamentale* (G, σ_p) *du polygone complémentaire* (p) *et la sphère fondamentale* (G_i, σ_{p_i}) *du polygone complémentaire* (p_i) *de* (P_i) *appartiennent à un même faisceau* (F_i).

La sphère (G, σ_p) étant la transformée de la sphère (G, σ_P) par l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{n-1}\right)$ et la sphère (G_i, σ_{p_i}) la transformée de la sphère fondamentale (G_i, σ_{P_i}) du polygone (P_i) par l'homothétie $\left(G_i, -\frac{1}{n-2}\right)$, on obtient, en vertu de l'expression (4) de σ_P^2 qui entraîne celle de $\sigma_{P_i}^2$,

$$(5) \qquad \sigma_p^2 = \frac{K^2}{(n-1)n^2}, \qquad \sigma_{p_i}^2 = \frac{K_i^2}{(n-2)(n-1)^2}. \qquad (6)$$

En comparant les distances

$$(7) \qquad d_1 = \frac{\overline{A_iG}^2 - \sigma_p^2}{2Ga_i}, \qquad d_2 = \frac{\overline{A_iG_i}^2 - \sigma_{p_i}^2}{2G_ia_i} \qquad (8)$$

du point A_i à chacun des plans radicaux des sphères (G, σ_p) et (A_i), (G_i, σ_{p_i}) et (A_i) et en observant que

$$(9) \qquad Ga_i = \frac{n-2}{n} \cdot A_iG_i,$$

on constate que $d_1 = d_2$. Les sphères en cause forment donc un faisceau linéaire (F_i).

---

[1] E. TURRIÈRE, *L'Enseignement mathématique* (Genève), 1931, 70.

COROLLAIRE. — *La sphère fondamentale* (G, σ_p) *du polygone* (p) *est commune aux* n *faisceaux* (F_i) *déterminés par les sphères* (A_i) *et* (G_i, σ_{pi}).

COROLLAIRE. — *Le rapport des puissances du sommet* A_i *du polygone* (P), *par rapport aux sphères fondamentales des polygones* (p) *et* (p_i) *est égal à* $\frac{n-2}{n}$.

Car, en raison des relations (6) à (9),

$$Ga_i : G_i a_i = (n-2) : n.$$

COROLLAIRE. — *Dans un tétraèdre, les sphères décrites sur une médiane comme diamètre et sur le cercle orthoptique de l'ellipse de* STEINER *inscrite dans la face opposée comme grand cercle et la sphère orthoptique de l'ellipsoïde de* STEINER *inscrit forment un faisceau.*

COROLLAIRE. — *Dans un triangle, les cercles décrits sur une médiane et sur le côté opposé comme diamètres et le cercle orthoptique de l'ellipse de* STEINER *inscrite forment un faisceau.*

Polygone dont les sommets sont cosphériques.

86. THÉORÈME. — *Les plans perpendiculaires menés du barycentre de* (n—2) *quelconques des sommets du polygone* (P) *dont les sommets* A *sont sur une sphère* (O, R) *sur la corde qui passe par les deux sommets restants concourent en un même point* Ω (Point de KANTOR) [1].

Le barycentre G des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ divise dans le rapport $\frac{2}{n-2}$ la distance du barycentre F des points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ au milieu M de la distance $A_{n-1}A_n$ des sommets restants A_{n-1}, A_n. Par suite, la parallèle à OM par F rencontre OG en un point Ω tel que

$$(10) \qquad OG : G\Omega = (n-2) : 2, \qquad \text{et} \qquad O\Omega = \frac{n}{n-2} \cdot OG.$$

Ce point Ω ne change pas quand on partage autrement les points A_i en deux groupes de $(n-2)$ et 2 points.

---

[1] KANTOR a signalé une proposition analogue pour n points concycliques (*Wiener Sitzungsberichte*, 1876).

87. Théorème. — *Dans un polygone* (P) *dont les* n *sommets* A_i *sont cosphériques, les barycentres* G_i, *les transformés des points de rencontre* A_i *et* A_i *des droites* ΩA_i *avec la sphère circonscrite* (O, R) *par l'homothétie* $\left(\Omega, \frac{1}{n-1}\right)$ *sont sur une même sphère* $\left(o, \frac{R}{n-1}\right)$ *transformée de la sphère circonscrite par les homothéties* $\left(G, -\frac{1}{n-1}\right)$ *et* $\left(\Omega, \frac{1}{n-1}\right)$. (Sphère des $3n$ points.)

Car la sphère (O, R) circonscrite au polygone (P) et la sphère $\left(o, \frac{R}{n-1}\right)$ déterminée par les barycentres G_i des $(n-1)$ points A_i ont le barycentre G des sommets A_i pour centre de similitude inverse et le point de Kantor Ω de (P) comme centre de similitude directe.

Corollaire. — *La puissance d'un sommet* A_i *du polygone* (P), *par rapport à la sphère des* 3n *points, est égale à*

$$\frac{1}{(n-1)^2} \cdot \left|(n-1)k_i^2 - K^2\right|. \tag{11}$$

Le théorème de Stewart appliqué au triangle $A_i\Omega O$ donne, en effet,

$$\overline{A_i o}^2 = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \left[R^2 + (n-1)k_i^2 - K^2\right]. \tag{12}$$

Corollaire. — *Le rapport des longueurs des tangentes menées d'un sommet* A_i *à la sphère des* 3n *points de* (P) *et à la sphère fondamentale* (G_i, σ_{p_i}) *du polygone complémentaire* (p_i) *correspondant au sommet* A_i *considéré est égal à*

$$t_a : t'_a = \sqrt{n-2} : \sqrt{n-1}. \tag{13}$$

Car, en vertu des relations (3) et (4),

$$t'^2_a = \overline{A_i G_i}^2 - \sigma^2_{p_i} = \frac{1}{(n-2)(n-1)} \cdot \left[(n-1)k_i^2 - K^2\right]. \tag{14}$$

Il suffit de comparer (11) et (14) pour obtenir (13).

88. Théorème. — *Les sphères de centres* A_i *dont les rayons sont proportionnels aux longueurs des tangentes menées des sommets du polygone* (P) *à une sphère donnée* (O_1, R_1) *sont orthogonales à une même sphère* (ω, ρ).

Soient $l_1, l_2, \ldots, l_n$ les longueurs des tangentes menées des sommets $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de (P) à la sphère donnée (O_1, R_1); (π) le plan radical

de cette sphère avec la sphère circonscrite (O, R); α_i les projections orthogonales des points A_i sur le plan (π). On a, en grandeur et en signe,

$$(15)\qquad \begin{cases} \overline{A_1O_1}^2 - R_1^2 = l_1^2 = 2OO_1 . A_1\alpha_1, \\ \overline{A_2O_1}^2 - R_1^2 = l_2^2 = 2OO_1 . A_2\alpha_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{A_nO_1}^2 - R_1^2 = l_n^2 = 2OO_1 . A_n\alpha_n. \end{cases}$$

Le plan $(A_1\alpha_1, A_2\alpha_2)$ rencontre le plan (π) suivant une droite qui passe par le point M où la droite A_1A_2 rencontre celui-ci, et l'on a

$$(16)\qquad MA_1 : MA_2 = A_1\alpha_1 : A_2\alpha_2 = l_1^2 : l_2^2.$$

Quatre sphères

$$(A_1, l_1\sqrt{k}),\qquad (A_2, l_2\sqrt{k}),\qquad (A_3, l_3\sqrt{k}),\qquad (A_4, l_4\sqrt{k}),$$

k étant un coefficient arbitraire, sont orthogonales à une sphère (ω, ρ) et si $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$ désignent les projections orthogonales des sommets A_1, A_2, A_3, A_4 sur le plan radical (π') des sphères (O, R) et (ω, ρ),

$$(17)\qquad \begin{cases} \overline{A_1\omega}^2 - \rho^2 = kl_1^2 = 2O\omega . A_1\alpha'_1, \\ \overline{A_2\omega}^2 - \rho^2 = kl_2^2 = 2O\omega . A_2\alpha'_2, \ \dots \end{cases}$$

Le plan $(A_1\alpha'_1, A_2\alpha'_2)$ rencontre le plan (π') suivant une droite qui passe par le point M' où la droite A_1A_2 perce celui-ci, et, comme, en raison de (16) et (17),

$$M'A_1 : M'A_2 = A_1\alpha'_1 : A_2\alpha_2 = l_1^2 : l_2^2 = A_1\alpha_1 : A_2\alpha_2,$$

on a

$$\alpha_1 \equiv \alpha'_1,\quad \alpha_2 \equiv \alpha'_2,\quad \dots,\qquad \text{et}\qquad (\pi) \equiv (\pi').$$

Cette sphère (ω, ρ) ne change donc pas quand on prend pour centres des sphères $(A_i, l_i\sqrt{k})$ quatre points quelconques parmi les n sommets de (P).

Corollaire. — *Les sphères* (O, R), (O_1, R_1), (ω, ρ) *appartiennent à un même faisceau* (F).

Corollaire. — *Lorsque le coefficient* k *varie, les centres des sphères* (ω, ρ) *décrivent la droite* OO_1, *et l'on a la relation*

$$(18)\qquad O\omega_1 : O\omega_2 = k_1 : k_2$$

entre les distances du centre de la sphère (O, R) *à ceux des sphères* (ω_1, ρ_1), (ω_2, ρ_2) *correspondant à deux valeurs données* k_1, k_2 *du coefficient* k.

Cela résulte de ce que le plan radical (π) des sphères (O, R) et (ω, ρ) reste fixe quand le coefficient k varie et la relation (18) est une conséquence des égalités (17).

Corollaire. — *La puissance du barycentre* G *des points* A_i, *par rapport à la sphère* (ω, ρ) *correspondant à un coefficient* k, *a pour expression*

$$\frac{1}{n^2}\left[nk(l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2) - K^2\right]. \tag{19}$$

On a, en effet,

$$\overline{\omega A_1}^2 + \overline{\omega A_2}^2 + \cdots + \overline{\omega A_n}^2 = \overline{GA_1}^2 + \overline{GA_2}^2 + \cdots + \overline{GA_n}^2 + n.\overline{\omega G}^2;$$

d'où, en vertu de (1),

$$\overline{\omega G}^2 - \rho^2 = \frac{1}{n}\Sigma(\overline{\omega A_1}^2 - l_1^2) - \Sigma\overline{GA_1}^2 = \frac{1}{n}\Sigma l_1^2 - \frac{K^2}{n^2}.$$

89. Si l'on suppose que [1]

$$l_1^2 = K_1^2, \quad l_2^2 = K_2^2, \ \ldots, \ l_n^2 = K_n^2, \tag{20}$$

les relations (17) deviennent

$$\overline{A_1\omega}^2 - \rho^2 = k.K_1^2, \quad \overline{A_2\omega}^2 - \rho^2 = k.K_2^2, \ \ldots, \ \overline{A_n\omega}^2 - \rho^2 = k.K_n^2, \tag{21}$$

et il résulte que

$$\overline{A_1\omega}^2 - \overline{A_2\omega}^2 = k(K_1^2 - K_2^2) = -k(k_1^2 - k_2^2), \ \ldots \tag{22}$$

Or, en vertu de (2),

$$\overline{A_1G}^2 - \overline{A_2G_2}^2 = \frac{1}{n^2}\left[nk_1^2 - K^2 - (nk_2^2 - K^2)\right] = \frac{1}{n}(k_1^2 - k_2^2). \tag{23}$$

D'où cette proposition :

Théorème. — *Lorsque le coefficient* k *varie, les centres des sphères* (ω, ρ) *correspondant aux valeurs* (20) *de* l_i^2 *décrivent la droite* OG *et l'on a*

$$O\omega : OG = -nk. \tag{24}$$

---

[1] Cette hypothèse correspond à une sphère (O_1, R_1) qui se confond, quand $k = -\frac{1}{n}$, avec la sphère fondamentale (G, σ_P) pour laquelle les puissances des sommets A_i de (P) sont égales à $-\frac{K_i^2}{n}$

COROLLAIRE. — *La distance du barycentre* G *des sommets de* (P) *au plan radical* (π) *des sphères* (O, R) *et* (ω, ρ) *est égale à*

$$GQ = \frac{(n-2)K^2}{2n^2 . OG}. \tag{25}$$

Car, en raison de (17),

$$GQ = \frac{1}{n}\Sigma A_i\alpha'_i = \frac{1}{n}\sum \frac{k . K_i^2}{2\omega O} = \frac{\Sigma K_i^2}{2n^2 . OG}.$$

COROLLAIRE. — *Le carré du rayon de la sphère* (ω, ρ) *a pour expression*

$$\rho^2 = (1 + nk)^2 . R^2 - k(k+1) . K^2. \tag{26}$$

En appliquant le théorème de STEWART au triangle $A_i\omega G$, on obtient, en effet,

$$\overline{A_i\omega}^2 = (1 + nk)^2 . R^2 - k . k_i^2 - k^2 . K^2; \tag{27}$$

d'où (26) en observant que

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{K^2}{n^2}. \tag{28}$$

De plus,

$$\Sigma\overline{A_i\omega}^2 = n(1 + nk)^2 . R^2 - k[n(k+1) - 2] . K^2. \tag{29}$$

COROLLAIRE. — *La puissance du barycentre* G *des sommets de* (P) *pour la sphère* (ω, ρ) *est égale à*

$$\frac{1}{n^2}[(n-2)nk - 1] . K^2, \tag{30}$$

et la sphère (ω, ρ) *passe par* G *quand*

$$k = \frac{1}{(n-2)n}. \tag{31}$$

COROLLAIRE. — *Si* $k = -\frac{1}{n}$ *la sphère* (ω, ρ) *se confond avec la sphère fondamentale* (G, σ_P) *du polygone* (P) *qui fait partie du faisceau* (F).

Cela résulte de la formule (27) qui se réduit à

$$\rho^2 = \frac{n-1}{n^2} . K^2 = \sigma_P^2.$$

La sphère fondamentale de (P) fait donc partie du faisceau (F).

Corollaire. — *La somme des carrés des distances du point de* Kantor *aux sommets du polygone* (P) *a pour expression*

$$\frac{1}{(n-2)^2}\cdot[4nR^2+(n-4)K^2]. \tag{32}$$

Car le théorème de Stewart appliqué au triangle $A_iO\Omega$ donne

$$\overline{A_i\Omega}^2=\frac{1}{(n-2)^2}\cdot[4R^2+(n-2)k_i^2-K^2] \tag{33}$$

Si $n=4$,

$$\Sigma\overline{A_i\Omega}=4R^2. \tag{34}$$

Corollaire. — *La puissance du point* Ω *de* Kantor *pour la sphère circonscrite au polygone* (P) *est égale à*

$$\frac{1}{(n-2)^2}\cdot[4(n-1)R^2-K^2]. \tag{35}$$

Corollaire. — *Les sphères de centres* A_i *ayant pour carrés de leurs rayons* $\frac{k_i^2}{n-2}$ *sont orthogonales à une sphère centrée au point* Ω *de* Kantor *du polygone* (P).

Car, en vertu de (33),

$$\overline{A_i\Omega}^2-\frac{k_i^2}{n-2}=\frac{1}{(n-2)^2}\cdot(4R^2-K^2). \tag{36}$$

90. Sphère de Longchamps du polygone (P). — Nous proposons d'appeler ainsi la sphère (ω, ρ) telle que les puissances des sommets A_i du polygone (P), par rapport à cette sphère, soient respectivement égales à

$$\frac{K_1^2}{n-2},\quad \frac{K_2^2}{n-2},\quad \ldots,\quad \frac{K_n^2}{n-2}.$$

De cette manière, la somme des puissances pour les n sommets du polygone est égale à

$$\frac{1}{n-2}\Sigma K_i^2=K^2,$$

c'est-à-dire à la somme des carrés des distances des points A_i pris deux à deux de toutes les manières possibles. Cette sphère correspond à $k=\frac{1}{n-2}$, et de l'égalité (24) il résulte que

$$O\omega : OG = -n : (n-2), \qquad O\omega = -O\Omega. \tag{37}\qquad(38)$$

Dès lors, *le centre* ω *de la sphère* DE LONGCHAMPS *coïncide avec le symétrique du point* Ω *de* KANTOR, *par rapport au centre* O *de la sphère circonscrite au polygone* (P); autrement dit, *avec le point de* KANTOR *du polygone anticomplémentaire* (P_1) *transformé de* (P) *par l'homothétie* $[G, -(n-1)]$.

THÉORÈME. — *Le carré du rayon de la sphère* DE LONGCHAMPS (ω, ρ) *équivaut à* $(n-1)$ *fois la puissance du point* Ω *de* KANTOR, *par rapport à la sphère* (O, R) *circonscrite au polygone* (P).

La relation (26) devient, en effet,

$$\rho^2 = \frac{n-1}{(n-2)^2} \cdot [4(n-1)R^2 - K^2], \tag{39}$$

et il suffit de comparer cette formule à (35).

La sphère (ω, ρ) est réelle, réduite à son centre ou imaginaire, selon que

$$(n-1)R^2 > \frac{K^2}{4}, \qquad (n-1)R^2 = \frac{K^2}{4}, \qquad (n-1)R^2 < \frac{K^2}{4}.$$

Quand elle est réelle le barycentre G des point A_i lui est extérieur car

$$\omega G = \left[\frac{2(n-1)}{n-2}\right] \cdot OG > \rho.$$

Si elle se réduit à son centre,

$$4(n-1)R^2 = K^2, \qquad OG = \frac{n-2}{n} \cdot R, \qquad O\Omega = R;$$

le point Ω *de* KANTOR *est sur la sphère circonscrite* (O, R).

THÉORÈME. — *La sphère* DE LONGCHAMPS (ω, ρ) *est orthogonale à la sphère fondamentale* (G, σ_P) *et le plan radical* (π) *des sphères* (O, R) *et* (G, σ_P) *se confond avec le plan polaire du centre de la sphère* DE LONGCHAMPS, *par rapport à la sphère fondamentale, et avec le plan polaire du barycentre* G *des points* A, *par rapport à la sphère* DE LONGCHAMPS.

En effet,

$$G\omega \,.\, GQ = \frac{2(n-1)}{n-2} \cdot OG \cdot \frac{n-2}{2n^2 \,.\, OG} \cdot K^2 = \frac{n-1}{n^2} \cdot K^2 = \sigma_P^2. \tag{40}$$

THÉORÈME. — *La somme des puissances des sommets de* (P) *pour la sphère* DE LONGCHAMPS (ω, ρ) *est égale à la somme des carrés des distances de ces sommets pris deux à deux de toutes les manières possibles.*

Si l'on applique le théorème de STEWART au triangle $A_iO\Omega$ pour calculer la distance $A_i\omega$ du sommet A_i au centre ω de la sphère (ω, ρ), on obtient la relation

$$(41) \qquad \overline{A_i\omega}^2 = \frac{1}{(n-2)^2} \cdot \left[4(n-1)^2 \cdot R^2 - (n-2)k_i^2 - K^2\right],$$

de laquelle on déduit, d'abord, d'après (39),

$$(42) \qquad \overline{A_i\omega}^2 - \rho^2 = \frac{K_i^2}{n-2} \qquad \text{et} \qquad \Sigma(\overline{A_i\omega}^2 - \rho^2) = K^2,$$

puis,

$$(43) \qquad \overline{\Omega G_i}^2 = \left[\frac{1}{(n-2)(n-1)}\right]^2 \cdot \left[4(n-1)^2R^2 - (n-2)k_i^2 - K^2\right],$$

en vertu de l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{n-1}\right)$ qui transforme (P) en (p) et ω en Ω.

91. SPHÈRE DE LONGCHAMPS DU POLYGONE COMPLÉMENTAIRE (p). — La sphère DE LONGCHAMPS (Ω, ρ_1) de (p) se confondant avec la transformée de la sphère (ω, ρ) par l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{n-1}\right)$, est centrée au point Ω de KANTOR de (P).

THÉORÈME. — *Le carré du rayon de la sphère* DE LONGCHAMPS *de* (p) *équivaut à la* $(n-1)^e$ *partie de la puissance de son centre* Ω *par rapport à la sphère circonscrite au polygone* (P).

En effet, d'après (39),

$$(44) \qquad \rho_1^2 = \frac{1}{(n-1)(n-2)^2} \cdot \left[4(n-1)R^2 - K^2\right].$$

Il suffit de comparer cette relation avec (35).

THÉORÈME. — *Dans un polygone* (P) *dont les* n *sommets sont cosphériques, la différence entre* $(n-2)$ *fois la somme des carrés des côtés aboutissant à un même sommet et la somme des carrés des distances des sommets* A_i *pris deux à deux de toutes les manières possibles sont égales à* $(n-2)(n-1)$ *fois la puissance du sommet considéré, par rapport à la sphère* DE LONGCHAMPS (Ω, ρ_1) *du polygone complémentaire* (p).

Car, en raison de (33) et (44),

$$(45) \qquad \overline{A_i\Omega}^2 - \rho_1^2 = \frac{1}{(n-2)(n-1)} \cdot \left[(n-2)k_i^2 - K_i^2\right].$$

THÉORÈME. — *La sphère* (a_i) *décrite sur une médiane* A_iG_i *de* (P) *comme diamètre, la sphère fondamentale* (G, σ_p) *de* (p) *et la sphère*

fondamentale (G_i, σ_{pi}) *du polygone complémentaire* (p_i) *de* (P_i) *appartiennent à un même faisceau linéaire* (F_i).

THÉORÈME. — *La sphère* DE LONGCHAMPS (Ω, ρ_1) *du polygone* (p) *est orthogonale à la sphère fondamentale* (G, σ_p) *du même polygone.*

Car la configuration (p) et (G, σ_p) est la transformée de la figure (P) et (G, σ_p) par l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{n-1}\right)$.

THÉORÈME. — *La sphère* DE LONGCHAMPS (Ω, ρ_1) *de* (p) *est orthogonale à chacune des sphères fondamentales des polygones complémentaires* (p_i) *des polygones* (P_i).

En vertu de (6), (43), (45), on a, en effet,

$$\overline{\Omega G_i}^2 = \rho_1^2 + \sigma_{p_i}^2. \tag{46}$$

THÉORÈME. — *La sphère* DE LONGCHAMPS (Ω, ρ_1) *de* (p) *est orthogonale aux sphères* (a_i) *décrites sur les médianes* A_iG_i *de* (P) *comme diamètres.*

Car la puissance du point Ω pour la sphère (a_i) est égale à

$$\frac{1}{2}\left(\overline{\Omega A_i}^2 + \overline{\Omega G_i}^2 - \overline{A_iG_i}^2\right),$$

c'est-à-dire à

$$\frac{1}{(n-2)^2(n-1)} \cdot \left[4(n-1)R^2 - K^2\right] = \rho_1^2, \tag{47}$$

en vertu des formules déjà démontrées pour les expressions de $\overline{\Omega A_i}^2$, $\overline{\Omega G_i}^2$, $\overline{A_iG_i}^2$.

THÉORÈME (Récapitulatif). — *Le point* Ω *de* KANTOR *du polygone* (P) *se confond avec le centre radical des sphères* (G_i, σ_{p_i}), (a_i) *et les* $n + n + 1 = 2n + 1$ *sphères* (a_i), (G, σ_{pi}), (G, σ_p) *sont orthogonales à la sphère* DE LONGCHAMPS *du polygone complémentaire* (p).

THÉORÈME. — *La sphère fondamentale* (G_i, σ_{pi}) *du polygone* (p_i) *est orthogonale à la sphère* (a'_i) *décrite sur* $A_i\Omega$ *comme diamètre.*

La puissance du point G_i pour la sphère (a'_i) a pour expression

$$\frac{1}{2}\left(\overline{G_iA_i}^2 + \overline{G_i\Omega}^2 - \overline{A_i\Omega}^2\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{K_i^2}{(n-2)(n-1^2)} = \sigma_{p_i}^2,$$

en raison de (3), (43), (45).

THÉORÈME. — *Les circonférences de grands cercles interceptées sur les sphères fondamentales* (G_i, σ_{p_i}) *relatives aux polygones* (p_i) *par les plans diamétraux de ces sphères perpendiculaires aux droites* $A_i\Omega$ *sont sur une sphère* (m, r) *dont le centre coïncide avec le point de* KANTOR *du polygone complémentaire* (p) *de* (P).

En effet, on a, d'abord,

$$mG_i = \frac{1}{n-1} \cdot A_i\Omega,$$

puis

$$(48) \qquad \overline{mG_i}^2 + \sigma_{p_i}^2 = \left[\frac{1}{(n-2)(n-1)}\right]^2 \cdot \left[4R^2 + (n-3) \cdot K^2\right] = r^2.$$

THÉORÈME. — *La sphère* (O, R) *circonscrite au polygone* (P) *rencontre les sphères de centres* G_i *et de rayons* $\sqrt{n-2}.\sigma_{p_i}$ *suivant des circonférences de grands cercles.*

Car

$$(49) \qquad R^2 - \overline{OG_i}^2 = \frac{K^2}{(n-1)^2} = (n-2) \cdot \sigma_{p_i}^2.$$

92 FAISCEAU REMARQUABLE DE SPHÈRES. THÉORÈME. — *Dans un polygone* (P) *dont les sommets sont cosphériques, la sphère circonscrite, la sphère des* 3n *points, la sphère orthocentroïdale* (L), *la sphère* (m, r), *la sphère fondamentale* (G, σ_p) *et la sphère* DE LONGCHAMPS (Ω, ρ_1) *relatives au polygone complémentaire* (p) *appartiennent à un même faisceau* (F).

Par analogie avec le tétraèdre, convenons d'appeler *sphère orthocentroïdale* la sphère décrite sur $G\Omega$ comme diamètre.

La sphère $\left(o, \frac{R}{n-1}\right)$ des $3n$ points de (P) étant la transformée de la sphère circonscrite (O, R) par l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{n-1}\right)$ et la sphère (Ω, ρ_1) DE LONGCHAMPS de (p) provenant de la sphère (ω, ρ) DE LONGCHAMPS de (P) transformée par la même homothétie, la distance du barycentre G des sommets A_i de (P) au plan radical (π) des sphères $\left(o, \frac{R}{n-1}\right)$ et (Ω, ρ_1) a pour expression

$$(50) \qquad GQ' = \frac{(n-2)K^2}{2(n-1)n^2 . OG},$$

en vertu de (25).

De cette relation on déduit les distances Q'O, Q'o, Q'L, Q'm, Q'Ω et les égalités

$$\overline{Q'O}^2 - R^2 = \overline{Q'o}^2 - \frac{R^2}{(n-1)^2} = \overline{Q'L}^2 - \frac{\overline{G\Omega}^2}{4} = \overline{Q'm}^2 - r^2 = \overline{Q'\Omega}^2 - \rho_1^2.$$

COROLLAIRE. — *Dans un polygone* (P) *dont les sommets sont cosphériques, la sphère circonscrite* (O, R), *la sphère fondamentale* (G, σ_P), *la sphère* DE LONGCHAMPS (ω, ρ), *les sphères circonscrite et orthocentroïdale du polygone anticomplémentaire* (P_1) *et la transformée de la sphère* (m, r) *par l'homothétie* [G, — (n — 1)], *appartiennent à un même faisceau* (F').

Ce faisceau est le transformé de (F) par l'homothétie [G, — (n — 1)].

93. Dans un polygone plan (P) $\equiv A_1A_2 \ldots A_n$ dont les sommets sont concycliques, l'analogie est complète.

CHAPITRE III

COMPLÉMENTS À LA GÉOMÉTRIE RÉCENTE DU TÉTRAÈDRE

94. Introduction. — C'est sous le titre *Géométrie récente du triangle* que l'on a classé les travaux de J. Neuberg, H. Brocard, E. Lemoine et ceux de leurs nombreux imitateurs, entrepris à ce sujet surtout de 1870 à nos jours. Ces recherches ont abouti à mettre en évidence toute une suite de points, de droites, de cercles, de coniques et de cubiques planes remarquables associés à un triangle, qui portent les noms de ces géomètres et dont le rassemblement n'a pas encore été fait d'une manière systématique.

C'est encore à J. Neuberg que l'on doit d'avoir introduit les premières analogies entre ces configurations planes et les éléments d'un tétraèdre. Son *Mémoire sur le tétraèdre*, publié en 1884 par les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, renferme, en effet, de belles propriétés relatives à des points, à des sphères et à des quadriques associés au tétraèdre général, ou à des tétraèdres spéciaux.

D'autres géomètres ont continué ce genre de recherches, s'attachant aux propriétés de certaines quadriques et de surfaces. Il y a lieu de signaler, en particulier, la surface telle que les projections orthogonales de tous ses points sur les plans des faces d'un tétraèdre sont coplanaires, dont la propriété fondamentale a été établie pour la première fois par A. Sartiaux (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1866, p. 317).

Nous avons pour notre part mis en relief pas mal de configurations concernant des points, des sphères, des quadriques et des courbes gauches associés à un tétraèdre général. Quelques-unes figurent déjà dans les pages qui précèdent (sphère de Longchamps); les plus remarquables des autres, presque toujours étudiées par les méthodes de la géométrie pure, sont réunies dans ce chapitre.

Les notations fondamentales indiquées au début seront parfois un peu modifiées.

PREMIER POINT DE LEMOINE D'UN TÉTRAÈDRE

95. Définition. — Par analogie avec le point de Lemoine d'un triangle, nous appelons *premier* point de Lemoine K du tétraèdre T, le point dont la somme des carrés de ses distances aux quatre plans des faces du tétraèdre est la plus petite.

Le point K, dont les coordonnées barycentriques par rapport au tétraèdre T sont proportionnelles aux quantités A^2, B^2, C^2, D^2, coïncide avec le conjugué isogonal du centre de gravité G, et si l'on pose $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = S$, ses distances aux plans BCD, CDA, DAB, ABC ont pour mesures

$$(1)\quad d_a = \frac{3AV}{S}, \qquad d_b = \frac{3BV}{S}, \qquad d_c = \frac{3CV}{S}, \qquad d_d = \frac{3DV}{S}.$$

96. Théorème. — *Le* premier *point de* Lemoine K *du tétraèdre* T *coïncide avec le centre de gravité de son tétraèdre podaire.*

Cette proposition connue résulte aussi de remarques plus générales.

Soient une quadrique de révolution de foyers P, P′ inscrite au tétraèdre T, dont l'axe non focal a pour mesure $2b$; A′B′C′D′ et A″B″C″D″ les tétraèdres podaires des points P et P′. Si l'on porte sur les droites P′A″, P′B″, P′C″, P′D″ les vecteurs

$$\frac{b^2}{\overrightarrow{P'A''}}, \qquad \frac{b^2}{\overrightarrow{P'B''}}, \qquad \frac{b^2}{\overrightarrow{P'C''}}, \qquad \frac{b^2}{\overrightarrow{P'D''}},$$

dont la résultante est $\overrightarrow{P'M}$, et si l'on porte sur $\overrightarrow{P'M}$ le vecteur $\frac{b^2}{\overrightarrow{P'M}} = \overrightarrow{P'p'}$, d'après un théorème de Laguerre, la projection orthogonale du point P′ sur le plan harmoniquement associé à ce point, par rapport au tétraèdre T, se confond avec le point p'. Or, on a, d'abord,

$$PA' = \frac{b^2}{P'A''}, \qquad PB' = \frac{b^2}{P'B''}, \qquad PC' = \frac{b^2}{P'C''}, \qquad PD' = \frac{b^2}{P'D''},$$

ensuite les égalités vectorielles

$$(2)\quad 4\overrightarrow{Pp} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'} + \overrightarrow{PD'} = b^2 . \Sigma \frac{1}{\overrightarrow{P'A''}} = \frac{4b^2}{\overrightarrow{P'p'}};$$

d'où la relation

$$(3)\qquad b^2 = Pp . P'p'.$$

Si le point P coïncide avec le *premier* point de LEMOINE K du tétraèdre T, le point P′ se confond avec le point G et p coïncide avec le point $P \equiv K$ tandis que le point p' est à l'infini. Le produit (3) est donc indéterminé, ce qui n'infirme pas les égalités (2), et le point $P \equiv K$ coïncide avec le centre de gravité de son tétraèdre podaire.

COROLLAIRE. — *Parmi les tétraèdres inscrits au tétraèdre* T, *le tétraèdre podaire du point* K *est celui dont la somme des carrés des arêtes est la plus petite.*

En effet, dans tout tétraèdre, la somme des carrés des arêtes étant égale à quatre fois celle des carrés des distances des sommets au centre de gravité du tétraèdre, si un tétraèdre est inscrit à un autre tétraèdre, la somme des carrés de ses arêtes n'est pas inférieure à quatre fois la somme des carrés des distances de son centre de gravité aux faces de l'autre. Or, le tétraèdre podaire du point K dont la somme des carrés des distances aux faces du tétraèdre T est la plus petite a ce point pour centre de gravité.

N. B. — Si l'on désigne par a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1 et v les mesures des arêtes K_bK_c, K_dK_a, K_cK_a, K_dK_b, K_aK_b, K_dK_c et du volume du tétraèdre podaire t du point K, on obtient, d'une part,

$$\Sigma(a_1^2 + a_1'^2) = \frac{36\,V^2}{S}, \tag{4}$$

d'autre part,

$$v = \frac{81\,V^5}{S^3}. \tag{5}$$

97. THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre* T, *le barycentre de quatre masses* mA^2, mB^2, mC^2, mD^2 *proportionnelles aux carrés des aires des faces et appliquées en quatre points* A_1, B_1, C_1, D_1 *divisant les hauteurs* AA_h, BB_h, CC_h, DD_h *dans un même rapport arbitraire*

$$\frac{A_1A_h}{AA_h} = \frac{B_1B_h}{BB_h} = \frac{C_1C_h}{CC_h} = \frac{D_1D_h}{DD_h} = k, \tag{6}$$

se confond avec le premier *point de* LEMOINE.

Si les points A_1, B_1, C_1, D_1 affectés des masses mA^2, mB^2, mC^2, mD^2 et leur barycentre K se projettent orthogonalement sur le plan BCD en A'_1, B'_1, C'_1 et K_a, d'après la propriété fondamentale du barycentre et en vertu des égalités (6), on a, de proche en proche, en grandeur et en signe,

$$\begin{aligned}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2).KK_a &= A^2.A_1A'_1 + B^2.B_1B'_1 + C^2.C_1C'_1 + D^2.D_1D'_1 \\ &= k(A^2.AA_h + B^2.BB_h\cos c' + C^2.CC_h\cos b' + D^2.DD_h\cos a) \\ &= 3kV.(A + B\cos c' + C\cos b' + D\cos a) = 3kV.(A + A) = 6kAV.\end{aligned}$$

On obtient des formules analogues pour les distances KK_b, KK_c, KK_d du point K aux plans CDA, DAB, ABC par des permutations circulaires convenables sur les lettres A, B, C, D. Le barycentre K des points A_1, B_1, C_1, D_1 affectés des masses mA^2, mB^2, mC^2, mD^2 dont les distances KK_a, KK_b, KK_c, KK_d aux plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC, sont proportionnelles aux aires A, B, C, D de ces faces se confond donc avec le *premier* point de LEMOINE du tétraèdre T.

COROLLAIRES. — 1° *Le point* K *coïncide avec les barycentres de quatre masses proportionnelles aux carrés des aires des faces et appliquées, soit aux sommets, soit aux pieds des hauteurs du tétraèdre* T.

Car dans ces hypothèses, $k = 1$ et $k = 0$.

2° *Si les points* A_1, B_1, C_1, D_1 *sont coplanaires, le plan qui les contient passe par le point* K.

3° *Les trois plans qui partagent les hauteurs d'un tétraèdre dans un même rapport concourent au* premier *point de* LEMOINE K.

4° *Le* premier *point de* LEMOINE *coïncide avec le barycentre de masses proportionnelles aux carrés* A^2, B^2, C^2, D^2 *des aires des faces du tétraèdre* T *appliquées aux projections orthogonales sur les hauteurs des points de* MONGE *des tétraèdres* A_2BCD, B_2CDA, C_2DAB, D_2ABC *dont les sommets* A_2, B_2, C_2, D_2 *coïncident avec les points où les hauteurs* AA_h, BB_h, CC_h, DD_h *recoupent la sphère circonscrite au tétraèdre fondamental.*

Car les projections A'_2, B'_2, C'_2, D'_2 des points de MONGE en question divisent les hauteurs AA_h, BB_h, CC_h, DD_h du tétraèdre T dans le même rapport

$$\frac{A'_2A}{A'_2A_h} = \frac{B'_2B}{B'_2B_h} = \frac{C'_2C}{C'_2C_h} = \frac{D'_2D}{D'_2D_h} = 3.$$

5° *Dans un tétraèdre orthocentrique* T *dont les hauteurs* AA_h, BB_h, CC_h, DD_h *rencontrent la sphère circonscrite en* A_2, B_2, C_2, D_2, *le barycentre des orthocentres* A_3, B_3, C_3, D_3 *des tétraèdres* A_2BCD, B_2CDA, C_2DAB, D_2ABC, *affectés de masses proportionnelles aux carrés des aires des faces correspondantes du tétraèdre* T, *se confond avec le* premier *point de* LEMOINE K.

Car les points A_3, B_3, C_3, D_3 partagent les hauteurs du tétraèdre T dans le même rapport $k = -\frac{1}{2}$.

98. THÉORÈME. — *Les droites qui joignent les sommets* A, B, C, D *d'un tétraèdre* T *aux points d'intersection* A_1, B_1, C_1, D_1 *des cônes*

des tangentes à la surface de SARTIAUX (S) *aux trois autres sommets de* T, *concourent au* premier *point de* LEMOINE K *du tétraèdre fondamental.*

En effet, l'équation normale de la surface (S) étant

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{t}=0,$$

et celles des cônes des tangentes aux points B, C, D,

$$\frac{C}{z}+\frac{D}{t}+\frac{A}{x}=0,\quad \frac{D}{t}+\frac{A}{x}+\frac{B}{y}=0,\quad \frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}=0,$$

on obtient

$$\frac{B}{y}=\frac{C}{z}=\frac{D}{t}=-\frac{A}{2x}.$$

Les coordonnées normales du point A_1 sont donc proportionnelles aux quantités $\left(-\frac{A}{2}, B, C, D\right)$, ce qui prouve que la droite AA_1 et, par analogie, les droites BB_1, CC_1, DD_1 concourent au point K.

COROLLAIRE. — *Les coordonnées barycentriques du point* K *dans le tétraèdre* T_1 *sont proportionnelles aux quantités*

$$\left(-\frac{A}{2}+B+C+D\right),\qquad \left(A-\frac{B}{2}+C+D\right),$$
$$\left(A+B-\frac{C}{2}+D\right),\qquad \left(A+B+C-\frac{D}{2}\right).$$

THÉORÈME. — *Le tétraèdre* T *et le tétraèdre* $T_2 \equiv A_2B_2C_2D_2$ *ayant pour sommets les troisièmes intersections des droites* AK, BK, CK, DK *avec la surface* (S) *sont homologiques et le plan d'homologie se confond avec les plans polaires du point* K *par rapport aux deux tétraèdres* T_1, T_2 *et à la surface* (S). (*Premier* plan de LEMOINE.)

Les sommets du tétraèdre T_2 étant

$$A_2 \equiv \frac{x}{-\frac{A}{3}}=\frac{y}{B}=\frac{x}{C}=\frac{t}{D},\quad \ldots,$$

et les plans des faces,

$$B_2C_2D_2 \equiv -\frac{5x}{3A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+\frac{t}{D}=0,\quad \ldots,$$

le plan $B_2C_2D_2$ rencontre le plan BCD suivant la droite

$$\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+\frac{t}{D}=0;$$

de sorte que le plan polaire du point K, par rapport au tétraèdre T_1 est

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+\frac{t}{D}=0.$$

D'autre part, si l'on pose

$$U\equiv(B_2C_2D_2),\qquad V\equiv(C_2D_2A_2),\qquad W=(D_2A_2B_2),\qquad S\equiv(A_2B_2C_2),$$

le plan polaire du point K, par rapport au tétraèdre T_2, est

$$\Sigma X\left(\frac{U'_x}{U}+\frac{V'_x}{V}+\frac{W'_x}{W}+\frac{S'_x}{S}\right)\equiv\Sigma\,\frac{X}{A}=0.$$

Enfin, comme l'équation de la surface (S) peut aussi s'écrire

$$\Sigma Ayzt=0=f(x,\ y,\ z,\ t),$$

le plan polaire du point K, par rapport à la surface (S), est

$$Xf'_x+Yf'_y+Zf'_z+Tf'_t=0,$$

pour

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}=\frac{t}{D},\qquad \frac{X}{A}+\frac{Y}{B}+\frac{Z}{C}+\frac{T}{D}=0.$$

Corollaire. — *Les tétraèdres* T_1, T_2 *et le tétraèdre tangentiel* $T'_2\equiv A'_2B'_2C'_2D'_2$ *du tétraèdre* T_2, *par rapport à la surface* (S), *sont homologiques, le centre et l'axe d'homologie étant le point* K *et le* premier *plan de* Lemoine *du tétraèdre* T.

En effet, le plan tangent à la surface (S) au point A_2 a pour équation

$$\frac{9x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+\frac{t}{D}=0,$$

et ce plan rencontre le plan BCD suivant la droite

$$\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+\frac{t}{D}=0$$

qui se confond avec l'intersection des plans BCD et $B_2C_2D_2$, le centre d'homologie est le point K, car A'_2 se trouve sur la droite AA_1A_2. Étant l'intersection des plans tangents en B_2, C_2, D_2, ses coordonnées sont, en effet,

$$\frac{x}{-11\,A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}=\frac{t}{D}.$$

99. Soit (Γ) une quadrique inscrite au tétraèdre T dont elle touche les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC en A′, B′, C′, D′; nous supposons que les droites AA′, BB′, CC′, DD′ concourent en un même point P. Si le point P varie sur la droite AA′, les quadriques (Γ) forment un faisceau tangentiel comprenant les points

A et A′ et la conique (γ_a) inscrite dans le triangle BCD aux pieds des céviennes du point A′. Le lieu des centres des quadriques du faisceau est donc la droite M_aO_a joignant le milieu de AA′ au centre O_a de la conique (γ_a). Les quatre droites M_aO_a, M_bO_b, M_cO_c, M_dO_d relatives aux quatre faces du tétraèdre T, passent donc par le centre de la quadrique (Γ).

COROLLAIRE. — *Dans un tétraèdre* orthocentrique T, *les droites joignant les points de* LEMOINE *de chaque face au milieu de la hauteur correspondante passent par le* premier *point de* LEMOINE K *du tétraèdre.*

On sait en effet que dans un triangle la conique touchant les trois côtés aux pieds des hauteurs a pour centre le point de LEMOINE du triangle. De même dans un tétraèdre othocentrique T, la quadrique touchant les plans des faces aux pieds des hauteurs a pour centre le *premier* point de LEMOINE K du tétraèdre.

100. THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre* orthocentrique T≡ABCD, *d'orthocentre* H, *les droites* AK_a, BK_b, CK_c, DK_d *joignant les sommets aux* premiers *points de* LEMOINE *des tétraèdres* HBCD, HCDA, HDAB, HABC *concourent en un point* K′ *situé sur la droite* HK *qui joint l'orthocentre au* premier *point de* LEMOINE *du tétraèdre fondamental* (1).

Soient H′ l'orthocentre du tétraèdre complémentaire du tétraèdre T, B_1 l'intersection du plan HCD avec la droite AB, L le barycentre des points B, C, D affectés des coefficients $\overline{HCD}^2$, $\overline{HDB}^2$, $\overline{HBC}^2$.

Affectons les sommets A, B, C, D du tétraèdre T des coefficients

$$\overline{HBCD}\left(\frac{2V}{3}-\overline{H'BCD}\right),\qquad \overline{HCDA}\left(\frac{2V}{3}-\overline{H'CDA}\right),$$

$$\overline{HDAB}\left(\frac{2V}{3}-\overline{H'DAB}\right),\qquad \overline{HABC}\left(\frac{2V}{3}-\overline{H'ABC}\right),$$

et désignons par K′ le barycentre correspondant. On a

$$\overline{HBCD}\left(\frac{2V}{3}-\overline{H'BCD}\right)=\overline{HBCD}\cdot\frac{2V}{3}-\frac{A^2.\overline{AH}.\overline{HA_h}}{27}$$
$$=\overline{HBCD}.\frac{2V}{3}+\frac{k.A^2}{27},$$

en posant

$$k=\overline{HA}.\overline{HA_h}=\overline{HB}.\overline{HB_h}=\overline{HC}.\overline{HC_h}=\overline{HD}.\overline{HD_h}.$$

(1). V. THÉBAULT, *Mathesis*, t. LIV, 460; t. LVI, 154, question proposée 3229, résolue par M. R. BLANCHARD.

Les points H et K sont les barycentres des points A, B, C, D affectés des coefficients

$$\overline{HBCD}\cdot\frac{2V}{3},\quad \overline{HCDA}\cdot\frac{2V}{3},\quad \overline{HDAB}\cdot\frac{2V}{3},\quad \overline{HABC}\cdot\frac{2V}{3}$$

et

$$\frac{k.A^2}{27},\quad \frac{k.B^2}{27},\quad \frac{k.C^2}{27},\quad \frac{k.D^2}{27};$$

le point K′ se trouve donc sur HK et il est tel que

$$\frac{\overline{K'H}}{\overline{K'K}}=-\frac{k.\Sigma A^2}{18V^2}=-\frac{k.S}{18V^2}.$$

On a aussi

$$\overline{HCDA}\left(\frac{2V}{3}-\overline{H'CDA}\right)=\overline{HCDA}\left(\overline{H'BCD}+\overline{H'DAB}+\overline{H'ABC}-\frac{V}{3}\right)$$
$$=\overline{HCDA}.\overline{H'BCD}+\overline{HCDA}\left(\overline{H'DAB}+\overline{H'ABC}-\frac{V}{3}\right).$$

Or,

$$\overline{H'DAB}=\frac{1}{9}\cdot\overline{DAB}.\overline{CH}=\frac{1}{9}\cdot\overline{DAB}(\overline{CC_h}-\overline{HC_h})=\frac{1}{3}\cdot(V-\overline{HDAB}).$$

De même,

$$\overline{H'ABC}=\frac{1}{3}(V-\overline{HABC}).$$

Par suite, on obtient, de proche en proche,

$$\overline{HCDA}\left(\overline{H'DAB}+\overline{H'ABC}-\frac{V}{3}\right)=\frac{1}{3}\overline{HCDA}(V-\overline{HDAB}-\overline{HABC})$$
$$=\frac{1}{3}\overline{HCDA}(\overline{HBCD}+\overline{HCDA})$$
$$=\frac{1}{27}\overline{HCD}^2.\overline{AB_1}.\overline{AB}$$
$$=\frac{1}{27}\overline{HCD}^2.\overline{AH}.\overline{AA_h}.$$

Le point L est le barycentre des points B, C, D affectés des coefficients

$$\frac{1}{27}\overline{HCD}^2.\overline{AH}.\overline{AA_h},\quad \frac{1}{27}\overline{HDB}^2.\overline{AH}.\overline{AA_h},\quad \frac{1}{27}\overline{HBC}^2.\overline{AH}.\overline{AA_h}$$

et il est affecté du coefficient

$$\frac{1}{27}AH.\overline{AA_h}.\Sigma\overline{HCD}^2.$$

Le point H est le barycentre des points A, B, C, D affectés des coefficients

$$\overline{HBCD}.\overline{H'BCD},\quad \overline{HCDA}.\overline{H'BCD},\quad \overline{HDAB}.\overline{H'BCD},\quad \overline{HABC}.\overline{H'BCD}$$

et il est affecté du coefficient $V.\overline{H'BCD}$.

Le barycentre K_a des points L et H affectés des coefficients précédents est donc tel que

$$\frac{\overline{K_aL}}{\overline{K_aH}} = -\frac{27V.\overline{H'BCD}}{\overline{AH}.\overline{AA_h}\Sigma\overline{HCD}^2} = -\frac{A^2}{\Sigma\overline{HCD}^2}.$$

Il s'ensuit que K_a coïncide avec le *premier* point de LEMOINE du tétraèdre HBCD. Le point K′ se trouve alors sur la droite AK_a et, de même, sur les droites BK_b, CK_c, DK_d, ce qui achève de démontrer le théorème.

101. TÉTRAÈDRE ASSOCIÉ A UN QUADRANGLE GAUCHE. — THÉORÈME. — *Etant donné un quadrangle gauche* $Q_1 \equiv ACBD$, *les hauteurs du tétraèdre* $T_1 \equiv A_1C_1B_1D_1$ *formé par les plans :* π_a *perpendiculaire en* A *à* CA, π_c *perpendiculaire en* C *à* CB, π_b *perpendiculaire en* B *à* BD, π_d *perpendiculaire en* D *à* DA, *sont inversement proportionnelles aux longueurs des côtés du quadrangle.*

A_1, C_1, B_1, D_1 étant les points d'intersection des plans (π_c, π_b, π_d), (π_a, π_b, π_d), (π_a, π_c, π_d), (π_a, π_c, π_b), les côtés A_1D_1, B_1C_1, C_1A_1, D_1B_1 du quadrangle gauche $A_1C_1B_1D_1$ sont respectivement parallèles aux hauteurs h_a, h_b, h_c, h_d du tétraèdre $T \equiv ABCD$, de même que AC, CB, BD, DA sont parallèles aux hauteurs

$$A_1A'_1 = H_{a_1},\qquad B_1B'_1 = H_{b_1},\qquad C_1C'_1 = H_{c_1},\qquad D_1D'_1 = H_{d_1}$$

du tétraèdre T_1. Les arêtes opposées A_1B_1 et C_1D_1 sont parallèles aux plus courtes distances de CB et DA, AC et BD, comme AB et CD sont parallèles aux plus courtes distances de C_1B_1 et D_1A_1, A_1C_1 et B_1D_1 (¹). Les plans (π_a, π_c, ABC), (π_c, π_b, BCD), (π_b, π_d, DAB), (π_d, π_a, CDA) se coupent respectivement en des points δ, α, γ, β par où passent les arêtes B_1D_1, A_1D_1, A_1C_1, C_1B_1 perpendiculaires aux plans ABC, DCB, DAB, CDA.

Le tétraèdre T_1 se projette donc orthogonalement sur le plan ABC, par exemple, suivant un triangle $\delta\alpha'\gamma'$ semblable à ABC, dont les côtés $\delta\gamma'$, $\delta\alpha'$, $\alpha'\gamma'$ sont perpendiculaires à AC, CB, BA, car les pro-

(¹) Ces faits sont mis en évidence en projetant la figure soit sur des plans tels que ACB, ..., soit sur des plans parallèles à deux arêtes opposées.

jections des arêtes A_1C_1 et A_1D_1 sont orthogonales à BA et CB. En outre, les plans des faces $B_1C_1D_1$ et $D_1A_1B_1$ étant perpendiculaires au plan ABC, les hauteurs $A_1A'_1$ et $C_1C'_1$ du tétraèdre T_1 se projettent en vraie grandeur sur ce plan suivant les hauteurs du triangle $\delta\alpha'\gamma'$ issues de α' et γ' dont les longueurs sont inversement proportionnelles aux côtés opposés $\delta\gamma'$ et $\delta\alpha'$, c'est-à-dire à AC et CB. La démonstration se termine en projetant le tétraèdre T_1 sur les plans BCD et DAB.

102. Soient M, N, P, Q les points de rencontre des côtés AC, CB, BD, DA du quadrangle Q_1 avec les plans perpendiculaires à ces droites, menés par le centre de gravité G_1 du tétraèdre T_1. D'après ce qui précède, on a, par exemple, $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'_1A_1}$.

En posant $\overline{AM} = x$, $\overline{CN} = y$, $\overline{BP} = z$, $\overline{DQ} = t$, on obtient, en grandeur et en signe,

$$(1) \qquad \overline{AM}.\overline{AC} = bx = \overline{CN}.\overline{CB} = ay = \overline{BP}.\overline{BD} = b'z = \overline{DQ}.\overline{DA} = a't,$$

de sorte que *les puissances de* A, *par rapport à la sphère décrite sur* G_1C *comme diamètre, de* C, *par rapport à la sphère de diamètre* G_1B, *de* B, *par rapport à la sphère de diamètre* G_1D, *de* D, *par rapport à la sphère de diamètre* G_1A, *sont égales.*

D'après une propriété classique, on a, d'abord,

$$\overline{AM}^2 - \overline{MC}^2 + \overline{CN}^2 - \overline{NB}^2 + \overline{BP}^2 - \overline{PD}^2 + \overline{DQ}^2 - \overline{QA}^2 = 0$$

ensuite

$$\Sigma[x^2 - (b-x)^2] = 0,$$

puis

$$(2) \qquad bx + ay + b'z + a't = \frac{1}{2}(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2) = \lambda^2.$$

En observant que les triangles rectangles A_hAC et $A_1D_1A'_1$ sont semblables, il résulte des relations (1) et (2)

$$H_{a_1} = 4x = \frac{\lambda^2}{b}, \quad H_{c_1} = 4y = \frac{\lambda^2}{a}, \quad H_{b_1} = 4z = \frac{\lambda^2}{b'}, \quad H_{d_1} = 4t = \frac{\lambda^2}{a'},$$

et

$$(2') \quad A_1D_1 = \frac{\lambda^2}{h_a}, \quad A_1C_1 = \frac{\lambda^2}{h_c}, \quad C_1B_1 = \frac{\lambda^2}{h_b}, \quad B_1D_1 = \frac{\lambda^2}{h_d}.$$

COROLLAIRE. — *Les mesures des vecteurs* $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$ *sont proportionnelles à celles des aires des faces* BCD, DAB, CDA, ABC *du tétraèdre* T.

Cette proposition résulte des formules (2').

On déduit aussi de ces formules, la mesure

$$(3) \qquad V_1 = \frac{1}{2} C_1B_1 . B_1D_1 \sin b . \frac{1}{3} A_1A'_1 = \frac{\lambda^6}{288\,V}$$

du volume V_1 du tétraèdre T_1.

103. Les six arêtes d'un tétraèdre quelconque $T \equiv ABCD$ forment les quadrangles gauches

$$Q \equiv ABCD, \qquad Q' \equiv ACDB, \qquad Q'' \equiv ADBC.$$

Quatre plans non concourants et respectivement perpendiculaires aux côtés des quadrangles Q, Q', Q'' déterminent trois tétraèdres dont les aires des faces sont proportionnelles aux côtés des quadrangles correspondants. Ainsi, les plans perpendiculaires sur les côtés AB, BC, CD, DA du quadrangle Q en A, B, C, D, respectivement, forment un tétraèdre $T'_1 \equiv A'_1B'_1C'_1D'_1$ dont les aires des faces sont proportionnelles à AB, BC, CD, DA, et l'on obtient des tétraèdres analogues $T'_2 \equiv A'_2C'_2D'_2B'_2$, $T'_3 \equiv A'_3D'_3B'_3C'_3$ associés aux quadrangles Q', Q''.

Les arêtes $(A'_1B'_1, B'_1C'_1, C'_1D'_1, D'_1A'_1)$, $(A'_2C'_2, C'_2D'_2, D'_2B'_2, B'_2A'_2)$ $(A'_3D'_3, D'_3B'_3, B'_3C'_3, C'_3A'_3)$ des quadrangles gauches $Q'_1 \equiv A'_1B'_1C'_1D'_1$, $Q'_2 \equiv A'_2C'_2D'_2B'_2$, $Q'_3 \equiv A'_3D'_3B'_3C'_3$, sont respectivement perpendiculaires aux faces (BCD, CDA, DAB, ABC), (BCD, DAB, ABC, CDA), (BCD, ABC, CDA, DAB) du tétraèdre T.

Comme les distances du centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre T aux quatre plans des faces des tétraèdres T'_1, T'_2, T'_3 sont égales à $\left(\frac{AB}{2}, \frac{BC}{2}, \frac{CD}{2}, \frac{DA}{2}\right)$, ..., *le centre* O *coïncide avec le* premier *point de* LEMOINE *de chacun des tétraèdres* T'_1, T'_2, T'_3.

104. A chacun des quadrangles Q, Q', Q'' correspond un tétraèdre T_1, T_2, T_3, inscrit au tétraèdre T, dont les plans des faces sont perpendiculaires aux quatre côtés.

Les plans médiateurs des côtés des quadrangles $Q_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$, $Q_2 \equiv A_2C_2D_2B_2$, $Q_3 \equiv A_3D_3B_3C_3$, déterminés par les tétraèdres T_1, T_2, T_3, concourent au *premier* point de LEMOINE K du tétraèdre T, et les mesures des côtés perpendiculaires aux faces (A), (B), (C), (D) sont égales à deux fois celles des distances d_a, d_b, d_c, d_d du point K à ces faces.

Tétraèdre $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ [1]. — Les sommets A_1, B_1, C_1, D_1 sont

[1] (A) désigne la face BCD opposée au sommet A du tétraèdre T, et A représente la mesure de l'aire de cette face.

respectivement sur les faces (A), (B), (C), (D) du tétraèdre T.

$A_1B_1 = 2d_a$ est perpendiculaire à la face (A) de T,
$B_1C_1 = 2d_b$ est perpendiculaire à la face (B) de T,
$C_1D_1 = 2d_c$ est perpendiculaire à la face (C) de T,
$D_1A_1 = 2d_d$ est perpendiculaire à la face (D) de T.

Les arêtes A_1C_1 et B_1D_1 sont parallèles aux perpendiculaires communes aux arêtes opposées AB et CD, BC et AD. En outre, les angles A_1, B_1, C_1, D_1 du quadrangle $Q_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ sont respectivement égaux à c', a', c, a, et

$$(4)\quad \begin{aligned} A_1C_1 &= k(A^2 + B^2 - 2AB\cos c')^{\frac{1}{2}} \\ &= k(C^2 + D^2 - 2CD\cos c)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{2}\, cc' \sin\theta_c, \\ B_1D_1 &= k(B^2 + C^2 - 2BC\cos a')^{\frac{1}{2}} \\ &= k(A^2 + D^2 - 2AD\cos a)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{2}\, aa' \sin\theta_a, \end{aligned}$$

θ_a, θ_b, θ_c étant les angles des arêtes opposées BC et AD, AC et BD, AB et CD, et en posant $k = 6V : (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)$.

Tétraèdre $T_2 \equiv A_2C_2D_2B_2$. — Les sommets A_2, C_2, D_2, B_2 sont respectivement dans les faces (A), (C), (D), (B) du tétraèdre T.

$A_2C_2 = 2d_a$ est perpendiculaire à la face (A) de T,
$C_2D_2 = 2d_c$ est perpendiculaire à la face (C) de T,
$D_2B_2 = 2d_d$ est perpendiculaire à la face (D) de T,
$B_2A_2 = 2d_b$ est perpendiculaire à la face (B) de T.

Les arêtes A_2D_2 et B_2C_2 sont parallèles aux perpendiculaires communes aux arêtes opposées AC et BD, AB et CD. De plus, les angles A_2, C_2, D_2, B_2 du quadrangle $Q_2 \equiv A_2C_2D_2B_2$ sont respectivement égaux à b', c', b, c, et

$$(5)\quad \begin{aligned} A_2D_2 &= k(A^2 + C^2 - 2AC\cos b')^{\frac{1}{2}} \\ &= k(B^2 + D^2 - 2BD\cos b)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{2}\, bb' \sin\theta_b, \\ B_2C_2 &= k(A^2 + B^2 - 2AB\cos c')^{\frac{1}{2}} \\ &= k(C^2 + D^2 - 2CD\cos c)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{2}\, cc' \sin\theta_c. \end{aligned}$$

Tétraèdre $T_3 \equiv A_3D_3B_3C_3$. — Les sommets A_3, D_3, B_3, C_3 sont respectivement dans les faces (A), (D), (B), (C) du tétraèdre T.

$A_3D_3 = 2d_a$ est perpendiculaire à la face (A) de T,
$D_3B_3 = 2d_d$ est perpendiculaire à la face (D) de T,
$B_3C_3 = 2d_b$ est perpendiculaire à la face (B) de T,
$C_3A_3 = 2d_c$ est perpendiculaire à la face (C) de T.

Les arêtes A_3B_3 et C_3D_3 sont parallèles aux perpendiculaires communes aux arêtes opposées AC et BD, BC et AD. Les angles A_3, D_3, B_3, C_3 du quadrangle $Q_3 \equiv A_3D_3B_3C_3$ sont respectivement égaux à a', b', a, b, et

$$A_3B_3 = k(B^2 + C^2 - 2BC\cos a')^{\frac{1}{2}}$$
$$= k(A^2 + D^2 - 2AD\cos a)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{2}\, aa' \sin\theta_a,$$

(6)
$$C_3D_3 = k(A^2 + C^2 - 2AC\cos b')^{\frac{1}{2}}$$
$$= k(B^2 + D^2 - 2BD\cos b)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{2}\, bb' \sin\theta_b.$$

Enfin, il apparaît visiblement que

$$A_1B_1 = A_2C_2 = A_3D_3 = 2\,d_a, \qquad B_1C_1 = B_2A_2 = B_3C_3 = 2d_b,$$
$$C_1D_1 = C_2D_2 = C_3A_3 = 2d_c, \qquad D_1A_1 = D_2B_2 = D_3B_3 = 2d_d$$

et $\quad A_1C_1 = B_2C_2, \qquad B_1D_1 = A_3B_3, \qquad A_2D_2 = C_3D_3.$

Les faces du tétraèdre T sur lesquelles les côtés des quadrangles Q_1, Q_2, Q_3, issus des points A_1, A_2, A_3, sont perpendiculaires, se succèdent dans les ordres (D, C, B, A), (B, D, C, A), (C, B, D, A) en suivant le sens BDC sur le périmètre de la face BCD. On détermine trois autres tétraèdres

$$T'_1 \equiv A_1B_1D_1C_1, \qquad T'_2 \equiv A_2C_2B_2D_2, \qquad T'_3 \equiv A_3D_3C_3B_3,$$

quand l'ordre de succession des faces du tétraèdre T est dans le sens opposé BCD.

D'après les relations qui précèdent, on constate que les tétraèdres T_1 et T'_1 sont égaux comme ayant leurs faces égales chacune à chacune, et la conclusion est la même pour les tétraèdres T_2 et T'_2, T_3 et T'_3.

105. Théorème. — *Les sphères circonscrites aux tétraèdres* T_1 *et* T'_1, T_2 *et* T'_2, T_3 *et* T'_3 *ont pour centre commun le* premier *point de* Lemoine K *du tétraèdre* T. *Quand un couple d'arêtes opposées de ce tétraèdre est rectangulaire, deux des sphères coïncident, et si le tétraèdre* T *est orthocentrique les trois sphères sont confondues* (1).

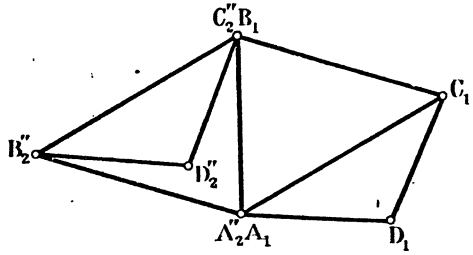
En effet, les plans médiateurs des côtés des quadrangles gauches Q_i $(i = 1, 2, 3)$, et Q'_i concourent, d'une part, aux centres des sphères circonscrites à ces quadrangles et, d'autre part, au *premier* point de Lemoine K du tétraèdre T.

Les sphères circonscrites aux tétraèdres égaux T_1 et T'_1, étant concentriques, se confondent et il en est de même des sphères cir-

(1) V. Thébault, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (Paris), 1941, pp. 327 et 967.

conscrites aux tétraèdres T_2 et T'_2 et des sphères circonscrites aux tétraèdres T_3 et T'_3. Il y a donc, en général, trois sphères distinctes (K, σ_1), (K, σ_2), (K, σ_3).

D'autre part, si l'on amène par translation l'arête A_2C_2 du tétraèdre T_2 à coïncider avec l'arête A_1B_1 du tétraèdre T_1 de manière que le tétraèdre $A_2C_2D_2B_2$ prenne la position $A_1(A''_2)B_1(C''_2)D''_2B''_2$, le centre de la sphère $A_1B_1C_1D_1$ coïncide avec le point de rencontre de la perpendiculaire au plan du triangle $A_1B_1C_1$ menée par le centre du cercle circonscrit à ce triangle et de la perpendiculaire au plan $C_1D_1A_1$ menée par le centre du cercle $C_1D_1A_1$. De même, le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $A''_2C''_2D''_2B''_2$ est à l'intersection des perpendiculaires élevées par les centres des cercles $A''_2C''_2B''_2$ et $C''_2D''_2B''_2$ aux plans de ces cercles. Comme les triangles $A_1B_1C_1$ et $A''_2C''_2B''_2$ sont coplanaires, et que les triangles $C_1D_1A_1$ et $C''_2D''_2B''_2$ sont équipollents, les rayons des sphères $A_1B_1C_1D_1$ et $A''_2C''_2D''_2B''_2$ (ou $A_2C_2D_2B_2$) ne seront égaux que si les plans $C_1D_1A_1$ et $C''_2D''_2B''_2$ sont perpendiculaires au plan $A_1B_1C_1B''_2$.



En revenant à la configuration primitive (T, T_1, T_2), il faut donc que les plans $A_1B_1C_1$ et $C_1D_1A_1$ soient rectangulaires, de même que les plans $A_2C_2B_2$ et $C_2D_2B_2$. Or, comme le plan $A_1B_1C_1$ est perpendiculaire à CD et le plan $C_1D_1A_1$ perpendiculaire à AB, ces plans seront rectangulaires si les arêtes AB et CD sont orthogonales, et réciproquement. Dès lors, deux sphères, de centre K, circonscrites aux tétraèdres T_i, se réduisent à une seule si un couple d'arêtes opposées du tétraèdre T est orthogonal, et réciproquement. Quand le tétraèdre T est orthocentrique, les sphères circonscrites aux tétraèdres T_i et T'_i sont donc confondues en une seule.

106. *Mesures des rayons des sphères* (K, σ_i). — Avec les notations déjà invoquées, S, k, θ_a, θ_b, θ_c, les rayons r_1, r_2 des cercles circonscrits aux triangles $C_1D_1A_1$, $D_1B_1A_1$, de centres ω_1, ω_2, ont pour mesures

$$r_1 = \frac{D_1A_1}{2\sin b'} = \frac{A.C.\, b \sin\theta_b}{S}, \qquad r_2 = \frac{B.D.\, b' \sin\theta_b}{S}.$$

Si M désigne le milieu du côté D_1A_1, le rayon σ_1 de la sphère circonscrite au quadrangle gauche Q_1 est égal à KA_1, et l'on a

$$\sigma_1^2 = \overline{KA_1}^2 = \overline{K\omega_2}^2 + \overline{\omega_2A_1}^2 = \overline{KM}^2 - \overline{\omega_2M}^2 + r_2^2.$$

Or, le quadrangle $K\omega_1 M\omega_2$ est inscriptible, et comme les plans $C_1D_1A_1$ et $D_1A_1B_1$ se coupent sous l'angle θ_b,

$$KM = \frac{\omega_1\omega_2}{\sin\theta_b},$$

et

$$\overline{\omega_1\omega_2}^2 = \overline{\omega_1 M}^2 + \overline{\omega_2 M}^2 - 2\omega_1 M . \omega_2 M \cos\theta_b.$$

Mais

$$\omega_1 M = \frac{1}{4} kbb' \operatorname{cotg} b' \sin\theta_b, \qquad \omega_2 M = \frac{1}{4} kbb' \operatorname{cotg} b \sin\theta_b;$$

donc

$$\omega_1\omega_2 = \frac{1}{4} kbb' \sin\theta_b [\operatorname{cotg}^2 b + \operatorname{cotg}^2 b' - 2 \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} b' \cos\theta_b]^{\frac{1}{2}},$$

et enfin

$$\sigma_1 = \frac{1}{4} kbb' \sin\theta_b \left[\frac{1}{\sin^2\theta_b}(\operatorname{cotg} b' - \operatorname{cotg} b \cos\theta_b)^2 + \frac{1}{\sin^2 b}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par des permutations circulaires convenables sur les lettres a, a', b, b', c, c', on obtient les mesures des rayons σ_2, σ_3 des sphères circonscrites aux quadrangles Q_2, Q_3.

Lorsque le tétraèdre T est *orthocentrique*, $\theta_a = \theta_b = \theta_c = \frac{\pi}{2}$, et l'on a

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2A.B.C.D}{3V.S}(1 - \cos^2 a \cos^2 a')^{\frac{1}{2}},$$

car, dans ce tétraèdre particulier,

$$\cos a \cos a' = \cos b \cos b' = \cos c \cos c'.$$

N. B. — Si le tétraèdre T est orthocentrique, les plans des faces $D_1A_1B_1$ et $B_1C_1D_1$ du tétraèdre T_1 sont aussi rectangulaires, car le plan $D_1A_1B_1$ est normal à l'arête BC et le plan $B_1C_1D_1$ normal à DA.

Les tétraèdres T_1, T_2, T_3 *ont donc deux dièdres opposés droits et les perpendiculaires communes aux deux couples d'arêtes opposées n'appartenant pas aux dièdres droits sont rectangulaires et se rencontrent.*

La seconde partie de cette remarque provient de ce que les côtés du quadrangle gauche dont les diagonales coïncident avec les arêtes des dièdres droits sont quatre génératrices d'un paraboloïde équilatère qui rencontrent à angle droit les deux génératrices principales.

Enfin, si le tétraèdre fondamental $T \equiv ABCD$ a deux dièdres opposés suivant les arêtes BC et DA droits, *le quadrangle gauche* $Q_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ *a les angles opposés* A_1, C_1 *droits*. La sphère circonscrite aux tétraèdres T_1 et T_2 a pour diamètre $B_1D_1 \equiv A_3B_3$ et le point K coïncide avec le milieu commun de B_1D_1 et A_3B_3. De plus, *les arêtes opposées* A_1C_1 *et* B_1D_1 *du tétraèdre* T_1 *sont rectangulaires,*

ainsi que les arêtes A_3B_3 *et* C_3D_3 *du tétraèdre* T_3, *et l'on a*

$$A^2 + D^2 = B^2 + C^2.$$

107. AUTRES PROPRIÉTÉS DES QUADRANGLES Q_1, Q_2, Q_3 ET DES TÉTRAÈDRES T_1, T_2, T_3. — THÉORÈME. — *La somme des carrés des côtés de chacun des quadrangles* Q_1, Q_2, Q_3 *et la somme de trois diagonales de ces quadrangles convenablement associées, est égale à la somme des carrés des arêtes du tétraèdre podaire du* premier *point de* LEMOINE K *du tétraèdre* T.

Car,

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{C_1D_1}^2 + \overline{D_1A_1}^2 = 4(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_d^2) = \frac{36V^2}{S}, \ldots,$$

et, d'après les relations (4) à (6),

$$\overline{A_1C_1}^2 + \overline{B_1D_1}^2 + \overline{A_2D_2}^2$$
$$= \frac{k^2}{4}\left[(aa' \sin\theta_a)^2 + (bb' \sin\theta_b)^2 + (cc' \sin\theta_c)^2\right] = \frac{36V^2}{S}, \ldots$$

COROLLAIRE. — *Les bimédianes* E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 *des tétraèdres* T_1, T_2, T_3 *relatives aux diagonales* A_1C_1 *et* B_1D_1, A_2D_2 *et* B_2C_2, A_3B_3 *et* C_3D_3 *des quadrangles* Q_1, Q_2, Q_3 *sont respectivement égales à la moitié des arêtes* $B_2C_2 = A_3B_3$, $A_1C_1 = C_3D_3$, $B_1D_1 = A_2D_2$ *des tétraèdres* T_1, T_2, T_3.

En effet,

$$4\overline{E_1F_1}^2 = \overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{C_1D_1}^2 + \overline{D_1A_1}^2 - (\overline{A_1C_1}^2 + \overline{B_1D_1}^2 + \overline{B_2C_2}^2) + \overline{B_2C_2}^2, \ldots$$

THÉORÈME. — *Les aires des faces des tétraèdres* T_1, T_2, T_3 *sont proportionnelles aux arêtes du tétraèdre* T *auxquelles leurs plans sont perpendiculaires.*

Car, on a, par exemple,

$$\text{aire } C_1D_1A_1 = \frac{1}{2} C_1D_1 . C_1A_1 \sin a = \frac{27V^3}{S^2} . a.$$

Les aires des faces des tétraèdres T_1, T_2, T_3 et, par suite, les distances des *premiers* points de LEMOINE aux plans de ces faces, sont proportionnelles aux côtés (a, a', c, c'), (c, c', b, b'), (b, b', a, a') des quadrangles ABCD, ACDB, ADBC.

COROLLAIRE. — *Dans un tétraèdre* orthocentrique T, *les sommes des carrés des aires des faces des tétraèdres* T_1, T_2, T_3 *sont égales.*

Car, dans ce cas,

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2.$$

THÉORÈME. — *Le volume de chacun des tétraèdres* T_1, T_2, T_3 *équivaut à deux fois celui du tétraèdre podaire du point* K *par rapport au tétraèdre* T.

En effet, d'après une formule classique, on obtient, par exemple, les égalités

$$\nu' = \overline{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} \cdot \overline{C_1D_1A_1} \cdot \overline{A_1B_1C_1} \sin\theta_a \cdot \frac{2}{A_1C_1},$$

qui se réduisent aux suivantes :

$$\nu' = \overline{A_1B_1C_1D_1} = \frac{162V^5}{S^3} = 2\nu = \overline{A_2C_2D_2B_2} = \overline{A_3D_3B_3C_3}.$$

THÉORÈME. — *Les plus courtes distances des arêtes opposées de chacun des tétraèdres* T_1, T_2, T_3 *perpendiculaires aux plans des faces du tétraèdre* T *sont inversement proportionnelles à deux arêtes opposées de celui-ci.*

Si l'on désigne par Δ_a et $\Delta_{a'}$ les plus courtes distances des arêtes opposées A_1B_1 et C_1D_1, A_1D_1 et B_1C_1 du tétraèdre T_1, des relations

$$\nu' = \frac{1}{6} A_1B_1 \cdot C_1D_1 \cdot \Delta_a \sin b = \frac{1}{6} A_1D_1 \cdot B_1C_1 \cdot \Delta_{a'} \sin b',$$

on déduit, en effet,

$$b \cdot \Delta_a = b' \cdot \Delta_{a'} = 2(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_d^2), \tag{7}$$

et ainsi de suite pour les bihauteurs des tétraèdres T_2, T_3.

THÉORÈME. — *Les plus courtes distances des arêtes* A_1C_1 *et* B_1D_1, A_2D_2 *et* B_2C_2, A_3B_3 *et* C_3D_3 *des tétraèdres* T_1, T_2, T_3 *sont inversement proportionnelles aux produits d'une des plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre* T *par le sinus de l'angle des deux autres.*

Si l'on désigne par δ la plus courte distance de A_1C_1 et B_1D_1, par α l'angle de ces arêtes du tétraèdre T_1 et par d'_a, d'_b, d'_c les plus courtes distances des arêtes BC et AD, AC et BD, AB et CD du tétraèdre T, en vertu de la relation (7) et de celles du paragraphe 45, 3°, on obtient, d'abord,

$$\frac{k^2}{4} aa' \sin\theta_a \cdot cc' \sin\theta_c \cdot \delta \sin\alpha = 4d_a d_c \cdot \Delta_{a'} \sin b',$$

puis, après réductions,

$$\delta \cdot d'_a \sin\alpha = \text{constante},$$

ce qui achève la démonstration, puisque les arêtes A_1C_1 et B_1D_1 du tétraèdre T_1 sont parallèles aux plus courtes distances d'_b, d'_c des arêtes AC et BD, AB et CD du tétraèdre T.

SECOND POINT DE LEMOINE

108. Définition. — Théorème. — *Si l'on marque sur chacune des faces* BCD, CDA, DAB, ABC *d'un tétraèdre* T *les points* A_1, B_1, C_1, D_1 *dont les distances aux trois arêtes qui limitent ces faces soient inversement proportionnelles aux arêtes opposées, les droites* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *concourent en un point* L *dont les distances aux plans des faces sont proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits aux triangles* BCD, CDA, DAB, ABC (*second* point de Lemoine du tétraèdre T).

Les coordonnées normales du point D_1 dans le triangle ABC étant proportionnelles à $\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}$, les coordonnées barycentriques de ce point sont proportionnelles à $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$. De même les coordonnées barycentriques du point A_1, par rapport au triangle BCD, sont proportionnelles à $\frac{a}{a'}, \frac{c'}{c}, \frac{b'}{b}$. On en conclut déjà que les droites AD_1 et DA_1 divisant l'arête BC dans le rapport $\frac{c}{c'} : \frac{b}{b'}$ sont situées dans un même plan, ce qui suffit à prouver que les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont concourantes.

Désignons maintenant par x, y, z, t des coordonnées barycentriques par rapport au tétraèdre T. Nous avons trouvé pour les points D_1 et A_1 respectivement,

$$x : y : z = \frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} : \frac{c}{c'} = ab'c' : bc'a' : ca'b'$$

$$y : z : t = \frac{c'}{c} : \frac{b'}{b} : \frac{a}{a'} = bc'a' : ca'b' : abc.$$

Il en résulte que les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 concourent en un point L pour lequel

$$(1) \qquad x : y : z : t = ab'c' : bc'a' : ca'b' : abc,$$

de sorte que ses coordonnées barycentriques sont entre elles comme les produits des trois arêtes des faces correspondantes, ou comme les quantités

$$\frac{R_a}{h_a}, \quad \frac{R_b}{h_b}, \quad \frac{R_c}{h_c}, \quad \frac{R_d}{h_d}.$$

Réciproquement, si l'on désigne les coordonnées normales du point D_1 dans le triangle ABC par x_1, y_1, z_1, on a

$$x_1 : y_1 : z_1 = \frac{x}{A \sin a} : \frac{y}{B \sin b} : \frac{z}{C \sin c},$$

c'est-à-dire

$$x_1 : y_1 : z_1 = \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'},$$

et ainsi de suite pour les points A_1, B_1, C_1.

Les distances x', y', z', t' du point L aux faces BCD, CDA, DAB, ABC sont telles que

$$(2) \qquad \frac{R_a}{x'} = \frac{R_b}{y'} = \frac{R_c}{z'} = \frac{R_d}{t'} = \frac{\Sigma A R_a}{3V}$$
$$= \operatorname{cotg} \theta = \frac{R_a}{h_a} + \frac{R_b}{h_b} + \frac{R_c}{h_c} + \frac{R_d}{h_d} \text{ (1)}.$$

Par analogie avec la géométrie du triangle, les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont les *premières* symédianes et l'angle θ, l'angle de BROCARD du tétraèdre T.

109. POINTS ASSOCIÉS HARMONIQUES DU POINT L. — Si l'on change de signe une ou deux des coordonnées normales du point L, on obtient, avec celui-ci, deux quaternes de points :

$$L_a(-R_a, R_b, R_c, R_d), \qquad L_b(R_a, -R_b, R_c, R_d),$$
$$L_c(R_a, R_b, -R_c, R_d), \qquad L_d(R_a, R_b, R_c, -R_d),$$

et

$$L(R_a, R_b, R_c, R_d), \qquad L_1(-R_a, R_b, R_c, -R_d),$$
$$L_2(R_a, -R_b, R_c, -R_d), \qquad L_3(R_a, R_b, -R_c, -R_d).$$

Il résulte des coordonnées que les points (L_a, L_b, L_c, L_d) coïncident avec les conjugués harmoniques du point L par rapport aux segments AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 et que les points (L_1, L_2, L_3) se confondent avec les conjugués harmoniques du point L par rapport aux segments $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, c_1c_1 interceptés par les arêtes opposées BC et DA, CA et DB, AB et DC sur les droites qui s'appuient sur ces arêtes en passant par le point L.

Par suite, les deux tétraèdres $T \equiv ABCD$ et $\mathcal{T}_1 \equiv LL_1L_2L_3$ présentent cette particularité que deux arêtes opposées quelconques de l'un, par exemple, AB et DC, sont partagées harmoniquement par

(1) V. THÉBAULT, *Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles*, 1922, 172.

les deux arêtes correspondantes L_1L_2 et LL_3 de l'autre tétraèdre. On en déduit que chacun de ces tétraèdres est autopolaire par rapport à l'autre, c'est-à-dire que chaque sommet de l'un des tétraèdres est le pôle de la face opposée par rapport à l'autre tétraèdre.

Ces tétraèdres T et $\mathcal{T}_1$ sont homologiques, le centre d'homologie étant le point L_a et le plan d'homologie le plan $L_bL_cL_d$.

Le tétraèdre $\mathcal{T} \equiv L_aL_bL_cL_d$ est également autopolaire par rapport au tétraèdre T et ces deux tétraèdres se correspondent dans une homologie de centre L dont le plan coïncide avec le plan $L_1L_2L_3$ (¹).

Conséquences. — *Les tétraèdres* T, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ *forment un système* desmique *et les sommets des tétraèdres* $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ *sont alignés sur les sommets* A, B, C, D *du tétraèdre* T *d'après les répartitions suivantes* :

A	L *et* L_a,	L_1 *et* L_d,	L_2 *et* L_c,	L_3 *et* L_b,
B	L *et* L_b,	L_1 *et* L_c,	L_2 *et* L_d,	L_3 *et* L_a,
C	L *et* L_c,	L_1 *et* L_b,	L_2 *et* L_a,	L_3 *et* L_d,
D	L *et* L_d,	L_1 *et* L_a,	L_2 *et* L_b,	L_3 *et* L_c.

110. Théorème. — *Les points* L, L_1, L_2, L_3 *sont les seuls points* P *dont les céviennes* AP, BP, CP, DP *rencontrent les faces opposées et la sphère circonscrite du tétraèdre* T *en des points* A_1 *et* A_2, B_1 *et* B_2, C_1 *et* C_2, D_1 *et* D_2, *de manière que les quaternes* (A, A_1, P, A_2), (B, B_1, P, B_2), (C, C_1, P, C_2), (D, D_1, P, D_2) *soient harmoniques.*

En effet, l'équation barycentrique de la sphère (O, R) circonscrite au tétraèdre T est

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + a'^2xu + b'^2yu + c'^2zu = 0.$$

Si α, β, γ, δ sont les coordonnées d'un point cherché P, celles du point A_2 sont $-\alpha$, β, γ, δ, et A_2 se trouve sur la sphère (O, R) si

$$(1) \qquad a'^2\beta\gamma + b'^2\beta\delta + c'^2\gamma\delta - (b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta + a'^2\delta\alpha) = 0.$$

De même, pour que B_2 et C_2 soient sur (O, R), il faut et il suffit que

$$(2) \qquad b^2\gamma\alpha + a'^2\delta\alpha + c'^2\gamma\delta - (a^2\beta\gamma + c^2\alpha\beta + b'^2\beta\delta) = 0,$$
$$(3) \qquad c^2\alpha\beta + a'^2\delta\alpha + b'^2\beta\delta - (a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c'^2\gamma\delta) = 0.$$

Notons que si les égalités (1), (2), (3) ont lieu, en les ajoutant on a

$$a'^2\delta\alpha + c'^2\gamma\delta + b'^2\beta\delta - (a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta) = 0,$$

autrement dit, si A_2, B_2, C_2 sont sur (O, R), D_2 y est aussi.

(¹) Les tétraèdres T et $A_1B_1C_1D_1$ ont également pour centre d'homologie le point L et pour plan d'homologie le plan $L_1L_2L_3$.

L'addition membre à membre de (1) et (2), (1) et (3), (2) et (3) donne

$$c'^2\gamma\delta = c^2\alpha\beta, \qquad b'^2\beta\delta = b^2\gamma\alpha, \qquad d'^2\delta\alpha = a^2\beta\gamma,$$

relations qui, multipliées deux à deux membre à membre, donnent

$$b'^2c'^2\delta^2 = b^2c^2\alpha^2, \qquad a'^2b'^2\delta^2 = a^2b^2\gamma^2, \qquad a'^2c'^2\delta^2 = a^2c^2\beta^2$$

ou

$$\frac{\alpha^2}{a^2b'^2c'^2} = \frac{\beta^2}{a'^2b^2c'^2} = \frac{\gamma^2}{a'^2b'^2c^2} = \frac{\delta^2}{a^2b^2c^2}.$$

Il existe donc quatre positions du point P : le *second* point de LEMOINE L du tétraèdre, de coordonnées

$$\alpha = ab'c', \qquad \beta = bc'a', \qquad \gamma = ca'b', \qquad \delta = abc,$$

et les points $(\alpha, -\beta, -\gamma, \delta)$, $(\alpha, -\beta, \gamma, -\delta)$, $(\alpha, \beta, -\gamma, -\delta)$, qui sont les associés harmoniques du point $P \equiv L$ dans les combles du tétraèdre T.

111. SECTIONS ANTIPARALLÈLES. — Des plans parallèles aux plans tangents en A, B, C, D à la sphère circonscrite (O, R) découpent dans les trièdres de sommets A, B, C, D des triangles t_a, t_b, t_c, t_d semblables entre eux, par la condition que chaque côté de l'un d'eux est proportionnel au produit aa', bb', cc' de l'arête antiparallèle dans la même face du tétraèdre T par l'arête opposée.

Ces plans sont les transformés de la sphère (O, R) par des inversions (A, k_a), (B, k_b), (C, k_c), (D, k_d), les puissances k_a, k_b, k_c, k_d étant arbitraires.

THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre* T, *les symédianes* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *passent par les centres des cercles inscrits aux triangles* t_a, t_b, t_c, t_d *découpés dans les trièdres* (A), (B), (C), (D) *par des plans parallèles aux plans tangents à la sphère circonscrite en* A, B, C, D.

Si les sommets α, β, γ du triangle $t_d \equiv \alpha\beta\gamma$ sont sur les arêtes DA, DB, DC, on obtient, d'abord,

$$a' \,.\, D\alpha = b' \,.\, D\beta = c' \,.\, D\gamma,$$

ensuite, d'après les propriétés de l'inversion,

$$(3') \qquad \frac{\beta\gamma}{aa'} = \frac{\gamma\alpha}{bb'} = \frac{\alpha\beta}{cc'} = \frac{k_d}{a'b'c'}.$$

Le théorème résulte, d'une part, de ce que les droites A_1D_1, B_1D_1, C_1D_1 rencontrent les arêtes BC, CA, AB en des points A″, B″, C″ qui partagent ces arêtes dans les rapports

$$\frac{c}{c'} : \frac{b}{b'}, \qquad \frac{a}{a'} : \frac{c}{c'}, \qquad \frac{b}{b'} : \frac{a}{a'},$$

et, d'autre part, que les droites DA″, DB″, DC″ coupent les côtés $\beta\gamma$, α, $\alpha\beta$ du triangle t_d aux points A‴, B‴, C‴ qui les divisent dans les rapports

$$\frac{cc'}{bb'}, \quad \frac{aa'}{cc'}, \quad \frac{bb'}{aa'}.$$

Les droites αA‴, βB‴, γC‴ concourent au centre I_d du cercle inscrit (I_d) au triangle t_d sur la symédiane DD_1.

N. B. — Si l'on désigne par α', β', γ' les longueurs des côtés $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ du triangle t_d et que l'on pose

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2p, \qquad \frac{k_d}{a'b'c'} = \lambda_0,$$

il résulte des rapports égaux (3′),

$$p = \lambda_0(aa' + bb' + cc'), \qquad p - \alpha' = \lambda_0(-aa' + bb' + cc'),$$
$$p - \beta' = \lambda_0(aa' - bb' + cc'), \qquad p - \gamma' = \lambda_0(aa' + bb' - cc').$$

Les formules classiques donnent

$$(3'') \qquad S_d = 24\lambda_0^2 VR, \qquad r_d = \frac{24\lambda_0 VR}{aa' + bb' + cc'},$$

pour mesures de l'aire du triangle t_d et du rayon du cercle (I_d). De plus, la distance $I_dI'_a$ du point I_d au plan BCD est égale à

$$I_dI'_a = r_d \sin\alpha = r_d \sin A,$$

α étant l'angle dièdre suivant $\beta\gamma$, A l'angle de la sphère (O, R) avec le plan BCD, tandis que la distance LL'_a du point L au même plan est

$$(3''') \qquad LL'_a = R_a \operatorname{tang}\theta.$$

On a donc, d'abord,

$$\frac{DI_d}{DL} = \frac{I_dI'_a}{LL'_a} = \frac{r_d \sin A}{R_a \operatorname{tang}\theta},$$

puis, d'après (3′) (3″) et (3‴),

$$(4) \qquad \frac{DI_d}{DL} = \frac{k_d}{a'b'c'} \cdot \frac{aa' + bb' + cc'}{ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc}.$$

Dans le cas où $I_d \equiv L$,

$$(5) \qquad \frac{k_d}{a'b'c'} = \frac{aa' + bb' + cc'}{ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc}.$$

Il résulte encore des égalités (3) que si l'on choisit les puissances relatives aux sommets A, B, C, D de manière que

$$(6) \qquad \frac{k_a}{a'bc} = \frac{k_b}{b'ca} = \frac{k_c}{c'ab} = \frac{k_d}{a'b'c'} = \frac{1}{k},$$

les sections antiparallèles correspondant à une même valeur de k sont égales entre elles.

112. THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre* T, *les sommets* A″, B″, C″, D″ *d'un tétraèdre* T″ *dont les plans des faces découpent dans les trièdres de sommets* A, B, C, D *des sections antiparallèles égales, sont situés sur les droites* A′L, B′L, C′L, D′L *qui joignent les sommets du tétraèdre tangentiel* T′ ≡ A′B′C′D′ *au* second *point de* LEMOINE *du tétraèdre fondamental.*

En vertu des relations (5), les distances du centre d'homothétie K des tétraèdres T′ et T″ aux plans des faces homologues de ces tétraèdres sont proportionnelles aux quantités $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$, $a'b'c'$. Le point K reste donc fixe lorsque k varie et les points A″, B″, C″, D″ décrivent les droites AK, BK, CK, DK. Or, le tétraèdre T″ se réduit à un point confondu avec K et le second point de LEMOINE du tétraèdre T lorsque

$$k = \frac{a'bc}{k_a} = \frac{ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc}{aa' + bb' + cc'},$$

en vertu des égalités (5) et (6).

N. B. — Les droites A′L, B′L, C′L, D′L sont les lieux des points de rencontre de trois sections antiparallèles égales (*secondes symédianes*).

Les coordonnées normales des pieds A_3, B_3, C_3, D_3 de ces symédianes sur les faces BCD, CDA, DAB, ABC, dans les triangles de ces faces, sont proportionnelles aux quantités

$$A_3;\ a(-aa' + bb' + cc'),\ b(aa' - bb' + cc'),\ c(aa' + bb' - cc');\ B_3;\ \ldots$$

113. TÉTRAÈDRE MÉTAHARMONIQUE $\mathfrak{T} \equiv L_aL_bL_cL_d$. — *Relations métriques.* LEMME. *Etant donné un tétraèdre* T *et un point* D_1 *dans le plan de la face* ABC, *dont les coordonnées barycentriques, par rapport au triangle* ABC, *soient* m, n, p, *on a*

$$(7)\quad (m+n+p)\overline{DD_1}^2 = (m+n+p)(ma'^2 + nb'^2 + pc'^2) - (npa^2 + pmb^2 + mnc^2).$$

En effet, si la droite AD_1 rencontre l'arête BC en A″, le théorème de STEWART appliqué aux distances AA″, b, c du point A, puis aux distances DA″, b', c' du point D aux points collinéaires A″, B, C, donne déjà

$$(n+p)^2\overline{AA''}^2 = (n+p)(pb^2 + nc^2) - npa^2,$$

et

$$(n+p)^2\overline{DA''}^2 = (n+p)(pc'^2 + nb'^2) - npa^2.$$

Le même théorème appliqué aux distances DD_1, DA'', a' du point D aux points alignés D_1, A'', A donne la relation (7). Le pied D_1 de la symédiane DD_1 ayant pour coordonnées barycentriques $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, dans le triangle ABC, si l'on pose

$$m = \frac{a}{a'}, \qquad n = \frac{b}{b'}, \qquad p = \frac{c}{c'},$$

et, pour la commodité,

$$aa' + bb' + cc' = s, \qquad aa'bb'cc' = P,$$
$$ab'c' + bc'a' + ca'b' + abc = p_A + p_B + p_C + p_D = S,$$
$$m + n + p = \frac{S - 2p_D}{a'b'c'}, \qquad ma'^2 = aa', \qquad nb'^2 = bb', \qquad pc'^2 = cc',$$
$$npa^2 = \frac{p_D}{a'b'c'} . aa', \quad pmb^2 = \frac{p_D}{a'b'c'} . bb', \quad mnc^2 = \frac{p_D}{a'b'c'} . cc'.$$

Tenant compte de l'égalité (1) et du quaterne harmonique défini au paragraphe 110, on déduit de la relation (7) l'expression simple

$$(8) \qquad \overline{DD_1}^2 = s . \frac{S - 2p_D}{(S - p_D)^2} . a'b'c'$$

de la mesure du carré de la symédiane DD_1 et les expressions analogues de $\overline{AA_1}^2$, $\overline{BB_1}^2$, $\overline{CC_1}^2$, par des permutations circulaires convenables sur les lettres a, a', b, b', c, c'.

D'autre part, on obtient, d'abord,

$$\frac{DL}{LD_1} = \frac{S - p_D}{p_D} = \frac{DL_d}{D_1L_d}, \qquad \frac{DL}{DD_1} = \frac{S - p_D}{S},$$

puis successivement

$$\overline{DL}^2 = \frac{s}{S^2}(S - 2p_D) . a'b'c', \qquad \overline{DL_d}^2 = \frac{s}{S - 2p_D} . a'b'c',$$

et enfin

$$(9) \qquad DL . DL_d = \frac{s}{S} . a'b'c';$$

ce qui permet d'énoncer cette propriété caractéristique du *second* point de Lemoine L et de ses associés L_a, L_b, L_c, L_d :

Théorème. — *Dans un tétraèdre* T, *les associés* L_a, L_b, L_c, L_d *du* second *point de* Lemoine L *se confondent avec les points où les symédianes* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *recoupent la sphère circonscrite.*

Car, d'après les égalités (5) et (8),

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{DL}.\mathrm{DL}_d = \frac{s}{\mathrm{S}}.a'b'c' = k_d,$$

k_d étant la puissance de l'inversion (D, k_d) qui transforme la section antiparallèle passant par le point L en la sphère (O, R).

Démonstration analytique. — L'équation normale de la sphère (O, R) étant

$$\mathrm{S}(x, y, z, t) = c^2\mathrm{AB}xy + b^2\mathrm{AC}xz + a'^2\mathrm{AD}xt + a^2\mathrm{BC}yz + b'^2\mathrm{BD}yt + c'^2\mathrm{CD}zt = 0,$$

et celle de la droite DL,

$$\frac{x}{\mathrm{R}_a} = \frac{y}{\mathrm{R}_b} = \frac{z}{\mathrm{R}_c} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{A}x}{ab'c'} = \frac{\mathrm{B}y}{bc'a'} = \frac{\mathrm{C}z}{ca'b'} = l,$$

cette droite recoupe la sphère au point

$$\mathrm{P} \equiv l.aa'bb'cc'(aa' + bb' + cc') + \mathrm{D}tabc(aa' + bb' + cc') = 0,$$

et

$$l = \frac{-\mathrm{D}t}{abc}.$$

Donc

$$\frac{x}{\mathrm{R}_a} = \frac{y}{\mathrm{R}_b} = \frac{z}{\mathrm{R}_c} = \frac{t}{\mathrm{R}_d},$$

et le point P coïncide, sur la sphère circonscrite au tétraèdre, avec le conjugué harmonique L_d du point L, par rapport aux points D, D_1.

THÉORÈME RÉCIPROQUE. — *Dans un tétraèdre* T, *si un point* P *de coordonnées normales* (x_1, y_1, z_1, t_1) *est tel que ses associés, de coordonnées*

$$(-x_1, y_1, z_1, t_1), \quad (x_1, -y_1, z_1, t_1), \quad (x_1, y_1 - z_1, t_1), \quad (x_1, y_1, z_1, -t_1),$$

sont sur la sphère circonscrite, il coïncide avec le second *point de* LEMOINE L.

En effet, d'après l'équation précitée de la sphère (O, R), les coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1 étant positives, les conditions imposées sont

$$\mathrm{S}(-x_1, y_1, z_1, t_1) = \mathrm{S}(x_1, -y_1, z_1, t_1) = \mathrm{S}(x_1, y_1, -z_1, t_1) = \mathrm{S}(x_1, y_1, z_1, -t_1) = 0,$$

et il en résulte

$$c'^2\mathrm{CD}z_1t_1 - c^2\mathrm{AB}x_1y_1 = 0, \quad a'^2\mathrm{AD}x_1t_1 - a^2\mathrm{BC}y_1z_1 = 0,$$
$$b'^2\mathrm{BD}y_1t_1 - b^2\mathrm{AC}x_1z_1 = 0.$$

Éliminant x_1, t_1, nous obtenons, d'abord,

$$b^2c'^2C^2z_1^2 = b'^2c^2B^2y_1^2,$$

puis

$$bc'Cz_1 = b'cBy_1.$$

En définitive, et par analogie,

$$x_1 : y_1 : z_1 : t_1 = R_a : R_b : R_c : R_d,$$

de sorte que le point P coïncide avec le *second* point de LEMOINE L du tétraèdre.

COROLLAIRE. — *Les coordonnées barycentriques du* second *point de* LEMOINE L, *dans le tétraèdre* T, *sont inversement proportionnelles aux coordonnées normales de ce point, par rapport au tétraèdre tangentiel* T'.

Car, d'après les égalités (10), les mesures des distances des faces du tétraèdre T' aux sections antiparallèles menées par le point L sont inversement proportionnelles aux quantités $ab'c'$, $bc'a'$, $ca'b'$, abc qui sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques du point L par rapport au tétraèdre T.

114. *Autres relations métriques.* — Le théorème de STEWART appliqué aux distances AD_1, a', AL_d du point A aux points alignés D_1, D, L_d donne

$$\overline{AL_d}^2 = \left(\frac{-aa' + bb' + cc'}{S - 2p_D}\right).a'bc, \tag{11}$$

et l'on obtient les valeurs de $\overline{BL_d}^2$, $\overline{CL_d}^2$ par des permutations circulaires convenables sur les lettres a, a', b, b', c, c'. Les formules (8) et (11) conduisent à la relation

$$abc.\overline{DD_1}^2 = ab'c'.\overline{AL_d}^2 + bc'a'.\overline{BL_d}^2 + ca'b'.\overline{CL_d}^2$$

qui constitue une extension du théorème de PTOLÉMÉE à un tétraèdre.

Les relations

$$LD.LL_d = LD(DL_d - DL) = LD.DL_d - \overline{DL}^2 = -\frac{2sP}{S^2},$$

qui expriment la puissance du point L, par rapport à la sphère (O, R), et, par suite, l'expression

$$\overline{OL}^2 = R^2 - \frac{2sP}{S^2} = R^2 - \frac{sP}{72V^2\cot g^2\theta}$$

du carré de la distance du point O au *second* point de LEMOINE L en fonction du rayon de cette sphère et des mesures des arêtes du tétraèdre T, proviennent aussi des relations (8) et (11).

115. Théorème. — *Les sections antiparallèles du tétraèdre* $\mathfrak{T}$ *sont semblables à celles du tétraèdre* T.

Des plans parallèles aux plans tangents en A, B, C, D, à la sphère (O, R) découpent dans les trièdres de sommets A, B, C, D des triangles semblables entre eux, par la condition que chaque côté de l'un d'eux est proportionnel au produit aa', bb', cc' de l'arête antiparallèle dans la même face du tétraèdre T par l'arête opposée.

Si l'on désigne par a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1 les mesures des arêtes du tétraèdre $\mathfrak{T}$ qui se confondent avec les transformées des arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC du tétraèdre T par l'inversion $(L, \overline{LO}^2 - R^2 = \lambda)$, en vertu des propriétés de cette transformation on a, d'abord,

$$(12)\qquad \begin{aligned} a_1 &= a\cdot\frac{\lambda}{LB.LC}, & a'_1 &= a'\cdot\frac{\lambda}{LD.LA},\\ b_1 &= b\cdot\frac{\lambda}{LC.LA}, & b'_1 &= b'\cdot\frac{\lambda}{LD.LB},\\ c_1 &= c\cdot\frac{\lambda}{LA.LB}, & c'_1 &= c'\cdot\frac{\lambda}{LD.LC}, \end{aligned}$$

puis

$$\frac{aa'}{a_1a'_1} = \frac{bb'}{b_1b'_1} = \frac{cc'}{c_1c'_1} = \frac{LA.LB.LC.LD}{\lambda^2},$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

Théorème. — *Les tétraèdres* $\mathfrak{T}$ *et* T *ont même* second *point de* Lemoine L.

En raison de propriétés déjà invoquées, (109), les sommets L_a, L_b, L_c, L_d du tétraèdre $\mathfrak{T}$ qui coïncident avec les barycentres de masses proportionnelles aux quantités

$$\begin{aligned} &(-ab'c',\ bc'a',\ ca'b',\ abc), & &(ab'c',\ -bc'a',\ ca'b',\ abc),\\ &(ab'c',\ bc'a',\ -ca'b',\ abc), & &(ab'c',\ bc'a',\ ca'b',\ -abc), \end{aligned}$$

appliquées aux sommets A, B, C, D du tétraèdre T, sont affectés de masses proportionnelles à

$$S - 2p_A,\qquad S - 2p_B,\qquad S - 2p_C,\qquad S - 2p_D,$$

dont le barycentre se confond avec le point L. Or, d'après les relations (12) et en posant

$$\frac{\lambda^3}{(LA.LB.LC.LD)^2} = K,\qquad \frac{PsK}{S^2} = \mu,$$

on obtient

$$\begin{aligned} a_1b'_1c'_1 &= \mu(S - 2p_A), & b_1c'a'_1 &= \mu(S - 2p_B),\\ c_1a'_1b'_1 &= \mu(S - 2p_C), & a_1b_1c_1 &= \mu(S - 2p_D). \end{aligned}$$

Le barycentre L'_1 des masses $a_1b'_1c'_1$, $b_1c'_1a'_1$, $c_1a'_1b'_1$, $a_1b_1c_1$ appliquées aux points L_a, L_b, L_c, L_d qui, en raison des égalités (1), se confond avec le second point de LEMOINE du tétraèdre $\mathcal{T}$, coïncide donc avec le point L.

THÉORÈME. — *Les tétraèdres* $\mathcal{T}$ et T *ont même angle de* BROCARD θ.

En vertu des propriétés de l'inversion, le rapport des volumes V_1 et V des tétraèdres $\mathcal{T}$ et T est égal à

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\lambda^4}{(LA.LB.LC.LD)^2}.$$

D'après les égalités (2), on a donc, de proche en proche,

$$\operatorname{cotg}\theta_1 = \frac{\Sigma a_1b'_1c'_1}{12V_1} = \frac{2\mu S}{12V_1} = -\frac{\lambda KS}{12V_1} = \frac{S}{12V} = \operatorname{cotg}\theta,$$

θ_1 désignant l'angle de BROCARD du tétraèdre $\mathcal{T}$.

COROLLAIRE. — *Les symédianes des tétraèdres* $\mathcal{T}$ et T *sont collinéaires* (tétraèdres cosymédians) *et les symédianes du tétraèdre* $\mathcal{T}$ *sont divisées harmoniquement par le point* L *et par les sommets* A, B, C, D *du tétraèdre* T.

116. SUR DEUX RÉSEAUX PONCTUEL ET TANGENTIEL DE QUADRIQUES LIÉS A UN TÉTRAÈDRE $T \equiv ABCD$ ET A UN POINT QUELCONQUE DE L'ESPACE L. — Si x_1, y_1, z_1, t_1 sont les coordonnées normales par rapport au tétraèdre T, le réseau ponctuel est formé des quadriques d'équation

$$(P) \equiv \lambda_1\left(\frac{yz}{y_1z_1} + \frac{xt}{x_1t_1}\right) + \lambda_2\left(\frac{zx}{z_1x_1} + \frac{yt}{y_1t_1}\right) + \lambda_3\left(\frac{xy}{x_1y_1} + \frac{zt}{z_1t_1}\right) = 0.$$

Les quadriques (P) passent par les huit points A, B, C, D et

$$A'(-x_1, y_1, z_1, t_1), \qquad B'(x_1, -y_1, z_1, t_1),$$
$$C'(x_1, y_1, -z_1, t_1), \qquad D'(x_1, y_1, z_1, -t_1).$$

Les équations des plans B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C' sont respectivement

$$-\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} + \frac{t}{t_1} = 0, \qquad \frac{x}{x_1} - \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} + \frac{t}{t_1} = 0,$$
$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} - \frac{z}{z_1} + \frac{t}{t_1} = 0, \qquad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} - \frac{t}{t_1} = 0.$$

L'équation des quadriques (Q) du réseau tangentiel est

$$(Q) \equiv \lambda_1(y_1z_1vw + x_1t_1us) + \lambda_2(z_1x_1wu + y_1t_1vs) + \lambda_3(x_1y_1uv + z_1t_1ws) = 0.$$

Toutes ces quadriques sont tangentes aux faces du tétraèdre $T' \equiv A'B'C'D'$.

Les tétraèdres T, T′ *et les réseaux* (P), (Q) *sont polaires réciproques par rapport à la quadrique* Q′ *d'équation*

$$\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} + \frac{z^2}{z_1^2} - \frac{2yz}{y_1z_1} - \frac{2xt}{x_1t_1} - \frac{2zx}{z_1x_1} - \frac{2yt}{y_1t_1} - \frac{2xy}{x_1y_1} - \frac{2zt}{z_1t_1} = 0,$$

tangente aux arêtes des deux tétraèdres, et le point L *est le pôle du plan d'équation*

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} + \frac{t}{t_1} = 0$$

pour toutes les quadriques des deux réseaux (P) *et* (Q).

Soient A_1, B_1, C_1, D_1 les points où les droites AL, BL, CL, DL coupent les faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre T; A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 les points où les droites A′L, B′L, C′L, D′L rencontrent les faces B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′ du tétraèdre T′. Les points A′ et L, B′ et L, C′ et L, D′ et L sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et A_1, B et B_1, C et C_1, D et D_1; de même, les points A et L, B et L, C et L, D et L sont conjugués harmoniques par rapport aux points A′ et A'_1, B′ et B'_1, C′ et C'_1, D′ et D'_1. Donc, *le point* L *joue le même rôle par rapport aux tétraèdres* T, T′ *et* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ *correspond à la quadrique* (Q′) *d'équation*

$$y_1z_1vw + x_1t_1us + y_1t_1vs + x_1y_1uv + z_1t_1ws = 0$$

qui touche les faces des tétraèdres T, T′ *en* A_1, B_1, C_1, D_1 *et* A'_1, B'_1, C'_1, D'_1. *A toute quadrique* (Q), *on peut faire correspondre une quadrique* (P) *de façon que les quadriques soient de raccordement suivant leur intersection par le plan polaire commun du point* L *pour les deux quadriques.*

En effet, l'équation tangentielle des quadriques (P) est

$$\Sigma x_1^2u^2 - \Sigma \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2\lambda_3}(y_1z_1vw + x_1t_1us) = 0$$

ou

$$(x_1u + y_1v + z_1w + t_1s)^2 - \Sigma \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_2\lambda_3}(y_1z_1vw + x_1t_1us) = 0.$$

La quadrique (P) correspondant à des valeurs données de λ_1, λ_2,

λ_3 est donc de raccordement à la quadrique (Q) d'équation

$$\Sigma \frac{-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_2\lambda_3}(y_1z_1vw+x_1t_1us)=0$$

dans les conditions énoncées.

Application à la sphère (O, R) *circonscrite et au* second *point de* Lemoine L *du tétraèdre* T. L'équation de la sphère (O, R) peut s'écrire

$$aa'\left(\frac{yz}{R_bR_c}+\frac{xt}{R_aR_d}\right)+bb'\left(\frac{zx}{R_cR_a}+\frac{yt}{R_bR_d}\right)+cc'\left(\frac{xy}{R_aR_b}+\frac{zt}{R_cR_d}\right)=0;$$

on en déduit ces propriétés : *Soient* L (R_a, R_b, R_c, R_d) *le* second *point de* Lemoine *du tétraèdre* T, *et* L_a, L_b, L_c, L_d *les points où les symédianes* AL, BL, CL, DL *recoupent la sphère circonscrite* (O, R). 1° *Le point* L *est le* second *point de* Lemoine *du tétraèdre* $\mathfrak{T}\equiv L_aL_bL_cL_d$; 2° *Si* A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 *sont les points où les droites* AL, BL, CL, DL *coupent les plans* $L_bL_cL_d$, $L_cL_dL_a$, $L_dL_aL_b$, $L_aL_bL_c$ *et si* A_1, B_1, C_1, D_1 *sont les points où les droites* L_aL, L_bL, L_cL, L_dL *coupent les plans* BCD, CDA, DAB, ABC, *la quadrique* (Q_1) *d'équation tangentielle*

$$\Sigma R_aR_buv=0$$

est inscrite aux deux tétraèdres T, $\mathfrak{T}$ *aux points* A_1, B_1, C_1, D_1 *et* A'_1, B'_1, C'_1, D'_1; 3° *Le plan polaire du point* L *pour la quadrique* (Q_1) *est le plan polaire du même point pour le tétraèdre* T.

Corollaire. — *Lorsque le tétraèdre* T *est* isodynamique, *la quadrique* (Q_1) *est de révolution.*

En effet, l'équation tangentielle de la sphère (O, R),

$$(\Sigma R_au)^2-\Sigma\frac{(aa'+bb'+cc')(-aa'+bb'+cc')}{bb'+cc'}(R_bR_cvw+R_aR_dus)=0$$

se réduit à

$$(\Sigma R_au)^2-3\Sigma R_aR_buv=0$$

lorsque $aa'=bb'=cc'$, et la sphère (O, R) est de raccordement à la quadrique (Q_1) suivant le cercle d'intersection par le plan polaire du point L.

117. Tétraèdres cosymédians. — Théorème. — *Étant donné un tétraèdre* $T\equiv ABCD$ *et un point arbitraire* P, *si l'on prend sur* PA, PB, PC, PD *des points* A', B', C', D', *tels que*

$$\overline{PA'}.\overline{PA}=\overline{PB'}.\overline{PB}=\overline{PC'}.\overline{PC}=\overline{PD'}.\overline{PD}=m,$$

le point P *et les* seconds *points de* Lemoine L *et* L' *des tétraèdres* T *et* $T'\equiv A'B'C'D'$ *sont collinéaires.*

Soient R_a, R_b, R_c, R_d et R'_a, R'_b, R'_c, R'_d les rayons des cercles circonscrits aux faces des tétraèdres T, T'; A, B, C, D et A', B', C', D' les aires de ces faces; A_2, B_2, C_2, D_2, A'_2, B'_2, C'_2, D'_2, L_1, L'_1 projections des points A, B, C, D, A', B', C', D', L, L' sur un plan quelconque ϖ passant par le point P, ces projections étant effectuées parallèlement à une direction choisie arbitrairement.

Les coordonnées barycentriques du *second* point de LEMOINE étant proportionnelles aux produits des aires par les rayons des cercles circonscrits des faces, on a, pour le tétraèdre T',

$$(1) \qquad \Sigma\overline{A'A'_2}.A'R'_a = \overline{L'L'_1}.\Sigma A'R'_a.$$

Or,

$$\frac{A'R'_a}{AR_a} = \frac{C'D'.D'B'.B'C'}{CD.DB.BC},$$

et

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{|m|}{PC.PD}, \qquad \frac{D'B'}{DB} = \frac{|m|}{PD.PB}, \qquad \frac{B'C'}{BC} = \frac{|m|}{PB.PC};$$

d'où

$$\frac{A'R'_a}{AR_a} = \frac{|m^3|}{\overline{PB}^2.\overline{PC}^2.\overline{PD}^2}.$$

Par suite, les produits $A'R'_a$, $B'R'_b$, $C'R'_c$, $D'R'_d$ sont proportionnels à $AR_a.\overline{PA}^2$, $BR_b.\overline{PB}^2$, $CR_c.\overline{PC}^2$, $DR_d.\overline{PD}^2$ et la relation (1) devient

$$(2) \qquad \Sigma\overline{A'A'_2}.AR_a.\overline{PA}^2 = \overline{L'L'_1}.\Sigma AR_a.\overline{PA}^2.$$

D'autre part,

$$\frac{\overline{A'A'_2}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = \frac{m}{\overline{PA}^2},$$

et de même

$$\frac{\overline{B'B'_2}}{\overline{BB_2}} = \frac{m}{\overline{PB}^2}, \qquad \frac{\overline{C'C'_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{m}{\overline{PC}^2}, \qquad \frac{\overline{D'D'}}{\overline{DD_2}} = \frac{m}{\overline{PD}^2}.$$

La relation (2) devient finalement

$$(3) \qquad m\Sigma\overline{AA_2}.AR_a = \overline{L'L'_1}.\Sigma AR_a.\overline{PA}^2.$$

Pour tout plan ϖ passant par le point L, on a

$$\Sigma\overline{AA_2}.AR_a = 0.$$

La relation (3) montre qu'alors $L'L'_2 = 0$, ce qui prouve que la droite PL passe par le point L'.

118. Conséquences de ce théorème. — 1° Quand le plan ϖ ne passe pas par le point L, on a

$$\Sigma\overline{AA_2}.AR_a = \overline{LL_2}.\Sigma AR_a.$$

Par conséquent,

$$\frac{\overline{PL'}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{L'L'_2}}{\overline{LL_2}} = \frac{m\Sigma AR_a}{\Sigma AR_a.\overline{PA}^2}.$$

Or, le théorème de Leibniz donne, d'abord,

$$\Sigma AR_a.\overline{PA}^2 = \overline{PL}^2.\Sigma AR_a + \Sigma\overline{AL}^2.AR_a,$$

ensuite

$$R^2.\Sigma AR_a = \overline{OL}^2.\Sigma AR_a + \Sigma\overline{AL}^2.AR_a,$$

enfin

$$\frac{\overline{PL'}}{\overline{PL}} = \frac{m}{\overline{PL}^2 + R^2 - \overline{OL}^2}.$$

2° Lorsque $m = \overline{PL}^2 + R^2 - \overline{OL}^2$, les points L et L′ sont confondus, et réciproquement. Les tétraèdres T et T′ sont *cosymédians*, d'après une expression appliquée aux triangles de cette sorte.

Si les sommets du tétraèdre T′ coïncident avec les secondes intersections des droites PA, PB, PC, PD avec la sphère (O, R), on a

$$\overline{PO}^2 - \overline{PL}^2 = 2R^2 - \overline{OL}^2.$$

Par suite : *Étant donné un tétraèdre* T *inscrit à une sphère* (O, R) *dont* L *est le* second *point de* Lemoine, M *le milieu de* OL, *le plan perpendiculaire à* OL *mené par le point* P′ *de* OL *tel que*

$$\overline{MP'} = \frac{R^2 - \overline{OL}^2}{2\overline{OL}},$$

est le lieu des points P *pour lesquels les tétraèdres* T′ *sont cosymédians du tétraèdre* T.

Dans ce cas, les tétraèdres T et T′ ont même angle θ de Brocard.

3° Lorsque $m = -(\overline{PL}^2 + R^2 - \overline{OL}^2)$, les points L et L′ sont symétriques par rapport au point P, et réciproquement.

Si A′, B′, C′, D′ sont les secondes intersections des droites PA, PB, PC, PD avec la sphère (O, R), on a

$$\overline{PO}^2 + \overline{PL}^2 = \overline{OL}^2.$$

Dès lors : *Étant donné un tétraèdre* T *inscrit à une sphère* (O, R) *dont* L *est le* second *point de* Lemoine, *la sphère décrite sur* OL *comme*

diamètre est le lieu des points P *pour lesquels les tétraèdres* T′ *déterminés par les secondes intersections des droites* PA, PB, PC, PD *et de la sphère* (O, R) *ont leur* second *point de* LEMOINE *symétrique du point* L *par rapport au point* P.

Plus généralement : *Étant donné un tétraèdre* T *inscrit à une sphère* (O, R) *dont* L *est le second point de* LEMOINE, M *le point de* OL *tel que* $\frac{\overline{MO}}{\overline{ML}} = \lambda'$, *la sphère de centre* M, *de rayon*

$$\frac{\sqrt{\overline{OL}^2.\lambda'^2 + (1-\lambda'^2)R^2}}{|1-\lambda'|}$$

est le lieu des points P *pour lesquels les tétraèdres* T′ *déterminés par les secondes intersections des droites* PA, PB, PC, PD *et de la sphère* (O, R) *ont leur* second *point de* LEMOINE L′ *tel que* $\frac{\overline{PL'}}{\overline{PL}} = \lambda'$.

Pour que la sphère (M) existe, il faut et il suffit que

$$\overline{OL}^2.\lambda'^2 + (1-\lambda'^2)R^2 \geqslant 0,$$

soit, en désignant par L_0 la puissance du point L pour la sphère (O, R),

$$\lambda'^2.L_0 + R^2 \geqslant 0 \qquad \text{ou} \qquad -\frac{R}{\sqrt{-L_0}} \leqslant \lambda' \leqslant \frac{R}{\sqrt{-L_0}}.$$

Quand $\lambda' = \pm\frac{R}{\sqrt{-L_0}}$, la sphère (M) se réduit au point M avec lequel le point P est confondu. Dans ce cas, puisque $\frac{\overline{PO}}{\overline{PL}} = \lambda'$, les points L′ et O coïncident et, en conséquence — il est facile de le montrer — le tétraèdre T′ est *équifacial*. Les points P correspondants étant les centres d'homothétie des cercles d'intersection de la sphère (O, R) et des plans menés par les points O et L perpendiculairement à la droite OL, on obtient ce théorème :

Étant donné un tétraèdre T *inscrit à une sphère* (O, R) *dont* L *est le* second *point de* LEMOINE, *si l'on considère les centres d'homothétie* P_1 *et* P_2 *des cercles d'intersection de la sphère* (O, R) *et des plans menés par les points* O *et* L *perpendiculairement à la droite* OL, *les droites* AP_1, BP_1, CP_1, DP_1 *et* AP_2, BP_2, CP_2, DP_2 *recoupent la sphère* (O, R) *en des points* A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 *et* A'_2, B'_2, C'_2, D'_2 *tels que les tétraèdres* $A_1B_1C_1D'_1$ *et* $A_2B'_2C'_2D'_2$ *sont* ÉQUIFACIAUX.

COROLLAIRE. — *Dans un tétraèdre* orthocentrique T, *d'orthocentre* H, *les* seconds *points de* LEMOINE *des tétraèdres* T *et* $A_hB_hC_hD_h$ *sont collinéaires.*

Car

$$\overline{HA_h}.\overline{HA} = \overline{HB_h}.\overline{HB} = \overline{HC_h}.\overline{HC} = \overline{HD_h}.\overline{HD}.$$

De même, si l'on désigne par L'_a, L'_b, L'_c, L'_d les *seconds* points de LEMOINE des tétraèdres HBCD, HCDA, HDAB, HABC et par L''_a, L''_b, L''_c, L''_d les *seconds* points de LEMOINE des tétraèdres déterminés par les pieds des hauteurs de ces tétraèdres, les ternes de points (A, L'_a, L''_a), (B, L'_b, L''_b), (C, L'_c, L''_c), (D, L'_d, L''_d) sont également alignés.

119. LE TÉTRAÈDRE $\mathcal{T}_1 \equiv LL_1L_2L_3$. — THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre* T, *le* second *point de* LEMOINE L *a le même plan polaire par rapport au tétraèdre et à la sphère circonscrite.*

En effet, les tétraèdres T et $\mathcal{T}_1$ étant autopolaires (109), le plan polaire du point L, par rapport au tétraèdre T, coïncide avec le plan $L_1L_2L_3$.

D'autre part, les points A, L, L_d, par exemple, étant alignés (109), et le point L_d situé sur la sphère (O, R) (113), le plan polaire du point L_1 pour le tétraèdre T, qui coïncide avec le plan LL_2L_3 (109), rencontre le segment rectiligne L_dA au conjugué harmonique du point L_1 par rapport aux points A et L_d et se confond, par suite, avec le plan polaire du point L_1 pour la sphère (O, R) circonscrite au tétraèdre T. De même, les plans LL_1L_3, LL_1L_2, qui contiennent le point L, coïncident avec les plans polaires des points L_2, L_3 pour la sphère (O, R). En définitive, le plan polaire du point L, par rapport à la sphère (O, R), passe par les points L_1, L_2, L_3 et coïncide avec le plan $L_1L_2L_3$.

COROLLAIRE. — *Les plans* LL_2L_3, LL_1L_3, LL_1L_2 *des faces du tétraèdre* $\mathcal{T}_1$ *se confondent respectivement avec les plans polaires des associés harmoniques* L_1, L_2, L_3 *du point* L, *par rapport au tétraèdre* T *et à la sphère circonscrite* (O, R).

La démonstration de cette proposition est analogue à celle du théorème précédent.

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DU THÉORÈME. — Les coordonnées barycentriques du point L étant proportionnelles aux quantités

$$(1) \qquad ab'c',\ bc'a',\ ca'b',\ abc \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{bca'},\ \frac{1}{cab'},\ \frac{1}{abc'},\ \frac{1}{a'b'c'},$$

son plan polaire, par rapport au tétraèdre T, a pour équation barycentrique

$$(2) \qquad bca'x + cab'y + abc'z + a'b'c't = 0.$$

D'autre part, l'équation barycentrique de la sphère (O, R) étant

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + a'^2xt + b'^2yt + c'^2zt = 0,$$

celle du plan polaire du point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, par rapport à cette sphère, est

$$\Sigma(b^2\gamma + c^2\beta + a'^2\delta) = 0,$$

dans laquelle il suffit de remplacer α, β, γ, δ par les coordonnées (1) du point L, pour constater qu'après suppression du facteur

$$aa' + bb' + cc' \neq 0,$$

elle se réduit à l'équation (2). Le théorème est donc démontré.

THÉORÈME. — *Le tétraèdre* $\mathfrak{T}_1$ *est* orthocentrique *et son orthocentre coïncide avec le centre de la sphère* (O, R) *circonscrite aux tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$.

Car les plans des faces du tétraèdre $\mathfrak{T}_1$ coïncidant avec les plans polaires des points L, L_1, L_2, L_3, pour la sphère (O, R), le tétraèdre $\mathfrak{T}_1$ est conjugué par rapport à cette sphère et son orthocentre coïncide avec le point O.

COROLLAIRE. — *Les plans des faces du tétraèdre* $\mathfrak{T}_1$ *se confondent avec les transformées des sphères décrites sur les segments* OL, OL_1, OL_2, OL_3 *comme diamètres, par l'inversion* (O, R^2).

Si L', L'_1, L_2, L'_3 sont les projections orthogonales des sommets L, L_1, L_2, L_3 du tétraèdre $\mathfrak{T}_1$ sur les faces opposées, on a, en effet, d'après le théorème qui précède,

$$OL.OL' = OL_1.OL'_1 = OL_2.OL'_2 = OL_3.OL'_3 = R^2.$$

COROLLAIRE. — *Les tétraèdres* T *et* $\mathfrak{T}$ *ont le même tétraèdre* $\mathfrak{T}_1$.

Car les tétraèdres T et $\mathfrak{T}$ étant autopolaires ainsi que les tétraèdres T et $\mathfrak{T}_1$, les tétraèdres $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_1$ sont nécessairement autopolaires.

120. TÉTRAÈDRE ISODYNAMIQUE. — Dans ce tétraèdre particulier où $aa' = bb' = cc'$, certaines des formules obtenues dans un tétraèdre quelconque se simplifient. Ainsi les coordonnées normales des pieds (A_1, B_1, C_1, D_1), (A_3, B_3, C_3, D_3) des premières et des secondes symédianes, par rapport aux faces correspondantes BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre T, sont proportionnelles à

$$(c', b', a), \qquad (a', b, c'), \qquad (c, b', a'), \qquad (a, b, c).$$

Les points A_1 et A_3, B_1 et B_3, C_1 et C_3 se confondent donc avec les points de LEMOINE des triangles des faces du tétraèdre.

Les symédianes AL et A'L sont donc portées par une même droite, de même que les symédianes BL et B'L, CL et C'L, DL et D'L.

NOTE PAR M. A. MARMION.

121. THÉORÈME. — *Étant donné un tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4 \equiv (A)$ *inscrit dans une quadrique* Q *il existe un tétraèdre* (A′) *inscrit dans* Q *et un tétraèdre* (A″) *conjugué à* Q *formant avec* (A) *un système desmique* [6].

Soient Q_1, Q_2, Q_3 les quadriques déduites de Q par les involutions biaxiales ayant pour axes deux arêtes opposées de (A) et Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4, les quadriques déduites de Q par les homologies involutives de centres A_1, A_2, A_3, A_4, les plans étant les faces opposées de (A). Si

$$(1) \qquad Q \equiv \Sigma x_{ij} x_i x_j = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4\,;\quad i \neq j)$$

est l'équation de Q en coordonnées barycentriques homogènes, les équations de Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4 s'obtiennent en changeant le signe d'une coordonnée, ce qui change le signe de trois termes, les équations de Q_1, Q_2, Q_3 s'obtiennent en changeant les signes de deux coordonnées, ce qui change les signes de quatre termes. Les deux sommes

$$Q + Q_1 + Q_2 + Q_3, \qquad Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q'_4$$

contiennent les six mêmes termes répétés quatre fois, avec le signe + pour douze termes et le signe — pour les douze autres; elles sont donc nulles et les quatre quadriques de chaque groupe passent par les huit points d'intersection de trois d'entre elles, parmi lesquels les sommets de (A).

Les quatre autres points sont, pour le premier groupe, les sommets d'un tétraèdre (A′) également inscrit à Q, qui est l'une des quadriques du groupe, et, pour le second groupe, les sommets d'un tétraèdre (A″).

Par suite de la façon dont on a obtenu les Q_i et les Q'_i, un des huit points A'_i ou A''_i étant donné, les sept autres s'obtiennent en lui appliquant les sept transformations involutives précédentes. Les tétraèdres (A), (A′) et (A″) forment donc un système desmique. Par suite les quatre sommets de (A′) sont les homologues des sommets de (A) dans une homologie involutive ayant pour centre un sommet de (A″) et pour plan la face opposée. Les sommets de (A) et de (A′) étant sur Q, un sommet de (A″) et la face opposée partagent harmoniquement quatre cordes de Q et par suite sont pôle et plan polaire par rapport à Q. Le tétraèdre (A″) est donc autopolaire par rapport à Q et la propriété énoncée se trouve établie. Chacun des trois tétraèdres est d'ailleurs autopolaire par rapport aux deux autres en vertu des propriétés des systèmes desmiques [5].

Pour les sommets de (A″) les Q'_i sont nulles. Or

$$\frac{1}{2}(Q' + Q'_j) \equiv -\alpha_{ij}x_ix_j + \alpha_{kl}x_kx_l.$$

Donc

$$\alpha_{ij}x_ix_j = \alpha_{kl}x_kx_l,$$
$$\alpha_{ik}x_ix_k = \alpha_{jl}x_jx_l.$$

Multipliant membre à membre et supprimant le facteur commun x_jx_k différent de zéro pour les sommets de (A″), il vient

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik}x_i^2 = \alpha_{kl}\alpha_{jl}x_l^2$$

ce qui donne, les ε désignant ± 1,

$$(2) \qquad \frac{x_1}{\sqrt{\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{42}}} = \varepsilon\frac{x_2}{\sqrt{\alpha_{34}\alpha_{41}\alpha_{13}}} = \varepsilon'\frac{x_3}{\sqrt{\alpha_{41}\alpha_{12}\alpha_{24}}} = \varepsilon''\frac{x_4}{\sqrt{x_{12}x_{23}x_{31}}}$$

avec $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = 1$.

122. Supposons maintenant que Q soit la sphère circonscrite S et nous appellerons (L) le tétraèdre (A″). En représentant par (ij) la longueur A_iA_j on a $\alpha_{ij} = (ij)^2$ et par suite (2) devient

$$(3) \qquad \frac{x_1}{(23)(34)(42)} = \varepsilon\frac{x_2}{(34)(41)(13)} = \varepsilon'\frac{x_3}{(41)(12)(24)} = \varepsilon''\frac{x_4}{(12)(23)(31)}$$

avec $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = 1$.

Soit L le point pour lequel $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = 1$, point intérieur à (A). Ses coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux produits des arêtes de chaque face. Pour avoir ses coordonnées normales il faut diviser ses coordonnées barycentriques par les aires des faces correspondantes, ce qui, d'après la formule $4R = \frac{abc}{S}$, donne des valeurs proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits aux faces. Les coordonnées des autres sommets de (L) et de (A′) ont les mêmes valeurs absolues avec deux signes ou un signe changés.

Le point L *est le second point de Lemoine.* — Les points L, L_1, L_2, L_3 sont tels que leurs plans polaires par rapport à la sphère circonscrite sont les mêmes que par rapport à l'un ou l'autre des tétraèdres (A) ou (A′), le tétraèdre dont ils sont les sommets étant autopolaire par rapport à la sphère et à chacun des tétraèdres (A) ou (A′).

Le tétraèdre (L) ayant la sphère circonscrite à (A) pour sphère conjuguée est orthocentrique, son orthocentre étant le centre O de cette sphère.

D'après les propriétés des systèmes desmiques, une arête quelconque de (A) rencontre deux arêtes opposées de (L), les plans de jonction avec cette arête étant conjugués par rapport aux faces de (A). Comme deux arêtes opposées de (L) sont polaires par rapport à la sphère S, ces plans de jonction sont conjugués par rapport à S et par suite coupent cette sphère suivant deux cercles orthogonaux qui sont, d'après ce qui précède, les deux cercles bissecteurs des cercles de S situés dans les faces de (A) contenant l'arête.

Si l'on inverse par rapport à un sommet A_i de (A), les cercles situés dans les trois faces issues de A_i deviennent les côtés d'un triangle situé dans un plan antiparallèle à la face opposée et leurs cercles bissecteurs, les bissectrices du triangle. Les droites joignant A_i à L, L_1, L_2, L_3 passent donc par les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle, A_iL passant par le centre du cercle inscrit puisque L est intérieur au tétraèdre.

En résumé :

Les droites joignant chaque sommet d'un tétraèdre (A) *aux centres des cercles inscrits aux sections antiparallèles à la face opposée concourent en un point* L, *le second point de Lemoine, dont les coordonnées tétraédriques normales sont proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits aux faces. Les droites joignant chaque sommet de* (A) *aux centres des cercles exinscrits aux mêmes sections concourent respectivement en des points* L_1, L_2, L_3 *qui ont les mêmes coordonnées que* L *avec deux signes changés. Le tétraèdre* (L) *est orthocentrique et autopolaire par rapport à la sphère circonscrite ainsi que par rapport au tétraèdre* (A).

Les droites A_iL *coupent la sphère circonscrite aux quatre sommets d'un tétraèdre* (A′) *formant avec* (A) *et* (L) *un système desmique. Ces points sont les intersections des cercles bissecteurs, sur la sphère circonscrite, des cercles circonscrits aux faces de* (A).

Comme on ne trouve, en partant de (A) inscrit à S, qu'un tétraèdre (A′) également inscrit et formant avec un troisième tétraèdre (L) un système desmique, si l'on était parti de (A′) on aurait trouvé (A) et (L).

Par suite :

Le second point de Lemoine du tétraèdre (A) *est aussi le second point de Lemoine du tétraèdre* (A′) *et il en est de même de ses associés* L_1, L_2, L_3.

Si l'on était parti de (L) et de sa sphère conjuguée S, il aurait suffi de se donner un point de cette sphère comme sommet de (A) ou de (A′) et l'on en aurait déduit les sept autres par les sept transformations involutives dont il a été déjà question : on aurait bien en effet obtenu un système desmique et les huit points seraient sur S car les carrés de leurs coordonnées, qui seuls entrent dans l'équation de

S rapportée à (L), sont les mêmes que ceux du point pris sur S. Donc :

Les sommets d'un tétraèdre orthocentrique obtus sont le second point de Lemoine et ses associés pour ∞^2 couples de tétraèdres inscrits à sa sphère conjuguée S, *dont les huit sommets sont un point quelconque de* S *et ses homologues dans les sept transformations involutives qui conservent le tétraèdre.*

123. *Centres isodynamiques et sphères d'Apollonius.* — Cherchons les centres d'inversions qui transforment les sommets du tétraèdre (A) en ceux d'un tétraèdre équifacial. Si M est un tel point, on doit avoir :

$$\frac{A_iA_j}{MA_i.MA_j} = \frac{A_kA_l}{MA_k.MA_l}$$

ou en représentant A_iA_j par (ij) comme précédemment et MA_i par (xi)

$$(xi)(xj)(kl) = (xk)(xl)(ij).$$

De même

$$(xi)(xk)(jl) = (xj)(xl)(ik).$$

En multipliant membre à membre et supprimant le facteur $(xj)(xk)$,

$$(xi)^2(jl)(kl) = (xl)^2(ij)(ik) \quad \text{ou} \quad (xi)^2(jk)(kl)(lj) = (xl)^2(ij)(jk)(ki).$$

Représentant (jk) (kl) (lj), produit des arêtes d'une face, par ν_i, les points cherchés satisferont à

$$(4) \qquad \nu_1(x1)^2 = \nu_2(x2)^2 = \nu_3(x3)^2 = \nu_4(x4)^2.$$

On sait que le système linéaire des sphères σ orthogonales à une même sphère est un système à quatre termes

$$(5) \qquad \sigma \equiv \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3 + \alpha_4\sigma_4 = 0$$

(où, bien entendu certains des α_i peuvent être nuls) et que si σ_i représente la puissance d'un point, *le centre de σ est le point de coordonnées barycentriques α_i par rapport au tétraèdre des centres des sphères σ_i* (c'est le centre de gravité de ces centres affectés de masses α_i).

Supposons que les sphères σ_i soient les sphères-points $(xi)^2 = 0$ dont la sphère circonscrite S est la sphère orthogonale. La sphère

$$(6) \qquad \nu_1(x1)^2 - \nu_2(x2)^2 = 0$$

est orthogonale à S et les coordonnées barycentriques de son centre par rapport au tétraèdre (A) sont

$$\nu_1, \quad -\nu_2, \quad 0, \quad 0.$$

C'est le point situé sur l'arête A_1A_2 et dans le plan

$$\frac{x_1}{\nu_1}+\frac{x_2}{\nu_2}+\frac{x_3}{\nu_3}+\frac{x_4}{\nu_4}=0$$

polaire de L par rapport à (A) c'est-à-dire $L_1L_2L_3$.

La sphère (6) est donc la sphère orthogonale à S qui a son centre à l'intersection de A_1A_2 et du plan $L_1L_2L_3$.

Les six sphères qu'on obtient en égalant deux des termes de l'équation (4) passent par les deux points d'intersection de trois d'entre elles. Ces deux points sont les *centres isodynamiques* et les six sphères précédentes sont les *sphères d'Apollonius de première espèce.*

L'équation

$$(7)\qquad \nu_1(x1)^2 \pm \nu_2(x2)^2 \pm \nu_3(x3)^2 \pm \nu_4(x4)^2 = 0$$

représente les huit sphères orthogonales à S ayant pour centres les sommets de (L) et de (A'). Avec tous les signes + on a une sphère imaginaire de centre L; avec un signe — on a les quatre sphères ayant pour centres les sommets de (A'), sphères-points puisque la sphère S qui leur est orthogonale contient leurs centres [1]; avec deux signes — on a les trois sphères de centres L_1, L_2, L_3 orthogonales à S, qui sont appelées *sphères d'Apollonius de seconde espèce* [2].

Elles passent par les centres isodynamiques car pour ces points les quatre termes de (7) ont même valeur absolue et ils figurent avec deux signes + et deux signes —. Les quatre sphères ayant pour centres L, L_1, L_2, L_3 sont orthogonales deux à deux car leurs centres sont conjugués deux à deux par rapport à S à laquelle elles sont orthogonales. Avec S elles forment un groupe de cinq sphères orthogonales deux à deux. Leurs centres sont les sommets d'un pentagone orthocentrique $OLL_1L_2L_3$. Ce sont les sphères conjuguées des cinq tétraèdres orthocentriques qu'on peut former avec ces cinq points. En résumé :

Les six sphères d'Apollonius de première espèce ont pour centres les intersections des arêtes de (A) *avec le plan* $L_1L_2L_3$ (*plan de Lemoine*) *et sont orthogonales à la sphère circonscrite* S; *elles passent par deux mêmes points* (*centres isodynamiques*) *qui sont centres d'inversions transformant les sommets de* (A) *en ceux d'un tétraèdre équifacial.* [*Par les mêmes inversions les sommets de* (A') *sont transformés en ceux du tétraèdre équifacial jumeau du précédent.*] *Les centres isodynamiques sont symétriques par rapport au plan de Lemoine et inverses*

---

[1] Pour ces points A'_i l'équation (7) s'écrit

$$\nu_i\,\overline{A_iA'_i}^2 = \Sigma\,\nu_j\,\overline{A_jA'_i}^2 \quad (j \neq i).$$

par rapport à S. *Ce sont les points limites du faisceau de sphères (faisceau de Schoute) déterminé par la sphère circonscrite et le plan de Lemoine. Par les centres isodynamiques passent aussi les trois sphères d'Apollonius de seconde espèce, orthogonales à* S *et ayant pour centres les points* L_1, L_2, L_3 *(qui sont les points diagonaux du quadrilatère complet dont les sommets sont les centres des sphères de première espèce). Les trois sphères d'Apollonius de seconde espèce, la sphère* $\mathcal{L}$ *(imaginaire) de centre* L *orthogonale à* S *et la sphère* S *forment un groupe de cinq sphères orthogonales deux à deux.*

Remarques. — 1° *Les sphères d'Apollonius de première espèce de* (A) *sont aussi celles de* (A′). — En effet, ces deux tétraèdres étant homologiques par rapport au point L et au plan $L_1L_2L_3$, les arêtes A_iA_j et $A'_iA'_j$ se coupent sur ce plan et par suite les sphères d'Apollonius de première espèce de ces deux tétraèdres, ayant mêmes centres et étant orthogonales à S coïncident.

2° *Les centres isodynamiques*, points limites d'un faisceau de sphères à cercle radical imaginaire, *sont toujours réels*. Ces points et les sphères d'Apollonius sont différents des éléments étudiés sous les mêmes noms par M. N. A. Court [1] et indiqués par M. Goormaghtigh dans sa Terminologie du tétraèdre [*Mathesis*, t. LX (1951) pp. 264 et 268].

124. Nous avons vu (123), que, sur la sphère S, les cercles bissecteurs des couples de cercles d'intersection $\gamma_i\gamma_j$ de S avec les faces de (A) passent par les sommets de (A′). Ces cercles contiennent deux sommets de (A) et deux sommets de (A′) et sont également les cercles bissecteurs des couples de cercles d'intersection de S avec les faces de (A′) car les relations de (A) avec (A′) sont entièrement réciproques. Les plans de chacun de ces cercles contiennent deux sommets de (L). Par un sommet L_i de (L) passent six de ces plans.

Leurs cercles d'intersection avec S, qui sont six des cercles précédents, sont orthogonaux au cercle d'intersection de S avec le plan polaire de L_i, ou avec la sphère de centre L_i orthogonale à S. On peut donc déterminer sur la sphère S par des conditions d'orthogonalité, qui se conservent dans une inversion, les traces, sur cette sphère, de la sphère de centre L orthogonale à S et des trois sphères d'Apollonius de seconde espèce.

Quant aux sphères d'Apollonius de première espèce, dont les centres sont sur une arête de (A) et sur le plan $L_1L_2L_3$, leurs traces sur S seront orthogonales à deux des traces des faces de (A) et à la trace de $L_1L_2L_3$. Par suite :

Si une inversion de centre M *quelconque transforme les sommets de* (A) *en ceux d'un tétraèdre* (α) *inscrit à une sphère* σ *inverse de* S, *les sommets du tétraèdre* (α') *inscrit à* σ *et qui forme avec un tétraèdre* (λ) *conjugué à* σ *un système desmique seront les inverses de ceux du tétraèdre* (A'). *Il en sera de même des sphères d'Apollonius de première et de seconde espèce, et par suite des centres isodynamiques, ainsi que de la sphère* $\mathfrak{L}$ *de centre* L. *Quant au tétraèdre* (λ), *ses sommets ne seront pas les inverses de ceux de* (L) *mais, les sphères centrées aux sommets correspondants étant inverses, ces points seront alignés avec le centre d'inversion* M.

Si la puissance d'inversion est choisie de façon que σ coïncide avec S, la trace de l'inversion sur S sera celle de l'homologie involutive de centre M ayant pour plan le plan polaire de M par rapport à S et les sommets des deux tétraèdres (α') et (λ) seront les homologues de ceux de (A') et (L) dans cette transformation involutive.

125. *Points de Beltrami, de Brocard, de Jacobi. Tétraèdres et angles de Brocard.* — On sait que, dans un triangle, si C_1, C_2, C_3 sont les cercles d'Apollonius, l'homologue du point de l'infini dans le produit de deux inversions par rapport à ces cercles n'a que deux positions (car l'inverse dans C_i du centre de C_j coïncide avec l'inverse dans C_j du centre de C_k) qui sont appelées points de Beltrami. Leurs inverses par rapport au cercle circonscrit sont les points de Brocard.

Dans le tétraèdre l'homologue du point de l'infini dans le produit de deux inversions par rapport à des sphères d'Apollonius de seconde espèce n'a que trois positions. En effet, deux de ces sphères S_i et S_j étant orthogonales, l'inverse dans S_i du centre de S_j ainsi que l'inverse dans S_j du centre de S_i coïncident avec l'intersection du plan radical et de la ligne des centres et les trois positions sont les pieds des hauteurs du triangle $L_1L_2L_3$ car le plan radical de S_i et S_j passe par L_k, centre d'une sphère orthogonale commune. Ces trois points sont appelés *point de Beltrami* [4]. Ce sont aussi, puisque le tétraèdre (L) est orthocentrique, trois pieds des bihauteurs et les *points de Brocard* [4], leurs inverses par rapport à S seront les trois autres, car deux arêtes opposées de (L) étant polaires réciproques par rapport à S, leur perpendiculaire commune passe par le centre O de S et les coupe en des points inverses par rapport à S.

Les six *points de Jacobi* [4] sont les points communs à la sphère S et à deux sphères d'Apollonius de seconde espèce S_i, S_j. Les cercles radicaux de S avec S_i et S_j étant dans les plans polaires de L_i et L_j par rapport à S, plans qui passent par LL_k, les points en question seront les intersections des trois arêtes de (L) issues de L avec la sphère S. En résumé :

Les trois points de Beltrami sont les pieds des hauteurs du triangle $L_1L_2L_3$; *ce sont aussi trois pieds de bihauteurs de* (L); *les points de Brocard, leurs inverses par rapport à* S *sont les trois pieds de bihauteurs sur les arêtes issues de* L *et les six points de Jacobi sont les intersections de ces trois arêtes avec* S.

Par analogie avec le triangle on peut appeler *premier tétraèdre de Brocard* celui qui est formé par les projections de L sur les axes des cercles circonscrits aux faces. Dans le plan chaque sommet du premier triangle de Brocard forme avec le côté correspondant du triangle fondamental un triangle isocèle et ces trois triangles sont semblables, l'angle à la base étant l'angle de Brocard. Dans l'espace, chaque sommet du premier tétraèdre de Brocard forme avec le cercle circonscrit à la base correspondante de (A) un cône droit et ces quatre cônes sont semblables puisque leur hauteur (coordonnée normale absolue de L) est proportionnelle au rayon de leur base, l'angle à la base étant celui que P. Delens [2] appelle *angle normal de Brocard* ψ déterminé par $\cot\psi = \frac{\Sigma v_i}{12V}$, V étant le volume du tétraèdre (108). Le même auteur définit un *angle principal de Brocard* U tel que $\cot U = \Sigma \cot A_i$, les angles A_i étant les angles de S avec les faces. Signalons les formules [3]

$$\cot U = 12V\Sigma\frac{1}{v_i}, \qquad \frac{\cot U}{\cot\psi} = \frac{2P}{S} = \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}},$$

P et S étant respectivement le produit et la somme des sinus des angles d'un triangle associé, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_0$ les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit d'un triangle associé, v_i désignant comme précédemment le produit des arêtes d'une face de (A).

Les sommets du *second tétraèdre de Brocard* sont les projections de O sur les droites joignant L aux sommets de (A).

Les points de Brocard et les sommets des tétraèdres de Brocard sont sur la sphère de diamètre OL, dite *sphère de Brocard* [2], inverse du plan de Lemoine par rapport à S.

126. *Ellipsoïde de Brocard.* — Les quadriques de révolution circonscrites à la sphère S le long de son intersection (imaginaire) avec le plan de Lemoine sont évidemment conjuguées au tétraèdre (L). Il y a une quadrique E de ce faisceau tangentiel tangente à une face de (A); elle est également tangente aux autres faces de (A) et à celles de (A′) car les carrés des coordonnées de ces plans par rapport au tétraèdre (L), qui interviennent seuls dans l'équation de E rapportée à (L), sont les mêmes que pour la face considérée. Cette qua-

drique est intérieure à S car sa polaire réciproque par rapport à S, circonscrite au tétraèdre tangentiel de (A), est extérieure. C'est donc un ellipsoïde et comme un plan méridien coupe S suivant un cercle bitangent extérieur, c'est-à-dire ayant son centre sur le petit axe de l'ellipse méridienne de E, celui-ci est un ellipsoïde de révolution aplati. Ses foyers principaux (imaginaires) sont conjugués harmoniques par rapport à L et O car dans l'ellipse méridienne ces deux points sont les traces, sur le petit axe, de la tangente et de la normale en un point. Par suite le cercle de ses foyers réels, intersection des cônes isotropes ayant pour sommets ces deux points conjugués par rapport à OL, se trouve sur la sphère de diamètre OL. Donc :

Les tétraèdres (A) *et* (A′) *sont circonscrits à un ellipsoïde de révolution aplati* (*ellipsoïde de Brocard*) [2] *conjugué à* (L), *tangent à la sphère* S *le long de son intersection imaginaire avec le plan de Lemoine. Son cercle focal se trouve sur la sphère de Brocard, de diamètre* OL. *Le cône droit de sommet* L *ayant pour base ce cercle a pour angle à la base l'angle normal de Brocard.*

Cette dernière propriété résulte de la propriété suivante, facile à démontrer, des cercles bitangents à une ellipse centrés sur le petit axe : le segment intercepté par un tel cercle sur une tangente à l'ellipse divisé par la distance du pôle de contact à la tangente est égal à la distance focale divisée par la distance du pôle de contact au centre de l'ellipse. Les tétraèdres inscrits à S et circonscrits à E ont donc même angle normal de Brocard. Signalons qu'ils ont également même angle principal de Brocard [3].

127. Le raisonnement précédent sur les quadriques de révolution tangentes à S le long de son intersection avec le plan $L_1L_2L_3$ s'applique aux autres faces de (L) et montre qu'il y a trois autres quadriques de révolution E_1, E_2, E_3 inscrites à (A) et (A′) et conjuguées à (L). Pour ces quatre quadriques, O et L_i sont conjugués par rapport aux deux foyers principaux de la quadrique correspondante, points isogonaux relativement au tétraèdre (A) [ou (A′)]. On sait que le lieu des conjugués harmoniques d'un point O par rapport aux couples de points isogonaux alignés avec lui est la biquadratique $\mathcal{B}$ passant par O et les centres O_i des huit sphères tangentes aux faces du tétraèdre fondamental.

En effet, les couples de points isogonaux, étant conjugués par rapport aux couples de plans bissecteurs, sont conjugués par rapport à toutes les quadriques passant par les huit points O_i et si deux points isogonaux P, P′ sont alignés avec O, le conjugué harmonique ω de O par rapport à ces deux points se trouvera sur toutes

celles de ces quadriques qui passent par O, c'est-à-dire sur la biquadratique déterminée par O et les huit points O_i.

Toutes les quadriques qui passent par les huit points O_i de (A) sont conjuguées par rapport à ce tétraèdre (puisque les couples de plans bissecteurs le sont) et par suite celles qui passent par un des huit sommets de (L) et (A′) passent par les sept autres. La biquadratique $\mathcal{B}$ est donc aussi circonscrite à (A′). Elle passe aussi par les homologues de O dans les sept involutions qui conservent le tétraèdre (A). Ses directions asymptotiques sont les droites-supports des couples isogonaux de milieu O puisque, pour ces couples, le conjugué de O est à l'infini.

Signalons que, pour le point O, trois de ces directions sont les droites-supports des trois couples de points de Servais, points communs aux quatre cylindres droits ayant pour bases les cercles circonscrits aux faces de (A), la quatrième étant la droite-hauteur du trièdre qu'elles forment. Ces directions d'axes de quadriques de révolution inscrites à (A) sont les mêmes pour tous les points de $\mathcal{B}$ et en particulier pour les sommets de (L) et de (A′).

Le tétraèdre (A), étant conjugué par rapport à toutes les quadriques qui passent par les huit points O_i, est le tétraèdre conjugué de la biquadratique $\mathcal{B}$. Ses sommets sont les sommets des quatre cônes du second ordre qui la contiennent. Chacun de ces cônes est déterminé par les quatre bissectrices du trièdre A_i et le rayon A_iO de la sphère circonscrite. Ces quatre cônes passent par les sommets de (L) et de (A′) et par suite, d'après le n° 122, par les centres des cercles inscrit et exinscrits de chaque triangle associé de la série correspondant à leur sommet.

On sait que les droites-supports des couples isogonaux alignés sur un point O forment un cône du troisième ordre circonscrit au tétraèdre (A), contenant les trois droites issues de O rencontrant deux arêtes opposées ainsi que les huit points O_i. En résumé :

Les sommets de (L) *et de* (A′) *se trouvent sur la biquadratique* $\mathcal{B}$ *déterminée par* O *et les huit centres* O_i *des sphères tangentes aux faces de* (A), *ayant le tétraèdre* (A) *pour tétraèdre conjugué. Les quatre cônes du second ordre contenant cette biquadratique ont pour sommets les sommets de* (A) *et chacun d'eux est déterminé par les quatre bissectrices du trièdre* A_i *et le rayon* A_iO *de la sphère circonscrite. Chacun de ces cônes passe par les centres des cercles inscrit et exinscrits de chaque triangle associé relatif au sommet du cône. Les douze sommets des tétraèdres* (A), (A′), (L), *les huit points* O_i *de* (A), *les trois couples de points de Servais, l'isogonal de* O, *les trois droites issues de* O *rencontrant deux arêtes opposées de* (A) *sont sur un cône du troisième*

ordre [1] *de sommet* O. *Les quatre quadriques de révolution inscrites à* (A) *et ayant pour centre chaque sommet de* (L) *ou de* (A′) *ont leurs axes parallèles aux trois droites-supports des couples de points de Servais et à la droite-hauteur du trièdre formé par ces droites.*

128. Signalons les propriétés suivantes qui résultent immédiatement de ce que les trois tétraèdres (A), (A′), (L) forment un système desmique :

Toute quadrique circonscrite ou inscrite à deux des tétraèdres est conjuguée au troisième et inversement toute quadrique conjuguée à l'un des tétraèdres et passant par un sommet (ou touchant une face) de l'un des deux autres passe par les sept autres sommets ou touche les sept autres faces.

Il y a une quadrique imaginaire Ω *conjuguée aux trois tétraèdres.* Son équation, en coordonnées barycentriques par rapport à (A), est

$$\Sigma \frac{x_i^2}{v_i^2} = 0.$$

Son centre, de coordonnées v_i^2, est le conjugué du centre de gravité d'un quelconque des tétraèdres par rapport aux six couples de plans qui passent par chaque arête de ce tétraèdre et contiennent les sommets des deux autres.

Par chaque conique d'intersection de Ω *avec les faces d'un des tétraèdres il passe trois ellipsoïdes* Q, Q′, Q″ *tangents à* Ω *le long de cette intersection et respectivement circonscrit, inscrit et tangent aux arêtes des deux autres tétraèdres ;* Q *et* Q′ *sont polaires réciproques par rapport à* Ω *et les deux tétraèdres sont polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à* Q″. Ces trois quadriques sont les quadriques de Steiner lorsque le système desmique, ayant un de ses plans à l'infini, est formé de deux tétraèdres jumeaux et de leur trièdre des bimédianes complété par le plan de l'infini.

Il y a douze ternes de telles quadriques.

129. Les neuf couples d'arêtes opposées de trois tétraèdres desmiques peuvent être groupés, en prenant un couple convenablement choisi dans chaque tétraèdre, de façon à former trois nouveaux tétraèdres d'un second système desmique que Stephanos nomme

---

[1] Le cône relatif à (A′) coïncide avec celui de (A) puisqu'ils ont douze génératrices communes; par suite, ce cône contient les éléments relatifs à (A′) : es huit centres des sphères tangentes aux faces, etc. — Voir *Mathesis*, 1953, pp. 215-233.

conjugué du premier [5]. Ainsi, en convenant d'appeler A'_i les sommets de (A') situés sur les droites A_iL et d'appeler L_1, L_2, L_3 les sommets de (L) situés respectivement sur $A_1A'_2$, $A_1A'_3$, $A_1A'_4$, les couples d'arêtes

$$A_1A_2,\ A_3A_4; \qquad A'_1A'_2,\ A'_3A'_4; \qquad LL_1,\ L_2L_3$$

forment un tétraèdre (B). Par chacun des douze sommets du premier système desmique passent deux autres arêtes, qui sont les arêtes des tétraèdres (B') et (B'') du système conjugué. Par conséquent il y a quatre faces de ces deux tétraèdres qui passent par chacun de ces points et ceux-ci constituent les six couples de points formant quadriques dégénérées du réseau tangentiel des quadriques tangentes aux huit faces de (B') et (B'').

Les centres des quadriques de ce réseau tangentiel sont contenus dans un plan P_1 et les milieux des arêtes précédentes, étant les intersections de P_1 avec les arêtes de (B), sont les sommets d'un quadrilatère complet. Le plan P_1 contenant une bimédiane de chacun des tétraèdres (A), (A') et (L), contient les trois barycentres de ces tétraèdres et ceux-ci sont également contenus dans les deux autres plans P_2 et P_3 analogues à P_1. Les trois plans P_1, P_2, P_3 passent donc par une même droite D sur laquelle sont les trois barycentres.

Remarquons que les sphères décrites sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres appartiennent à un faisceau et que les six couples de points rencontrés précédemment, faisant partie d'un réseau tangentiel, les sphères ayant pour diamètres les arêtes dont ils sont les extrémités (sphères orthoptiques des quadriques dégénérées en couples de points), appartiennent à un réseau ponctuel c'est-à-dire passent par deux mêmes points.

On obtient ainsi les propriétés suivantes énoncées par M. A. de Majo dans l'Intermédiaire des Recherches Mathématiques d'avril 1946 (p. 47), la première propriété ayant déjà été donnée par Veronese [6] :

Les trois barycentres des tétraèdres d'un système desmique sont sur une même droite D *; leurs neuf bimédianes se répartissent, à raison d'une pour chacun des tétraèdres, dans trois plans* P_1, P_2, P_3 *passant par* D *; les neuf sphères ayant pour diamètres les bimédianes se répartissent en trois groupes de trois sphères ayant même plan radical, perpendiculaire à* D, *chacun des groupes correspondant à trois bimédianes situées dans l'un des trois plans* P_1, P_2, P_3 *; les dix-huit sphères ayant pour diamètres les arêtes des tétraèdres se répartissent en trois groupes de six sphères ayant même axe radical, perpendiculaire à l'un des trois plans* P_1, P_2, P_3 *chacun des trois groupes correspondant à un couple d'arêtes opposées de chacun des tétraèdres.*

Dans le cas présent, les sphères décrites sur les bimédianes de (L) se confondent avec la première sphère d'Euler. Appelons l le rayon de cette sphère, m_1, m_2, m_3 les moitiés des bimédianes de (A), m'_1, m'_2, m'_3 celles de (A'). Soient g_0 le barycentre de (L), g et g' ceux de (A) et de (A'), x et x' les distances de g_0 à ces points, d_1, d_2 et d_3 les distances de g_0 aux plans radicaux des trois groupes de sphères. On a pour le premier groupe

$$(1) \qquad m_1^2 - (x - d_1)^2 = m_1'^2 - (x' - d_1)^2 = l^2 - d_1^2.$$

On tire de ce groupe et des deux autres

$$(2) \qquad \begin{cases} (m_1^2 - l^2 - x^2)x' = (m_1'^2 - l^2 - x'^2)x, \\ (m_2^2 - l^2 - x^2)x' = (m_2'^2 - l^2 - x'^2)x, \\ (m_3^2 - l^2 - x^2)x' = (m_3'^2 - l^2 - x'^2)x, \end{cases}$$

et enfin

$$(3) \qquad \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1'^2 - m_2'^2} = \frac{m_2^2 - m_3^2}{m_2'^2 - m_3'^2} = \frac{m_3^2 - m_1^2}{m_3'^2 - m_1'^2} = \frac{x}{x'}.$$

Les différences des carrés des bimédianes dans (A) *et* (A') *sont proportionnelles* (1), *le facteur de proportionnalité étant le rapport des distances des barycentres de* (A) *et de* (A') *à celui de* (L).

Comme conséquence on voit que si (A) a des bimédianes égales, il en sera de même de (A') et en particulier *si* (A) *est orthocentrique il en est de même de* (A') (2).

Si (A) *est isodynamique il en est de même de* (A') car les sommets de ces deux tétraèdres étant homologues dans une inversion, les produits des arêtes opposées sont proportionnels.

Plus généralement *si* (A) *est involutif, il en est de même de* (A'). En effet si a, a_1; b, b_1; c, c_1 désignent les longueurs des arêtes opposées, la condition pour que (A) soit involutif est d'après Neuberg (Mémoire sur le tétraèdre, p. 57)

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 + a_1^2 & a^2a_1^2 \\ 1 & b^2 + b_1 & b^2b_1^2 \\ 1 & c^2 + c_1^2 & c^2c_1^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} b^2 + b_1^2 - (a^2 + a_1^2) & b^2b_1^2 - a^2a_1^2 \\ c^2 + c_1^2 - (a^2 + a_1^2) & c^2c_1^2 - a^2a_1^2 \end{vmatrix} = 0$$

(1) D'un calcul, que nous omettons pour ne pas allonger cette note, il résulte que les sommes des carrés de deux arêtes opposées dans (A) et (A') sont proportionnelles et par suite aussi les carrés des bimédianes ou ces bimédianes elles-mêmes.

(2) Cette conclusion suppose que x n'est pas nul, mais l'hypothèse $x = 0$ a des conséquences inadmissibles. D'ailleurs, d'une façon générale, si deux tétraèdres d'un système desmique sont orthocentriques, il en est de même du troisième, car les tétraèdres du système desmique conjugué, qui sont formés par deux arêtes opposées de chacun des tétraèdres, ayant deux couples d'arêtes opposées rectangulaires, en ont trois.

et les termes relatifs à (A′) sont, dans chaque colonne, proportionnels à ceux de (A).

Remarques. — 1° En ajoutant les équations (2) relatives aux trois bimédianes, on trouve que *les sphères orthoptiques des ellipsoïdes de Steiner inscrits des trois tétraèdres appartiennent à un faisceau*, le plan radical étant le plan moyen des trois plans radicaux relatifs aux bimédianes.

2° *Les droites d'Euler des tétraèdres* (A), (A′) *et* (L), *qui passent toutes trois par* O, *se trouvent dans le plan joignant* O *à la droite* D.

130. Calculons ν'_1 en fonction de ν_1. Dans l'inversion par rapport à L, dont nous représenterons par $-k$ la puissance par rapport à S, on a :

$$(2'3') = (23)\frac{k}{\overline{LA_2}\,.\,\overline{LA_3}}$$

et des expressions analogues pour (3′4′) et (4′2′). En les multipliant et représentant par π le produit $\overline{LA_1}\,.\,\overline{LA_2}\,.\,\overline{LA_3}\,.\,\overline{LA_4}$ on obtient

$$(1) \qquad \nu'_1 = \nu_1\,.\,\overline{LA_1}^2\,\frac{k^3}{\pi^2}$$

Par suite

$$(2) \qquad \nu'_1 - \nu'_2 = \frac{k^3}{\pi^2}\left|\nu_1\,.\,\overline{LA_1}^2 - \nu_2\,.\,\overline{LA}^2\right|.$$

Or $\dfrac{\nu_1\,.\,\overline{LA_1}^2 - \nu_2\,.\,\overline{LA_2}^2}{\nu_1 - \nu_2}$ est la puissance de L par rapport à la sphère d'Apollonius de première espèce S_{12} d'équation $\nu_1(x1)^2 - \nu_2(x2)^2 = 0$. Cette sphère, orthogonale à S, a son centre dans le plan polaire de L et le point L se trouve dans le plan radical de S et S_{12}; sa puissance par rapport à S_{12} est donc $-k$ et l'on a

$$(3) \qquad \frac{\nu'_1 - \nu'_2}{\nu_1 - \nu_2} = -\frac{k^4}{\pi^2}.$$

En appelant σ et σ' les sommes des ν_i et des ν'_i on a d'après (1) et ses analogues

$$\sigma' = \frac{k^3}{\pi^2}\,\Sigma\nu_i\,.\,\overline{LA_i}^2.$$

Or $\dfrac{\Sigma\nu_i\,.\,\overline{LA_i}^2}{\sigma}$ est la puissance de L par rapport à la sphère imaginaire $\mathfrak{L}$ de centre L orthogonale à S. Cette puissance est par suite $+k$

et l'on a

$$(4) \qquad \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{k^4}{\pi^2}.$$

En appelant j_1, j_2, j_3 les produits (12) (34), etc. de deux arêtes opposées et $2s$ la somme $j_1 + j_2 + j_3$ on sait que

$$(5) \qquad 36R^2V^2 = s(s - j_1)(s - j_2)(s - j_3).$$

Or dans l'inversion précédente

$$j'_i = j_i \frac{k^2}{\pi}, \qquad s' = s\frac{k^2}{\pi}.$$

D'où, puisqu'on a la relation analogue à (5) pour (A')

$$(6) \qquad \frac{V'}{V} = \frac{k^4}{\pi^2} = \frac{\sigma'}{\sigma} \qquad \cot\psi = \frac{\sigma}{12V} = \frac{\sigma'}{12V'} = \cot\psi'.$$

Pour montrer que $\cot U' = \cot U$ remarquons que les coordonnées barycentriques absolues de O, étant les rapports au volume V de (A) des volumes des tétraèdres ayant pour sommets O et les sommets d'une face, ont pour valeurs $\frac{v_i \cot A_i}{12V}$. Celles de L sont $\frac{v_i}{\sigma}$ ou $\frac{v_i}{12V\cot\psi}$. Le rapport des résultats de substitution de ces coordonnées absolues dans le premier membre de l'équation du plan $L_1L_2L_3$, c'est-à-dire $\Sigma\frac{x_i}{v_i}$, donnera le rapport des distances de O et L à ce plan. Si l est le pied de la perpendiculaire OL à ce plan, on aura, en remarquant que $\Sigma \cot A_i = \cot U$

$$(7) \qquad \frac{Ol}{Ll} = \frac{\cot U \,.\, \cot\psi}{4}.$$

Comme ce rapport est le même pour (A') et que $\cot\psi' = \cot\psi$ on a aussi $\cot U' = \cot U$. En résumé :

Les différences $v'_i - v'_j$ sont proportionnelles aux différences $v_i - v_j$, le rapport de proportionnalité étant négatif et égal en valeur absolue au rapport des volumes des tétraèdres (A') *et* (A). *Ces deux tétraèdres ont les mêmes angles de Brocard* ψ *et* U.

Remarques. — 1° Comme $Ol \geqslant Ll$ on a l'inégalité signalée par Delens

$$\cot U \,.\, \cot\psi \geqslant 4$$

l'égalité ayant lieu lorsque L coïncide avec O (tétraèdre équifacial).

La relation (7) a pour analogue dans le triangle $\frac{Ol}{Ll} = \frac{\cot^2\omega}{3}$,

ω étant l'angle de Brocard. Elle donne, dans le tétraèdre, la représentation géométrique suivante de l'angle U.

Si de O l'on projette le cercle focal de l'ellipsoïde de Brocard suivant un cercle Γ sur le plan $L_1L_2L_3$ (le cône projetant a pour angle au sommet 2ψ d'après le n° 125), le cône ayant pour base Γ et pour sommet la projection λ du barycentre de (L) sur $Ll\left(l\lambda = \frac{lL}{4}\right)$ a l'angle U pour angle à la base.

2° Si l'une des différences $\nu_i - \nu_j$ est nulle, il en est de même de $\nu'_i - \nu'_j$. La sphère d'Apollonius de première espèce correspondante devient un plan. Le point L se trouve dans le plan médiateur de A_iA_j qui est aussi celui de $A'_iA'_j$. Le plan $LA_kA_lA'_kA'_l$ contient les barycentres de (A) et (A').

Si (A) est équifacial il en est de même de (A') qui est alors son jumeau.

3° De la relation

$$\frac{\cot U}{\cot \psi} = \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}}$$

signalée au n° 125, et qu'on établit facilement en partant des coordonnées barycentriques absolues de O et exprimant que ce point est le centre de S, on déduit (puisque $\mathfrak{R} \geqslant 2\mathfrak{R}_0$) la seconde inégalité donnée par Delens

$$\cot \psi \geqslant 2 \cot U.$$

131. *Configuration de Brocard-Beltrami.* — Dans le triangle il y a un ensemble de vingt points qui se reproduit dans les inversions par rapport au cercle circonscrit ou aux cercles d'Apollonius. Ce sont : les sommets du triangle, les centres des cercles d'Apollonius, les seconds points d'intersection du cercle circonscrit et des cercles d'Apollonius, les sommets du second triangle de Brocard, les centres isodynamiques, les points de Brocard, les points de Beltrami, le centre du cercle circonscrit et le point de l'infini.

Dans le tétraèdre, M. J. W. Peters [4] a signalé de même un ensemble de points et de sphères, appelé par lui la configuration de Brocard-Beltrami, qui se reproduit dans les inversions par rapport à la sphère circonscrite ou aux sphères d'Apollonius de seconde espèce. Ce sont :

A. Vingt-quatre points : les sommets des tétraèdres (A), (A') et (L), les pieds des hauteurs de (L), les points de Beltrami, les points de Brocard, le centre de la sphère S et le point de l'infini.

B. Les six points de Jacobi.

C. Les six sphères d'Apollonius de première espèce.

D. Cinq sphères (de rayon fini, nul ou infini) du système de Schoute : la sphère S, la sphère de Brocard, le plan de Lemoine, les deux sphères-points appelées centres isodynamiques.

Dans l'inversion par rapport à S, les sommets de (A) et de (A'), les points de Jacobi sont inchangés, les sommets de (L) s'échangent avec les pieds des hauteurs, les points de Beltrami avec les points de Brocard et le centre de S avec le point de l'infini. Les six sphères d'Apollonius de première espèce sont conservées, la sphère de Brocard s'échange avec le plan de Lemoine et les centres isodynamiques s'échangent entre eux.

Dans l'inversion par rapport à une sphère d'Apollonius de seconde espèce, par exemple S_1 de centre L_1, les sommets de (A) s'échangent avec ceux de (A'), le point L_1 avec le point de l'infini. Les sphères S_2 et S_3, orthogonales à S_1, restant inchangées leurs centres L_2 et L_3 deviennent deux points de Beltrami sur L_1L_2 et L_1L_3. Le troisième point de Beltrami devient l'orthocentre de $L_1L_2L_3$, pied de la hauteur de (L) issue de L. En ce qui concerne les sphères d'Apollonius de première espèce, nous avons vu, 124, que toute inversion qui transforme, comme c'est le cas ici, les sommets de (A) en ceux d'un tétraèdre (A') transforme les sphères d'Apollonius de première espèce de (A) en celles de (A') qui, d'après une remarque, 123, sont celles de (A). Ces sphères sont donc conservées dans leur ensemble. Leurs centres se trouvent par deux sur les côtés du triangle $L_1L_2L_3$ (d'après 122, A_1A_2 et A_3A_4 coupent le plan $L_1L_2L_3$ sur L_2L_3) et sont conjugués par rapport aux sommets de ce triangle. La sphère S_1 est orthogonale aux deux sphères qui ont leurs centres sur L_2L_3 et seront conservées dans l'inversion tandis que les sphères qui ont leurs centres sur L_1L_2 et L_1L_3 seront échangées. Quant aux sphères du système de Schoute elles sont conservées, étant orthogonales à S_1.

Sur LL_1, les deux points de Jacobi s'échangent et le point de Brocard s'échange avec L. Les quatre autres points de Jacobi, étant sur S_1, sont conservés. Les points de Brocard sur LL_2, LL_3 s'échangent avec les pieds des hauteurs issues de L_3 et L_2, le point O avec le pied de la hauteur issue de L_1.

La configuration est donc anallagmatique dans les inversions par rapport à S *ou à une sphère d'Apollonius de seconde espèce. Elle est la même pour le tétraèdre* (A').

Remarque. — Si $\rho_1 + \rho_2 = \rho_3 + \rho_4$, L_1 est à l'infini, S_1 devient un plan, qui est plan de symétrie pour la configuration.

Propriétés diverses.

a) En faisant correspondre les sommets de (A) et de (A′) qui sont alignés avec L, *la somme des cotangentes des angles que deux faces correspondantes de* (A) *et de* (A′) *font avec la sphère circonscrite* S *est la même pour les quatre couples.* Elle est égale à $\frac{1}{2}$ cot U. Si deux faces de (A) font le même angle avec S, il en est de même des faces correspondantes de (A′).

b) *Les cosinus des angles que font deux arêtes opposées de* (A) *et les deux arêtes correspondantes de* (A′) *sont proportionnels.* Si deux arêtes opposées de (A) sont rectangulaires ou si deux couples font les mêmes angles, il en est de même de (A′).

c) *Le produit de la plus courte distance de deux arêtes de* (A) *par la tangente de leur angle est le même pour les arêtes correspondantes de* (A′). Si l'on définit un signe pour ce produit, les signes sont différents.

d) *La somme des carrés des inverses de deux arêtes opposées de* (A) *est la même pour les arêtes correspondantes de* (A′).

e) *Les barycentres de* (A) *et de* (A′) *sont inverses par rapport à la première sphère d'Euler de* (L).

f) *Les trois sphères qui ont pour diamètres les droites joignant deux points situés sur des arêtes opposées et chacun dans le plan médiateur de l'arête opposée sont les mêmes pour* (A) *et pour* (A′). Ces trois sphères ont un cercle commun dans le plan parallèle au plan polaire de O par rapport à l'un ou l'autre des hyperboloïdes des hauteurs de (A) et de (A′), à égale distance de O et de ce plan polaire. Les trois sphères sont orthogonales à la première sphère d'Euler de (L) et chacune d'elles à deux sphères décrites sur les arêtes opposées de (L) comme diamètres. *Si* (A) *est orthocentrique, et par suite aussi* (A′), *les trois sphères précédentes deviennent les plans-hauteurs communs de leurs trièdres des bimédianes.*

g) *Les points de Jacobi sont centres d'inversions transformant les sommets de* (A) *et de* (A′) *en ceux de quadrangles plans ayant deux couples de côtés opposés égaux* (parallélogrammes ou contre-parallélogrammes.

h) On sait que les biquadratiques sphériques ou *cycliques sphériques* sont anallagmatiques par rapport aux quatre sommets de leur tétraèdre conjugué. *Deux de ces biquadratiques ayant le même tétraèdre conjugué* (L) *et situées sur la sphère* S *se coupent aux huit sommets de deux tétraèdres* (A) *et* (A′) *pour lesquels les sommets de* (L) *sont le second point de Lemoine et ses associés. Elles se coupent aux huit points sous le même angle* (le sens étant inverse pour les deux tétraèdres). Ces biquadratiques sont orthogonales par couples,

les deux biquadratiques d'un même couple appartenant à des cônes de sommet L (ou L_1, L_2, L_3) dont les quatre plans tangents communs sont tangents à la sphère S.

i) Par projection stéréographique on obtient les *cycliques planes* (quartiques bicirculaires ou cubiques circulaires) anallagmatiques par rapport à quatre cercles directeurs, projections des cercles d'intersection de S avec les faces de (L). *Deux cycliques planes ayant les mêmes cercles directeurs se coupent sous le même angle en leurs huit points d'intersection*, le sens étant inverse pour les deux quadrangles, projections des sommets de (A) et de (A'). Ces deux quadrangles sont homologiques de quatre façons différentes, les centres d'homologie étant les centres des quatre cercles directeurs. *Un point quelconque d'une cyclique plane et ses sept homologues dans les quatre inversions par rapport à ses cercles directeurs et les trois produits d'inversions par rapport à deux de ces cercles forment deux tels quadrangles.* Si l'on prend pour centre de projection un point d'intersection des deux cycliques sphériques, on a la propriété suivante énoncée par M. A. de Majo dans l'Intermédiaire des Recherches Mathématiques d'octobre 1948, p. 105.

L'angle de deux quelconques des cubiques circulaires passant par les sommets d'un triangle et les quatre centres des cercles tangents aux côtés est égal en chacun de ces sept points à celui des deux asymptotes réelles de ces cubiques.

j) Une *sphère cayleyenne* est, comme on sait, une quadrique circonscrite à *l'absolu* le long d'une conique dont le pôle du plan est dit le *centre de la sphère*. Les centres des huit sphères cayleyennes tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre sont les intersections des *plans bissecteurs cayleyens*, couples de plans issus des arêtes, conjugués par rapport aux faces et à l'absolu. *En prenant pour absolu la sphère* S, *les sommets de* (L) *et de* (A') *sont les centres des huit sphères cayleyennes tangentes aux faces de* (A). En langage ordinaire, il y a huit quadriques de révolution inscrites à (A) et circonscrites à S le long des plans polaires des sommets de (L) et de (A'). Les quatre premières sont les ellipsoïdes E, E_1, E_2, E_3 des n°s 126 et 127. *Les quatre autres sont des quadriques de révolution circonscrites à* S *suivant les cercles de rayon nul dans les plans tangents à* S *aux points* A'_i (1). Les points de contact de ces huit quadriques avec les faces se trouvent sur les perpendiculaires cayleyennes menées par les centres, droites joignant ces centres aux pôles des faces par

(1) C'est-à-dire dont les méridiennes coupent les grands cercles de S en quatre points confondus.

rapport à S. Les droites joignant A_i aux sommets de (L) sont les quatre *bissectrices cayleyennes du trièdre* (A_i) de (A), lieux des centres des sphères cayleyennes tangentes aux trois faces du trièdre, les points de contact étant sur les perpendiculaires cayleyennes.

Les analogues cayleyens de l'hyperboloïde des hauteurs, des hyperboloïdes orthogonaux lieux des arêtes des dièdres droits dont les faces passent par deux arêtes opposées, de la biquadratique de Schröter, intersection commune de ces quadriques, etc. donnent des propriétés correspondantes. Le cas où (A) est isodynamique correspond au cas du tétraèdre orthocentrique en géométrie euclidienne.

k) A' la transformation isogonale, dont deux points homologues sont conjugués par rapport aux quadriques passant par les huit centres des sphères tangentes aux faces, correspond une transformation qu'on pourrait appeler *isogonale cayleyenne* dont deux points homologues sont conjugués par rapport aux quadriques passant par les huit sommets de (L) et de (A'). Dans les propriétés correspondantes les cônes isotropes sont remplacés par les cônes circonscrits à la sphère S. *Si* P *et* P' *sont deux points conjugués dans cette transformation, les traces de* A_iP *et* A_iP' *sur un plan antiparallèle à la face opposée à* A_i *sont deux points isogonaux au sens ordinaire par rapport au triangle associé contenu dans ce plan. Les quadriques passant par les sommets de* (A) *et ceux de* (L) *ou de* (A'), *en particulier la sphère* S, *sont inchangées par cette transformation.*

l) *Récapitulation des relations entre les éléments de* (A) *et de* (A'). Avec les notations déjà définies et, en outre, α_i étant l'angle de deux arêtes opposées, d_i leur plus courte distance, les éléments de (A') étant affectés d'un accent :

$$\frac{k^4}{\pi^2}=\frac{\pi'^2}{k^4}=\frac{x'}{x}=\frac{V'}{V}=\frac{\sigma'}{\sigma}=\frac{a'^2+a_1'^2}{a^2+a_1^2}=\frac{m_i'^2}{m_i^2}=\frac{a'^2a_1'^2}{a^2a_1^2}=\frac{\cos^2\alpha_i'}{\cos^2\alpha_i}=-\frac{\nu_i'-\nu_j'}{\nu_i-\nu_j},$$

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{a_1'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a_1^2}$$

$$d_i'\operatorname{tg}\alpha_i'=-d_i\operatorname{tg}\alpha_i,\qquad \cot U=\Sigma\cot A_i=\Sigma\cot A_i',$$

$$\cot A_i+\cot A_i'=\frac{1}{2}\cot U,$$

$$\nu_i\overline{A_iA_i'}^2=\Sigma\nu_j\overline{A_jA_i'}^2\quad\text{et}\quad \nu_i'\overline{A_iA_i'}^2=\Sigma\nu_j'\overline{A_jA_i'}^2\ (j\neq i).$$

AUTRES POINTS REMARQUABLES

132. Théorème. — *Si l'on détermine dans le plan de la face* BCD *d'un tétraèdre* $T \equiv ABCD$, *un point* A′ *vérifiant les relations d'aires*

$$(1) \qquad CDA + CDA' = DBA + DBA' = BCA + BCA',$$

et les points analogues B′, C′, D′ *dans les plans des faces* CDA, DAB, ABC, *les droites* AA′, BB′, CC′, DD′ *concourent en un même point qui coïncide avec le centre de la sphère inscrite au tétraèdre anticomplémentaire du tétraèdre* T.

Soient I_0 le centre de la sphère inscrite au tétraèdre anticomplémentaire T_0; x et x_0 les valeurs algébriques des distances des points I et I_0 au plan BCD.

Le tétraèdre T_0 étant le transformé du tétraèdre T par l'homothétie $(G, -3)$, le point I_0 partage le segment IG dans le rapport

$$\frac{II_0}{I_0G} = -\frac{4}{3},$$

et

$$x_0 = \frac{r - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} h_a}{1 - \frac{4}{3}} = h_a - 3r.$$

Les coordonnées barycentriques absolues du point I_0 dans ce tétraèdre sont les quotients des nombres

$$A(h_a - 3r), \qquad B(h_b - 3r), \qquad C(h_c - 3r), \qquad D(h_d - 3r)$$

par trois fois le volume du tétraèdre T.

La droite AI_0 coupe donc le plan de la face BCD du tétraèdre T en un point A′ dont les coordonnées barycentriques absolues dans le triangle BCD sont les nombres Y, Z, W pour lesquels on a

$$(2) \qquad \frac{Y}{V - Br} = \frac{Z}{V - Cr} = \frac{W}{V - Dr} \qquad \text{et} \qquad Y + Z + W = 1.$$

Mais si S′ est la somme $A + B + C + D$ des aires des faces du tétraèdre T, la somme des conséquents des proportions (2) est égale à

$$3V - (S' - A).r = Ar.$$

Or, par définition, Y, Z, W sont les quotients par A des aires des triangles A'CD, A'DB, A'BC; on a donc

$$A'CD = \frac{V}{r} - B, \qquad A'DB = \frac{V}{r} - C, \qquad A'BC = \frac{V}{r} - D,$$

ou

$$A'CD + B = A'DB + C = A'BC + D,$$

ce qui démontre le théorème.

N. B. — 1° Au point I_0 il faut associer, en général, les *sept* autres centres des sphères quadritangentes du tétraèdre T_0. Ces sept points, (*associés de* I_0), correspondent à quatre quaternes de points (A'', B'', C'', D'') et à trois quaternes (A''', B''', C''', D''') dans les plans des faces du tétraèdre T, pour lesquels on a les relations d'aires

$$-B + A''CD = -C + A''DB = -D + A''BC, \ldots,$$

analogues aux égalités (1).

2° L'analogie de ces propriétés avec celles du point de NAGEL d'un triangle ABC est évidente, sauf que les droites AA', BB', CC', DD' ne passent pas, en général, par les points de contact des sphères inscrites dans les trièdres tronqués avec les plans des faces du tétraèdre T.

133. Les plans parallèles aux faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre T par les centres I_a, I_b, I_c, I_d des sphères exinscrites (I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c), (I_d, r_d) forment un tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ homothétique au tétraèdre T. Les coordonnées normales du conjugué isogonal P' du centre d'homothétie P, rapporté au tétraèdre, sont

$$(3) \qquad \frac{1}{r_a}, \quad \frac{1}{r_b}, \quad \frac{1}{r_c}, \quad \frac{1}{r_d},$$

que l'on peut remplacer par

$$S' - A, \quad S' - B, \quad S' - C, \quad S' - D.$$

Les coordonnées des sommets du tétraèdre $I_aI_bI_cI_d$, rapporté au tétraèdre ABCD, étant

$$(-A, B, C, D), \quad (A, -B, C, D), \quad (A, B, -C, D), \quad (A, B, C, -D),$$

celles du point P' dans le tétraèdre $I_aI_bI_cI_d$ sont les nombres X, Y, Z, W pour lesquels on a

$$\frac{1}{r_a} = \frac{-X}{S' - A} + \frac{Y}{S' - B} + \frac{Z}{S' - C} + \frac{W}{S' - D}$$

et trois autres équations déduites de celle-ci par des permutations

circulaires convenables sur les lettres (A, B, C, D), (a, b, c, d), (X, Y, Z, W). On a donc

$$X : Y : Z : W = \frac{A}{r_a} : \frac{B}{r_b} : \frac{C}{r_c} : \frac{D}{r_d},$$

et il en résulte, en vertu de (3), que *le point* P′ *a les mêmes coordonnées barycentriques dans les tétraèdres* T *et* $I_aI_bI_cI_d$. D'autre part, les points A″, B″, C″, D″, où les sphères (I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c), (I_d, r_d) touchent les faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre T, coïncident avec les points de contact de ces faces avec la quadrique inscrite (Γ) d'équation tangentielle,

$$vw \cos^2 \frac{a'}{2} + uw \cos^2 \frac{b'}{2} + uv \cos^2 \frac{c'}{2} + us \cos^2 \frac{a}{2} + vs \cos^2 \frac{b}{2} + ws \cos^2 \frac{c}{2} = 0,$$

dont le centre se confond avec le point de coordonnées

$$\begin{array}{ll} -A + B + C + D, & A - B + C + D, \\ A + B - C + D, & A + B + C - D, \end{array}$$

ou ce qui revient au même

$$\frac{1}{r_a}, \quad \frac{1}{r_b}, \quad \frac{1}{r_c}, \quad \frac{1}{r_d},$$

autrement dit avec le point P′.

On obtient ainsi une autre analogie entre l'ellipse de Nagel qui touche les côtés d'un triangle A′B′C′ aux points intérieurs de contact des cercles exinscrits (I'_a), (I'_b), I'_c), dont le centre est le point de Lemoine du triangle $I'_aI'_bI'_c$, et l'*ellipsoïde de* Nagel qui touche les faces du tétraèdre T aux points intérieurs de contact des sphères (I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c), (I_d, r_d).

Corollaire. — *Les plans bissecteurs intérieurs des dièdres d'un tétraèdre coupent les arêtes opposées aux points de contact de celles-ci avec une quadrique* (Q) *qui est concentrique à l'ellipsoïde de* Nagel *et par rapport à laquelle les tétraèdres* ABCD, $I_aI_bI_cI_d$ *sont polaires réciproques.*

N. B. — L'équation tangentielle de la sphère (I) inscrite au tétraèdre T étant

$$vw \sin^2 \frac{a'}{2} + uw \sin^2 \frac{b}{2} + uv \sin^2 \frac{c}{2} + us \cos^2 \frac{a}{2} + vs \cos^2 \frac{b}{2} + ws \cos^2 \frac{c}{2} = 0,$$

au faisceau tangentiel d'équation

$$(\mathrm{I}) + \lambda(\Gamma) = 0,$$

correspondent des cas particuliers intéressants.

1° La quadrique (Γ_1), touchant les faces du tétraèdre T aux pieds A_1, B_1, C_1, D_1 des bissectrices intérieures des trièdres opposés, correspond à $\lambda = 1$ et son équation est

$$vw + wu + uv + us + vs + ws = 0.$$

Son centre P_1 a pour coordonnées

$$B + C + D, \quad C + D + A, \quad D + A + B, \quad A + B + C.$$

2° La quadrique (Γ_2), qui touche les faces du tétraèdre T aux pieds des hauteurs, correspond à $\lambda = -1$ et a pour équation

$$vw \cos a' + uw \cos b' + uv \cos c' + us \cos a + vs \cos b + ws \cos c = 0.$$

Son centre est le point P_2 de coordonnées A, B, C, D ou le *premier* point de Lemoine du tétraèdre T.

Le lieu des centres des quadriques d'un faisceau tangentiel étant une droite, il résulte de ce qui précède que les points P', P_1, P_2 sont sur un même diamètre de la sphère inscrite au tétraèdre T.

134. Théorème. — *Les coordonnées barycentriques du* second *point de* Lemoine *du tétraèdre* $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ *ayant pour sommets les points de contact de la sphère inscrite* (I, r) *au tétraèdre* T, *par rapport à celui-ci, sont proportionnelles aux tangentes des angles que les bissectrices* AI, BI, CI, DI *des trièdres* (A), (B), (C), (D) *font avec les faces adjacentes du tétraèdre* T.

Le tétraèdre T se confond avec le tétraèdre tangentiel du tétraèdre T_1 et les coordonnées normales du point L_1, par rapport au tétraèdre T, sont proportionnelles aux produits

$$A_1B_1 . A_1C_1 . A_1D_1, \qquad B_1C_1 . B_1D_1 . B_1A_1,$$
$$C_1D_1 . C_1A_1 . C_1B_1, \qquad D_1A_1 . D_1B_1 . D_1C_1$$

des arêtes des faces du tétraèdre T_1 qui sont eux-mêmes proportionnels aux quantités

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{c'}{2}, \qquad \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c'}{2}\cos\frac{a'}{2},$$
$$\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b'}{2}, \qquad \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Désignons par α, β, γ, δ les angles des droites AI, BI, CI, DI avec les plans des faces adjacentes de chacun des trièdres (A), (B), (C), (D), par Δ'_a, Δ'_b, Δ'_c, Δ'_d les sinus des trièdres supplémentaires des trièdres (A), (B), (C), (D) et par x, y, z, t les coordonnées normales du point L_1 pour le tétraèdre T_1. Les produits

$$\cot\alpha\,.\,\Delta'_a, \qquad \cot\beta\,.\,\Delta'_b, \qquad \cot\gamma\,.\,\Delta'_c, \qquad \cot\delta\,.\,\Delta'_d,$$

sont proportionnels aux quantités

$$\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a'}{2}, \qquad \cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b'}{2},$$
$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c'}{2}, \qquad \cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{c'}{2},$$

et l'on a

$$(4)\quad \begin{aligned}
A_1B_1 = A_1C_1 = A_1D_1 = r\cot\alpha &= \frac{8B.C.D}{9V^2}\,.\,r\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a'}{2},\\
B_1C_1 = B_1D_1 = B_1A_1 = r\cot\beta &= \frac{8C.D.A}{9V^2}\,.\,r\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b'}{2},\\
C_1D_1 = C_1A_1 = C_1B_1 = r\cot\gamma &= \frac{8D.A.B}{9V^2}\,.\,r\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c'}{2},\\
D_1A_1 = D_1B_1 = D_1C_1 = r\cot\delta &= \frac{8A.B.C}{9V^2}\,.\,r\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{c'}{2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, Δ'_a, Δ'_b, Δ'_c, Δ'_d sont proportionnels aux aires A, B, C, D des faces du tétraèdre T. On obtient donc, d'abord,

$$\begin{aligned}
A\cot\alpha : B\cot\beta : C\cot\gamma : D\cot\delta &= \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a'}{2}\\
&: \cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b'}{2} : \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c'}{2} : \cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{c'}{2},
\end{aligned}$$

ensuite, en vertu des relations (4),

$$\begin{aligned}
Ax\cot\alpha &= \frac{8.A.B.C.D}{9V^2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{c'}{2}\\
&= By\cot\beta = Cz\cot\gamma = Dt\cot\delta,
\end{aligned}$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

N. B. — 1° Le point de GERGONNE d'un triangle possède une propriété fondamentale analogue. Mais l'analogie entre le triangle et le tétraèdre n'est complète qu'avec le tétraèdre *isogone* dans lequel le point L_1 coïncide avec le point de concours des droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

2° Les *seconds* points de LEMOINE des tétraèdres podaires des centres des *sept* autres sphères quadritangentes du tétraèdre T donnent lieu à des conclusions similaires et ces points sont, par analogie avec le triangle, les associés du point de GERGONNE L_1 du tétraèdre T.

3° *Autre propriété du point* L_1 [1]. — Si l'on marque sur les droites A_1B, A_1C, A_1D des points β', γ', δ', tels que $A_1\beta' = A_1\gamma' = A_1\delta' = \lambda$, et que les perpendiculaires au plan BCD par ces points rencontrent les droites IB, IC, ID en ω_b, ω_c, ω_d, les sphères de centres ω_b, ω_c, ω_d, de rayons $\omega_b\beta'$, $\omega_c\gamma'$, $\omega_d\delta'$, ont pour axe radical la droite fixe A_1L_1, quelle que soit la longueur λ. Dès lors, si l'on joint le point L_1 aux points A_1, B_1, C_1, D_1, *les bissectrices des angles* L_1A_1B, L_1A_1C, L_1A_1D *rencontrent respectivement les droites* IB, IC, ID *aux centres* ω'_b, ω'_c, ω'_d *de trois sphères inscrites dans les trièdres* (B), (C), (D), *tangentes à la droite* L_1A_1 *en un point* Q. Car la droite L_1A_1 est l'axe radical de ces trois sphères. La même propriété s'applique aux trois sphères inscrites aux trièdres (C), (D) et (A), (D), (A) et (B), (A), (B) et (C), qui touchent respectivement les droites L_1B_1, L_1C_1, L_1D_1 en un même point. Dans un tétraèdre *isogone* T, les droites L_1A_1, L_1B_1, L_1C_1, L_1D_1 passent respectivement par les sommets A, B, C, D, et les *trois sphères tangentes à la droite qui joint un sommet au point de contact de la sphère inscrite sur la face opposée et inscrites dans les trièdres adjacents à cette face, touchent cette droite en un même point.*

Ces remarques rappellent une propriété d'un triangle ABC dont les côtés BC, CA, AB sont tangents au cercle inscrit en D, E, F. Les cercles inscrits aux triangles BAD et DAC, BAE et BEC, CBF et CFA sont tangents respectivement sur les droites AD, BE, CF en un même point.

135. RAPPEL DE PROPRIÉTÉS D'UN TRIANGLE. — 1° *Si, du centre de gravité* $M \equiv G$ *d'un triangle* ABC, *on mène sur les côtés* BC, CA, AB *des perpendiculaires* GA_1, GB_1, GC_1 *qui rencontrent respectivement,* CA, AB, BC *en* A_2, B_2, C_2 *et* AB, BC, CA *en* A_3, B_3, C_3, *les triangles* $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ *ont des aires équivalentes qui ont pour mesure*

$$\frac{1}{9} \cdot ABC \cdot (\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B).$$

2° *Pour tout point* M *du plan* ABC, *il existe un rapport constant*

---

[1] Nous rencontrerons plus loin d'autres propriétés remarquables du point L_1.

entre l'aire $A_1B_1C_1$ *et la somme algébrique des aires* $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$.

3° *Les points dont les projections sur* CA, AB, BC *ou sur* AB, BC, CA, *faites au moyen des perpendiculaires à* BC, CA, AB, *sont collinéaires, ont respectivement pour lieux géométriques les coniques*

$$\beta\gamma \cos B \sin C + \gamma\alpha \cos C \sin A + \alpha\beta \cos A \sin B = 0,$$
$$\beta\gamma \sin B \cos C + \gamma\alpha \sin C \cos A + \alpha\beta \sin A \cos B = 0,$$

α, β, γ *désignant les coordonnées normales du point* M *dans le triangle* ABC.

4° *Si du point de* TARRY *on mène les perpendiculaires sur les côtés d'un triangle et qu'on marque les intersections avec tous les côtés, on obtient neuf points qui sont répartis sur trois droites* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ (¹).

136. D'un point arbitraire P de coordonnées normales absolues x, y, z, t par rapport à T, on mène les perpendiculaires aux plans des faces $(A) \equiv BCD$, $(B) \equiv CDA$, $(C) \equiv DAB$, $(D) \equiv ABC$ qui rencontrent ceux-ci en A_1, B_1, C_1, D_1 et, respectivement, les plans

$$(1)\quad \begin{array}{llll} (B), (C), (D) & \text{en} & B_2, C_2, D_2, & (C), (D), (A) \quad \text{en} \quad C_3, D_3, A_3. \\ (D), (A), (B) & \text{en} & D_4, A_4, B_4, & (A), (B), (C) \quad \text{en} \quad A_5, B_5, C_5, \end{array}$$

On obtient, d'une part,

$$(2)\quad \begin{array}{llll} PB_2 = \dfrac{y}{\cos c'}, & PA_3 = \dfrac{x}{\cos c'}, & PA_4 = \dfrac{x}{\cos b'}, & PA_5 = \dfrac{x}{\cos a}, \\ PC_2 = \dfrac{z}{\cos b'}, & PC_3 = \dfrac{z}{\cos a'}, & PB_4 = \dfrac{y}{\cos a'}, & PB_5 = \dfrac{y}{\cos b}, \\ PD_2 = \dfrac{t}{\cos a}, & PD_3 = \dfrac{t}{\cos b}, & PD_4 = \dfrac{t}{\cos c}, & PC_5 = \dfrac{z}{\cos c}; \end{array}$$

d'autre part,

$$(3)\quad \begin{array}{lll} B_1B_2 = y \operatorname{tg} c', & C_1C_2 = z \operatorname{tg} b', & D_1D_2 = t \operatorname{tg} a, \\ C_1C_3 = z \operatorname{tg} a', & D_1D_3 = t \operatorname{tg} b, & A_1A_3 = x \operatorname{tg} c', \\ D_1D_4 = t \operatorname{tg} c, & A_1A_4 = x \operatorname{tg} b', & B_1B_4 = y \operatorname{tg} a', \\ A_1A_5 = x \operatorname{tg} a, & B_1B_5 = y \operatorname{tg} b, & C_1C_5 = z \operatorname{tg} c. \end{array}$$

L'égalité

$$A_1A_5 . B_1B_2 . C_1C_3 . D_1D_4 . = A_1A_3 . B_1B_4 . C_1C_5 . D_1D$$

(¹) J. NEUBERG, *Mathesis*, 1886-6.

résulte de (3), tandis que, si le tétraèdre T est orthocentrique, les égalités

$$PA_3.PB_4.PC_5.PD_2 = PA_4.PB_5.PC_2.PD_3 = PA_5.PB_2.PC_3.PD_4 = \frac{xyzt}{k^2},$$

proviennent de (2), en posant $\cos a \cos a' = \cos b \cos b' = \cos c \cos c' = k$.

137. On peut associer les douze points (1) quatre par quatre et obtenir les ternes de tétraèdres

$$\begin{array}{lll}
(4) & T_2 \equiv A_3B_4C_5D_2, & T_3 \equiv A_4B_5C_2D_3, \quad T_4 \equiv A_5B_2C_3D_4, \\
(5) & T_5 \equiv A_3B_2C_5D_4, & T_6 \equiv A_4B_5C_3D_2, \quad T_7 \equiv A_5B_4C_2D_3, \\
(6) & T_8 \equiv A_3B_5C_2D_4, & T_9 \equiv A_4B_2C_5D_3, \quad T_{10} \equiv A_5B_4C_3D_2,
\end{array}$$

de volumes V_i, $(i = 2, 3, \ldots, 10)$. Si l'on désigne par Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 les sinus des trièdres

$$P - B_4C_5D_2, \qquad P - A_3C_5D_2, \qquad P - A_3B_4D_2, \qquad P - A_3B_4C_5,$$

on obtient les égalités

$$\frac{A}{\Omega_1} = \frac{B}{\Omega_2} = \frac{C}{\Omega_3} = \frac{D}{\Omega_4} = \frac{2.A.B.C.D}{9V^2}$$

qui permettent d'exprimer les volumes

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
V_2 &= \frac{K}{\cos a \cos a' \cos c \cos c'} \\
&\quad .(yztB \cos c' + xztC \cos a' + xytD \cos c + xyzA \cos a) \\
V_3 &= \frac{K}{\cos^2 b \cos^2 b'} \\
&\quad .(yztC \cos b' + xztD \cos b + xytA \cos b' + xyzB \cos b) \\
V_4 &= \frac{K}{\cos a \cos a' \cos c \cos c'} \\
&\quad (yztD \cos a + xztA \cos c' + xytB \cos a' + xyzC \cos c),
\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
V_5 &= \frac{K}{\cos^2 c \cos^2 c'} \\
&\quad .(yztB \cos c' + xztA \cos c' + xytD \cos c + xyzC \cos c) \\
V_6 &= \frac{K}{\cos a \cos a' \cos b \cos b'} \\
&\quad .(yztC \cos b' + xztD \cos b + xytB \cos a' + xyzA \cos a) \\
V_7 &= \frac{K}{\cos a \cos a' \cos b \cos b'} \\
&\quad .(yztD \cos a + xztC \cos a' + xytA \cos b' + xyzB \cos b),
\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \begin{cases} V_8 = \dfrac{K}{\cos b \cos b' \cos c \cos c'} \\ \qquad . (yzt\mathrm{B} \cos c' + xzt\mathrm{D} \cos b + xyt\mathrm{A} \cos b' + xyz\mathrm{C} \cos c), \\ V_9 = \dfrac{K}{\cos b \cos b' \cos c \cos c'} \\ \qquad . (yzt\mathrm{C} \cos b' + xzt\mathrm{A} \cos c' + xyt\mathrm{D} \cos c + xyz\mathrm{B} \cos b), \\ V_{10} = \dfrac{K}{\cos^2 a \cos^2 a'} \\ \qquad . (yzt\mathrm{D} \cos a + xzt\mathrm{C} \cos a' + xyt\mathrm{B} \cos a' + xyz\mathrm{A} \cos a), \end{cases}$$

des tétraèdres T_i, en posant $K = \dfrac{3V^2}{4A.B.C.D}$. On a aussi

$$V_1 \equiv A_1B_1C_1D_1 \equiv T_1 \equiv K(Ayzt + Bxzt + Cxyt + Dxyz).$$

Donc, d'après (7), (8), (9),

$$(11)\quad \begin{aligned} &\cos a \cos a' \cos c \cos c' . (V_2 + V_4) + \cos^2 b \cos^2 b' . V_3 = V_1 \\ &\cos a \cos a' \cos b \cos b' . (V_6 + V_7) + \cos^2 c \cos^2 c' . V_5 = V_1 \\ &\cos b \cos b' \cos c \cos c' . (V_8 + V_9) + \cos^2 a \cos^2 a' . V_{10} = V_1. \end{aligned}$$

N. B. — Si $P \equiv G$, x, y, z, t sont inversement proportionnelles à A, B, C, D, ce qui donne

$$V_2 = V_4, \qquad V_6 = V_7, \qquad V_8 = V_9.$$

Lorsque T est orthocentrique, on a, en vertu de (11),

$$V_1 + V_2 + V_3 = V_5 + V_6 + V_7 = V_8 + V_9 + V_{10} = \frac{V_1}{k^2}.$$

138. Lieux géométriques du point P quand les volumes des tétraèdres d'un terne (7), (8), (9) sont équivalents. Lorsque $V_2 = V_3 = V_4$, le lieu de P est la cubique gauche

$$\frac{yzt\,\mathrm{B} \cos c' + xzt\,\mathrm{C} \cos a' + xyt\,\mathrm{D} \cos c + xyz\,\mathrm{A} \cos a}{\cos a \cos a' \cos c \cos c'}$$
$$= \frac{yzt\,\mathrm{C} \cos b' + xzt\,\mathrm{D} \cos b + xyt\,\mathrm{A} \cos b' + xyz\,\mathrm{B} \cos b}{\cos^2 b \cos^2 b'}$$
$$= \frac{yzt\,\mathrm{D} \cos a + xzt\,\mathrm{A} \cos c' + xyt\,\mathrm{B} \cos a' + xyz\,\mathrm{C} \cos c}{\cos a \cos a' \cos c \cos c'},$$

inverse tétraédrique, par rapport à T, de la droite

$$\frac{x\,\mathrm{D}\cos a + y\,\mathrm{A}\cos c' + z\,\mathrm{B}\cos a' + t\,\mathrm{C}\cos c}{\cos a\cos a'\cos c\cos c'}$$
$$= \frac{x\,\mathrm{C}\cos b' + y\,\mathrm{D}\cos b + z\,\mathrm{A}\cos b' + t\,\mathrm{B}\cos b}{\cos^2 b\cos^2 b'}$$
$$= \frac{x\,\mathrm{B}\cos c' + y\,\mathrm{C}\cos a' + z\,\mathrm{D}\cos c + t\,\mathrm{A}\cos a}{\cos a\cos a'\cos c\cos c'},$$

et circonscrite au tétraèdre T. Les ternes de tétraèdres (5), (6) donnent lieu à deux autres cubiques gauches circonscrites à T.

N. B. — Lorsque les volumes des tétraèdres T_2, T_3, T_4 sont nuls, leurs quaternes de sommets (A_3, B_4, C_5, D_2), (A_4, B_5, C_2, D_3), (A_5, B_2, C_3, D_4), sont situés chacun dans un plan. Dans cette hypothèse, le point P se confond avec l'inverse tétraédrique P_1, par rapport à T, du point

$$\mathrm{P}'_1 \quad \begin{cases} x\,\mathrm{D}\cos a + y\,\mathrm{A}\cos c' + z\,\mathrm{B}\cos a' + t\,\mathrm{C}\cos c = 0, \\ x\,\mathrm{C}\cos b' + y\,\mathrm{D}\cos b + z\,\mathrm{A}\cos b' + t\,\mathrm{B}\cos b = 0, \\ x\,\mathrm{B}\cos c' + y\,\mathrm{C}\cos a' + z\,\mathrm{D}\cos c + t\,\mathrm{A}\cos a = 0. \end{cases}$$

Ce point est situé dans le plan de l'infini, car

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D}t = 0.$$

et le point P appartient à la surface cubique (S) de Sartiaux du tétraèdre T. Si les volumes des ternes (8), (9) sont nuls, on obtient deux autres points $P_2 \equiv P$, $P_3 \equiv P$ situés sur (S). En dehors des sommets A, B, C, D de T, (points nodaux communs), les points P_1, P_2, P_3 sont seuls à posséder la propriété qu'ont les sommets de chacun des tétraèdres des ternes (4), (5), (6) qui leur correspondent, d'être situés, ainsi que ceux des tétraèdres podaires de ces points, dans quatre plans distincts. Ces propriétés rendent les points P_1, P_2, P_3 comparables au point de Tarry d'un triangle (135, 4°).

Si l'on pose

$$S_1 = \Sigma yzt\,\mathrm{D}\cos a, \quad S_2 = \Sigma yzt\,\mathrm{C}\cos b', \quad S_3 = \Sigma yzt\,\mathrm{B}\cos c', \quad S = \Sigma yzt\,\mathrm{A},$$

lorsque les sommets A_5, B_2, C_3, D_4 de T_4 sont coplanaires, $S_1 = 0$. D'autre part, toute surface

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0$$

est *telle que pour l'un quelconque de ses points* P, *les volumes de trois*

des tétraèdres T_1, T_4, T_3, T_2 *sont liés par une relation linéaire.* En effet,

$$S_1 = K_1 . V_4, \quad S_2 = K_2 . V_3, \quad S_3 = K_3 . V_2, \quad \text{et} \quad S = S_1 + S_2 + S_3;$$

d'où, par exemple,

$$\lambda_1(S - S_2 - S_3) + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0; \qquad \alpha V_1 + \beta V_4 + \gamma V_3 = 0.$$

139. Points remarquables. Dans chacun des tétraèdres T_i composant les ternes (4), (5), (6), considérons respectivement les points, en coordonnées normales,

$$\begin{array}{ll} & M_1(\cos c', \cos a', \cos c, \cos a) \\ (4') & M_2(\cos b', \cos b, \cos b', \cos b) \\ & M_3(\cos a, \cos c', \cos a', \cos c) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & N_1(\cos c', \cos c', \cos c, \cos c) \\ (5') & N_2(\cos b', \cos b, \cos a', \cos a) \\ & N_3(\cos a, \cos a', \cos b', \cos b) \end{array}$$

$$(6') \quad \begin{array}{l} Q_1(\cos c', \cos b, \cos b', \cos c) \\ Q_2(\cos b', \cos c', \cos c, \cos b) \\ Q_3(\cos a, \cos a', \cos a', \cos a) \end{array}$$

qui donnent, d'abord,

$$(12) \quad m_1 = M_1A_3 = M_1B_4 = M_1C_5 = M_1D_2 = \frac{x}{\cos c'} = \frac{y}{\cos a'}$$
$$= \frac{z}{\cos c} = \frac{t}{\cos a} = \frac{3V}{A\cos c' + B\cos a' + C\cos c + D\cos a},$$

$$(13) \quad m_2 = M_2A_3 = M_2B_2 = M_2C_5 = M_2D_4 = \frac{x}{\cos b'} = \frac{y}{\cos b}$$
$$= \frac{z}{\cos b'} = \frac{t}{\cos b} = \frac{3V}{A\cos b' + B\cos b + C\cos b' + D\cos b},$$

$$(14) \quad m_3 = M_3A_3 = M_3B_5 = M_3C_2 = M_3D_4 = \frac{x}{\cos a} = \frac{y}{\cos c'}$$
$$= \frac{z}{\cos a'} = \frac{t}{\cos c} = \frac{3V}{A\cos a + B\cos c' + C\cos a' + D\cos c};$$

ensuite

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{3V}\Sigma(B\cos c' + C\cos b' + D\cos a) = \frac{A+B+C+D}{3V} = \frac{1}{r},$$

r désignant le rayon de la sphère inscrite à T. En procédant de la même manière sur (5'), (6'), en posant

$$n_1 = N_1A_3 = N_1B_2 = N_1C_5 = N_1D_4, \quad q_1 = Q_1A_3 = Q_1B_5 = Q_1C_2 = Q_1D_4,$$
$$n_2 = N_2A_4 = N_2B_5 = N_2C_3 = N_2D_2, \quad q_2 = Q_2A_4 = Q_2B_2 = Q_2C_5 = Q_2D_3,$$
$$n_3 = N_3A_5 = N_3B_4 = N_3C_2 = N_3D_3, \quad q_3 = Q_3A_5 = Q_3B_4 = Q_3C_3 = Q_3D_2,$$

on obtient aussi

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}=\frac{1}{r}.$$

Il y a donc analogie complète avec la relation signalée sans démonstration dans un triangle ABC [1].

140. Si l'on considère les points (M'_1, M'_2, M'_3), (N'_1, N'_2, N'_3), (Q'_1, Q'_2, Q'_3) dont les coordonnées normales par rapport aux tétraèdres (4), (5), (6) s'obtiennent en remplaçant dans (4′), (5′), (6′) les cosinus par les cotangentes des dièdres correspondants, on obtient, par exemple, d'après (3),

$$A_1A_3 = B_1B_4 = C_1C_5 = D_1D_2, \qquad A_1A_4 = B_1B_5 = C_1C_2 = D_1D_3,$$
$$A_1A_5 = B_1B_2 = C_1C_3 = D_1D_4,$$

et ainsi de suite pour les points (N'_1, N'_2, N'_3), (Q'_1, Q'_2, Q'_3).

NOTE. — Ces points M_i, N_i, Q_i $(i = 1, 2, 3)$, sont comparables aux points P_1, P_2 du plan d'un triangle $T \equiv ABC$ dont les coordonnées normales (cot B, cot C, cot A), (cot C, cot A, cot B) proviennent de celles du point (cot A, cot B, cot C) [2] après deux permutations circulaires sur les lettres A, B, C.

Si le point P_1 se projette orthogonalement sur les droites BC, CA, AB en A_1, B_1, C_1 et que les droites P_1A_1, P_1B_1, P_1C_1 rencontrent respectivement CA, AB, BC en A_2, B_2, C_2, on constate, d'une part, que les mesures des segments P_1A_2, P_1B_2, P_1C_2 sont inversement proportionnelles à sin C, sin A, sin B et, d'autre part, que les projections B_1A_2, C_1B_2, A_1C_2 de ces segments sur CA, AB, BC sont égales entre elles, et réciproquement. De même, les segments P_2A_3, P_2B_3, P_2C_3 et C'_1A_3, A'_1B_3, B'_1C_3 obtenus avec le point P_2 et les sommets A'_1, B'_1, C'_1 de son triangle podaire sont, les premiers, inversement proportionnels à sin B, sin C, sin A, tandis que les seconds sont égaux entre eux, et réciproquement. Donc :

Dans un triangle T, *pour que les perpendiculaires menées d'un point* P *de son plan sur les côtés* BC *et* CA, (BC *et* AB), CA *et* AB, (CA *et* BC), AB *et* BC, (AB *et* CA), *interceptent sur les droites* CA, AB, BC, (AB, BC, CA), *des segments égaux, il faut et il suffit que les distances de ce point aux côtés* BC, CA, AB *soient proportionnelles aux quantités* cot B, cot C, cot A, (cot C, cot A, cot B).

---

(1) J. NEUBERG, *Mathesis*, 1886-54.
(2) R. GOORMAGHTIGH, *Mathesis*, 1925-213.

Construction de P_1, P_2. D'après ce qui précède, si l'on prend sur les hauteurs AA', BB', CC' de T des longueurs $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ et $A\alpha_2$, $B\beta_2$, $C\gamma_2$ proportionnelles à CC', AA', BB' et à BB', CC', AA' et que l'on mène par α_1, β_1, γ_1 et par α_2, β_2, γ_2 des parallèles aux droites BC, CA, AB, les points P_1 et P_2 se confondent avec les centres d'homothétie des triangles formés par ces parallèles et du triangle T.

SPHÈRES DE TÜCKER

141. Définition. — Théorème. — *Les cercles* (i_j, ρ), $(j = a, b, c, d)$, *inscrits dans quatre sections antiparallèles* égales t_j *des trièdres* (A), (B), (C), (D) *d'un tétraèdre* T *sont situés sur une même sphère* (ω, σ).

Soient i'_a, i'_b, i'_c et L'_d les projections orthogonales sur le plan ABC des centres i_a, i_b, i_c des cercles inscrits aux triangles $t_a \equiv \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $t_b \equiv \beta_1\beta_2\beta_3$, $t_c \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ et du *second* point de Lemoine L du tétraèdre T; α l'angle dièdre suivant $\alpha_1\alpha_2$, D l'angle de la sphère (O, R) circonscrite au tétraèdre avec le plan ABC.

La distance du point i_a au plan ABC a pour mesure

$$i_a i'_a = \rho \sin \alpha = \rho \sin D = \rho \cdot \frac{R_d}{R} = i_b i'_b = i_c i'_c,$$

et on a,

$$\frac{Ai_a}{AL} = \frac{i_a i'_a}{LL'_d} = \rho \cdot \frac{R_d}{R} : R_d \operatorname{tg} \theta = \frac{\rho}{R \operatorname{tg} \theta} = \frac{Bi_b}{BL} = \frac{Ci_c}{CL} = \frac{Di_d}{DL},$$

puis

$$\frac{Li_a}{LA} = \frac{Li_b}{LB} = \frac{Li_c}{LC} = \frac{Li_d}{LD} = 1 - \frac{\rho}{R \operatorname{tg} \theta},$$

θ désignant l'angle de Brocard du tétraèdre T. Dès lors, *les tétraèdres* T *et* $t \equiv i_a i_b i_c i_d$ *sont homothétiques par rapport au* second *point de* Lemoine L *du tétraèdre* T.

Le théorème résulte alors de ce que les parallèles menées par les points i_a, i_b, i_c, i_d aux rayons OA, OB, OC, OD de la sphère (O, R) concourent en un point ω de la droite OL tel que

$$\frac{L\omega}{LO} = \frac{Li_a}{LA} = 1 - \frac{\rho}{R \operatorname{tg} \theta} = \frac{\omega i_a}{OA} = \frac{\omega i_a}{R},$$

et

$$(1) \qquad \omega i_a = R\left(1 - \frac{\rho}{R \operatorname{tg} \theta}\right) = \omega i_j.$$

Les quatre cercles (i_j, ρ) sont donc situés sur la sphère de centre ω dont le carré du rayon a pour mesure

$$(2) \qquad \sigma^2 = \rho^2 + \overline{\omega i_j}^2 = \rho^2 + R^2\left(1 - \frac{\rho}{R \operatorname{tg}\theta}\right)^2.$$

Autre expression du rayon σ. Si l'on pose $\frac{\overline{L\omega}}{\overline{LO}} = m$, m étant quelconque, on déduit de l'homothétie (T, t), d'abord,

$$\overline{\omega i_a} = \frac{\overline{L\omega}}{\overline{LO}} = mR,$$

ensuite

$$\frac{Ai_a}{AL} = 1 - m = \frac{\rho}{R \operatorname{tg}\theta};$$

d'où

$$\rho = (1 - m) R \operatorname{tg}\theta,$$

et le carré du rayon de la sphère (ω, σ),

$$(3) \qquad \sigma^2 = \overline{\omega i_a}^2 + \rho^2 = R^2[m^2 + (1 - m)^2 \operatorname{tg}^2\theta].$$

Cette sphère intercepte dans le plan BCD, par exemple, un cercle (ω_a) dont le diamètre

$$(4) \qquad D_a = 2R[(1 - m)\cos A \operatorname{tg}\theta - m \sin A].$$

Car les distances OO_a, LL_a des points O, L au plan BCD ayant pour mesures

$$OO_a = R\cos A, \qquad LL_a = R_a \operatorname{tg}\theta = R \operatorname{tg}\theta \sin A,$$

celle de la distance $\omega\omega_a$ du point ω au même plan est égale à

$$(5) \qquad \overline{\omega\omega_a} = (1 - m)\overline{LL_a} + m.\overline{OO_a} = R[(1 - m)\operatorname{tg}\theta \sin A + m \cos A].$$

En outre les demi-angles x, y, z, t aux sommets des cônes droits ayant pour sommets les projections du point O sur les axes LL_j et pour bases les cercles (ω_j) découpés par la sphère (ω, σ) sur les plans des faces du tétraèdre, sont tels que

$$(6) \qquad \operatorname{tg} x = \frac{D_a}{2\omega_a\alpha} = \frac{D_a}{2AO} = \frac{D_a}{2R\cos A} = (1 - m)\operatorname{tg}\theta - m \operatorname{tg} A,$$

et ainsi de suite.

N. B. — D'après la relation (3), étant donné un tétraèdre T, *une sphère de* TÜCKER (ω, σ) *est déterminée par son centre* ω.

142. Surface enveloppe du système de sphères (ω, σ). — Prenons pour origine le point L, pour axe la droite LO et posons $LO = d$.

L'équation cartésienne d'une sphère (ω, σ) du système sera

$$(x - md)^2 + y^2 + z^2 = (1 - m)^2 R^2 \operatorname{tg}^2 \theta + m^2 R^2.$$

L'enveloppe de cette sphère a donc pour équation

$$[x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \operatorname{tg}^2 \theta] . (d^2 - R^2 \operatorname{séc}^2 \theta) + (dx - R^2 \operatorname{tg}^2 \theta)^2 = 0;$$

C'est un ellipsoïde de révolution (E) autour de la droite LO. (*Ellipsoïde de* Brocard.)

Théorème. — *L'ellipsoïde* (E) *de* Brocard *est inscrit au tétraèdre* T. *Ses foyers* F_1, F_2 *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* O *et* L. *Le produit des distances des foyers* F_1 *et* F_2 *aux plans des faces du tétraèdre* T *est égal à* $R^2 \sin^2 \theta$.

La relation (3) montre déjà qu'il y a sur la droite OL deux points F_1 et F_2 qui coïncident avec les centres de deux sphères (ω, σ) de rayon nul; ce sont les foyers de l'ellipsoïde (E); ils sont imaginaires, l'ellipsoïde étant aplati. Elle donne en outre,

$$m^2 - 2m \sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 0,$$

et, comme $x = md$, l'équation aux abscisses des points F_1 et F_2 est

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{2x}{d} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 0;$$

d'où il résulte

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{d} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{LO} = \frac{1}{LF_1} + \frac{1}{LF_2}.$$

Enfin, si l'on désigne par ω'_a la projection du point ω sur le plan BCD, on obtient

$$m = \frac{\omega\omega'_a - LL'_a}{OO_a - LL'_a},$$

puis

$$(\omega\omega'_a - LL'_a)^2 - 2\omega\omega'_a(OO_a - LL'_a) \sin^2 \theta + (OO_a - LL'_a) \sin^2 \theta = 0.$$

Or, comme $R_a = R \sin A$,

$$LL'_a = R \operatorname{tg} \theta \sin A, \qquad OO_a = R \cos A,$$

ce qui donne

$$\omega\omega'_a . \omega\omega'_b = F_1F'_1 . F_2F'_2 = \overline{OO_a}^2 \sin^2 \theta + \overline{LL'_a}^2 \cos^2 \theta = R^2 \sin^2 \theta,$$

F'_1, F'_2 étant les projections des foyers F_1, F_2 sur le plan BCD.

Mais $R^2 \sin^2\theta$ est le carré du demi-axe non focal de l'ellipsoïde (E), ce qui achève de démontrer le théorème.

143. Les égalités (3) donnent l'équation du second degré en m,

$$\sec^2\theta \,.\, m^2 - 2\,\mathrm{tg}^2\theta \,.\, m + \mathrm{tg}^2\theta - \left(\frac{\sigma}{R}\right)^2 = 0,$$

ayant pour racines

$$\left.\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}\right\} \sin^2\theta \pm \cos\theta \left[\left(\frac{\sigma}{R}\right)^2 - \sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}},$$

et dont il résulte que les sphères de Tücker (ω_1, σ_1), (ω_2, σ_2) pour lesquelles

$$\frac{L\omega_1}{LO} = m_1, \qquad \frac{L\omega_2}{LO} = m_2,$$

sont symétriques par rapport au centre E de l'ellipsoïde de Brocard (E), car, lorsque $m_1 = m_2 = \sin^2\theta$, les points ω_1, ω_2, E sont confondus et les rayons σ_1, σ_2 ont même mesure, $R \sin\theta$, que celui du cercle principal relatif à l'axe non focal de l'ellipsoïde (E).

Corollaire. — *Deux sphères de* Tücker *dont les centres sont symétriques par rapport au centre de l'ellipsoïde de* Brocard *sont égales.*

Ainsi, la sphère de Tücker (O_2) correspondant à $m_2 = \sin^2\theta - \cos^2\theta$ est égale à celle qui se confond avec la sphère circonscrite au tétraèdre T, pour laquelle

$$m_1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad \text{et} \qquad \overline{EO} = -\overline{EO_2}.$$

Cette remarque provient aussi de ce que les sphères du système de Tücker d'un tétraèdre T enveloppent l'ellipsoïde de Brocard (E).

144. Configuration plus générale. — Les tangentes des demi-angles φ_i des cônes droits ayant pour sommets les projections O'_i du centre de la sphère (O, R) sur les axes des cercles (ω_i) interceptés par une sphère de Tücker (ω, σ) sur les plans des faces du tétraèdre T et pour bases ces cercles (ω_i) ont pour mesures, (6),

$$\mathrm{tg}\,\varphi_a = (1 - m)\,\mathrm{tg}\,\theta - m\,\mathrm{tg}\,A, \ \ldots$$

Si le rapport $\overline{L\omega} : \overline{LO} = m$ est donné, on connaît les sommets O'_i des cônes droits dont les angles aux sommets $2\varphi_i$ sont déterminés.

Ces cônes interceptent sur les plans des faces du tétraèdre T des cercles (ω_i), et

$$\overline{\omega\omega_i}^2 + \overline{O'_i\omega'_i}^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_i = \sigma^2.$$

Plus généralement, étant donné un point arbitraire P et quatre longueurs l_i, il est possible de déterminer huit points Q par où passent des axes Δ_i perpendiculaires aux plans des faces du tétraèdre T, sur lesquels le point P se projette en P_i et qui possèdent la propriété suivante :

Il existe quatre angles φ_i tels que les cônes droits de sommets P_i, d'axes Δ_i, et de demi-angles aux sommets φ_i, coupent les faces opposées du tétraèdre T *suivant quatre cercles* (C_i) *situés sur une sphère de centre* Q, *de rayon* $l_i \operatorname{tg} \varphi_i$ *et réciproquement:*

En effet, (x, y, z, t) et (x_1, y_1, z_1, t_1) étant les coordonnées normales absolues des points P et Q, pour que les cercles (C_i) soient sur une même sphère en cause, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{l_a^2 x_1^2}{l_a^2 - x^2} = \frac{l_b^2 y_1^2}{l_b^2 - y^2} = \frac{l_c^2 z_1^2}{l_c^2 - z^2} = \frac{l_d^2 t_1^2}{l_d^2 - t^2} = l_i^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_i.$$

Or, les points Q dont les coordonnées sont proportionnelles aux quantités

$$\pm\frac{\sqrt{l_a^2 - x^2}}{l_a}, \qquad \pm\frac{\sqrt{l_b^2 - y^2}}{l_b}, \qquad \pm\frac{\sqrt{l_c^2 - z^2}}{l_c}, \qquad \pm\frac{\sqrt{l_d^2 - t^2}}{l_d},$$

remplissent ces conditions et sont au nombre de huit.

Ainsi, quand le point P coïncide avec le centre O de la sphère (O, R) et si $l_i = R$, les huit points Q de coordonnées normales $\pm R_a$, $\pm R_b$, $\pm R_c$, $\pm R_d$, coïncident avec le *second* point de LEMOINE L du tétraèdre T et avec ses associés harmoniques L_a, L_b, L_c, L_d et L_1, L_2, L_3.

Dans cette hypothèse $\varphi_i = \theta$ et la sphère (L, σ), de rayon $\sigma = R \operatorname{tg} \theta$ est la *seconde* sphère de LEMOINE (ou des COSINUS) signalée par P. DELENS [1], et dont voici une génération simple :

Dans un tétraèdre T, *les plans des faces interceptent sur les cônes droits ayant pour sommets les projections du centre de la sphère circonscrite sur les perpendiculaires aux faces menées par le* second *point de* LEMOINE L, *pour axes ces perpendiculaires et pour demi-angles aux sommets l'angle de* BROCARD θ, *quatre cercles situés sur une même sphère de centre* L.

---

[1] *Mathesis*, 1937, p. 447.

145. Sphères particulières du système de Tücker. — 1° Première *sphère de* Lemoine. Quand $m = \frac{1}{2}$, on obtient les formules

$$\sigma = \frac{1}{2} R \operatorname{séc} \theta, \qquad D_a = R \frac{\sin(A - B)}{\cos \theta}, \ldots,$$

de mêmes formes que celles qui concernent le *premier* cercle de Lemoine d'un triangle, et l'analogie pour le tétraèdre résulte encore du fait que *les parallèles aux droites* (AB_3, AC_3, AD_3), (BA_3, BC_3, BD_3), (CA_3, CB_3, CD_3), (DA_3, DB_3, DC_3) *joignant les sommets du tétraèdre* T *aux pieds des* secondes *symédianes, menées par le point* L, *rencontrent les plans* $B''C''D''$, $C''D''A''$, $D''A''B''$, $A''B''C''$ *des faces du tétraèdre transformé du tétraèdre tangentiel* T′ *du tétraèdre fondamental par l'homothétie* $\left(L, \frac{1}{2}\right)$, *en douze points situés sur une même sphère.*

2° Seconde *sphère de* Lemoine (ou des cosinus). Si $m = 0$, $\omega \equiv L$ et

$$\sigma = R \operatorname{tg} \theta, \qquad D_a = 2R \operatorname{tg} \theta \cos A, \ldots$$

$$D_a : D_b : D_c : D_d = \cos A : \cos B : \cos C : \cos D.$$

3° *Plus petite sphère du système.* — La somme

$$(1 - m) \operatorname{tg} \theta + m \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta$$

restant constante, quel que soit m, le second membre de l'égalité (3) possède un minimum lorsque

$$\operatorname{tg} \theta (1 - m) \operatorname{tg} \theta = m,$$

autrement dit, quand

$$\frac{m}{1 - m} = \operatorname{tg}^2 \theta, \qquad \text{d'où} \qquad m = \sin^2 \theta, \qquad 1 - m = \cos^2 \theta.$$

La plus petite sphère (ω, σ) du système correspond donc à ces valeurs de m et elle coïncide avec la sphère principale de l'ellipsoïde de Brocard (E) du tétraèdre T relative à l'axe OL.

Son rayon a pour mesure

$$\sigma = R \sin \theta,$$

et les diamètres des cercles qu'elle intercepte sur les plans des faces du tétraèdre T sont proportionnels aux quantités

$$\cos(A + \theta), \qquad \cos(B + \theta), \qquad \cos(C + \theta), \qquad \cos(D + \theta),$$

car

$$D_a = 2R \sin \theta \cos(A + \theta), \ldots$$

4° Lorsque

$$m = \frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{L\omega}{LO} = \operatorname{tg}\theta,$$

on obtient

$$\sigma = R\sin\theta \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right),$$

$$D_a = 2R\sin\theta \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right), \ldots$$

Cette sphère de Tücker intercepte sur les plans des faces du tétraèdre T des cercles dont les diamètres sont proportionnels aux quantités

$$\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\left(D-\frac{\pi}{4}\right).$$

5° *Sphères de* Tücker *tangentes aux plans des faces du tétraèdre* T. — Pour qu'une sphère de Tücker (ω_a, σ_a) soit tangente au plan BCD, par exemple, il faut et il suffit que l'on ait, d'après les relations (4),

$$D_a = 2R[m\sin A - (1-m)\cos A \operatorname{tg}\theta] = 0,$$

ce qui donne

$$m = \sin\theta\frac{\cos A}{\sin(A+\theta)}, \qquad 1-m = \cos\theta\frac{\sin A}{\sin(A+\theta)},$$

puis, et par analogie,

$$\sigma_a = \frac{R\sin\theta}{\sin(A+\theta)}, \qquad \sigma_b = \frac{R\sin\theta}{\sin(B+\theta)},$$

$$\sigma_c = \frac{R\sin\theta}{\sin(C+\theta)}, \qquad \sigma_d = \frac{R\sin\theta}{\sin(D-\theta)}.$$

Ces sphères (ω_i, σ_i) touchent respectivement les faces BCD, CDA, DAB, ABC du tètraèdre T aux pieds A_3, B_3, C_3, D_3 des *secondes* symédianes A'L, B'L, C'L, D'L, car

$$m = \frac{L\omega_a}{LO} = \sin\theta\frac{\cos A}{\sin(A+\theta)} = \frac{\sigma_a}{OA'} = \frac{LA_3}{LA'}.$$

6° *Sphères de* Tücker *centrées dans les plans des faces du tétraèdre* T. — Ces sphères (ω'_i, σ'_i), si elles existent, sont centrées aux points A_4, B_4, C_4, D_4 de rencontre du diamètre de Brocard OL avec les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre T et l'on a, par exemple, d'après la relation (5), l'égalité

$$R[(1-m)\sin A \operatorname{tg}\theta + m\cos A] = 0,$$

dont le premier membre exprime la mesure de la distance du centre d'une sphère (ω, σ) de TÜCKER au plan de la face BCD du tétraèdre. Il en résulte

$$m = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{cotg} A} = -\sin\theta \frac{\sin A}{\cos(A+\theta)}, \qquad 1 - m = \cos\theta \frac{\cos A}{\cos(A+\theta)},$$

puis, et par analogie,

$$\sigma'_a = \frac{R\sin\theta}{\cos(A+\theta)}, \qquad \sigma'_b = \frac{R\sin\theta}{\cos(B+\theta)},$$

$$\sigma'_c = \frac{R\sin\theta}{\cos(C+\theta)}, \qquad \sigma'_d = \frac{R\sin\theta}{\cos(D+\theta)}.$$

D'autre part, les égalités

$$\frac{1}{m} = \frac{\overline{LO}}{\overline{LA_4}} = 1 - \operatorname{cotg}\theta \operatorname{cotg} A,$$

et celles qui concernent les points B_4, C_4, D_4, donnent les relations

$$\sum \frac{\overline{LO}}{\overline{LA_4}} = 4 - \operatorname{cotg}\theta(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} D)$$

et

$$\sum \frac{1}{\overline{LA_4}} = \frac{\operatorname{cotg}\theta(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} D) - 4}{OL}$$
$$= \frac{\operatorname{cotg}\theta \operatorname{cotg} U - 4}{OL},$$

si l'on pose

$$\operatorname{cotg} U = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} D,$$

U désignant le *second* angle de BROCARD du tétraèdre T (P. DELENS).

7° *Sphères de* TÜCKER *passant par les sommets d'un tétraèdre* T. — Pour qu'une sphère de TÜCKER d'un tétraèdre T [distincte de la sphère circonscrite (O, R) qui correspond à $m = 1$], passe par un des sommets, D, par exemple, il faut et il suffit que les sections antiparallèles menées par le point D dans les trièdres A, B, C, soient égales. Ces sections DPW, DNU, DMQ sont déterminées par les sphères (DA), (DB), (DC) tangentes en D aux faces BCD, CDA, DAB et passant par A, B, C, les points M et N, P et Q, U et W étant situés sur les arêtes AC et AB, BA et BC, CB et CA.

La similitude des triangles DAM, DWC, CDA donne les relations

$$DQ = \frac{b'c'}{a} = \frac{a'b'c'}{aa'} = DU, \quad DM = \frac{a'b'c'}{bb'} = DW, \quad DN = \frac{a'b'c'}{cc'} = DP,$$

dont il résulte

$$(6) \qquad DQ = DU, \qquad DM = DW, \qquad DN = DP.$$

Les sections antiparallèles DPW, DNU, DMQ seront donc égales si l'on a, d'abord,

$$PW = NU = MQ,$$

puis

$$PW = BC.\frac{\overline{AD}^2}{AB.AC} = NU = CA.\frac{\overline{BD}^2}{BA.BC} = MQ = AB.\frac{\overline{CD}^2}{CB.CA},$$

enfin

$$a.\frac{a'^2}{bc} = b.\frac{b'^2}{ca} = c.\frac{c'^2}{ab}, \qquad \text{soit} \qquad aa' = bb' = cc'.$$

Si ces conditions sont réalisées, le tétraèdre T est *isodynamique* et réciproquement; elles s'appliquent de la même manière aux sommets A, B, C. Les centres de ces quatre sphères de Tücker appartiennent au diamètre de Brocard OL et, en vertu des égalités (6), à chacune des hauteurs du tétraèdre.

Conclusion. — *Si une sphère de* Tücker *autre que la sphère circonscrite, passe par un sommet, le tétraèdre* T *est isodynamique et réciproquement; les autres sommets sont situés chacun sur une sphère de* Tücker *et les centres de ces quatre sphères coïncident avec les points de rencontre du diamètre de* Brocard OL *avec les hauteurs du tétraèdre.*

N. B. — 1° Il résulte aussi de cette proposition que le *diamètre de* Brocard *d'un tétraèdre isodynamique est une directrice de l'hyperboloïde des hauteurs.*

2° Considérons les ternes (A), (B), (C), (D) de sphères tangentes respectivement en A, B, C, D à chacune des faces d'un tétraèdre *quelconque* T aboutissant à ces sommets, et passant par le sommet extérieur à la face considérée, dont le terne (D), par exemple, comprend les sphères (DA), (DB), (DC) tangentes en D aux faces BCD, CDA, DAB et passant par A, B, C.

Théorème. — *Les axes radicaux des ternes* (A), (B), (C), (D) *forment un quadruple hyperboloïdique.*

En effet, le plan radical des sphères (DA) et (DC), par exemple, passe, d'une part, par l'arête BD tangente en D à ces sphères et, d'autre part, par la symédiane DE du triangle CDA, car le plan de ce triangle intercepte sur les sphères en cause deux cercles tangents respectivement aux droites DA et DC en D dont l'axe radical

se confond avec la symédiane DE. L'axe radical du terne (D), coïncide donc avec l'intersection des plans formés par les arêtes DA, DB, DC avec les symédianes DK, DE, DF des faces DBC, DCA, DAB; autrement dit, avec la droite DD′ qui passe au point de concours des droites DK, DE, DF et dont les coordonnées barycentriques, dans le triangle ABC, sont proportionnelles aux carrés a'^2, b'^2, c'^2 des arêtes opposées aux arêtes BC, CA, AB. Même conclusion pour les axes radicaux AA_1, BB_1, CC_1 des ternes (A), (B), (C) et, à des coordonnées barycentriques des points A_1, B_1, C_1, D_1 dans les faces correspondantes. En vertu d'un théorème connu [1], les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont hyperboloïdiques, (38).

COROLLAIRE. — *Si le tétraèdre* T *est* ISODYNAMIQUE, *les axes radicaux des ternes* (A), (B), (C), (D) *de sphères se confondent avec les symédianes et concourent au* second *point de* LEMOINE L.

Car les droites AK, BE, CF joignant les sommets aux pieds des symédianes DK, DE, DF des triangles DBC, DCA, DAB concourent au point de LEMOINE D_1 du triangle ABC; les sections antiparallèles sont des triangles équilatéraux.

146. Si l'on remplace les cercles inscrits (i_j, ρ) aux sections antiparallèles égales t_j par des cercles qui leur sont concentriques, de même rayon arbitraire λ, ceux-ci sont situés sur une sphère (ω, σ') dont le carré du rayon a pour mesure

$$\sigma'^2 \equiv \overline{\omega i_j}^2 + \lambda^2 = m^2 R^2 + \lambda^2.$$

Ainsi, lorsque le tétraèdre T est *isodynamique*, les triangles égaux t_j sont équilatéraux et leurs cercles circonscrits, de rayon $r' = 2\rho$, sont sur une sphère concentrique à la sphère (ω, σ'), qui fait partie d'un système de TÜCKER que nous avons signalé [2]. Dans ce tétraèdre spécial, les relations (1) à (3) donnent, d'abord,

$$r' = 2\rho = 2(1 - m) R \operatorname{tg} \theta,$$

ensuite, la mesure

$$\sigma'^2 = R^2 . [4(1 - m)^2 \operatorname{tg}^2 \theta + m^2]$$

du carré du rayon de la sphère de TÜCKER de ce système.

N. B. — Nous nous contentons dans cette étude de considérer les cercles inscrits (i_j, ρ) aux sections antiparallèles égales t_j du tétraèdre T et le point de LEMOINE L, laissant l'examen des

---

(1) V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1931 51.

(2) *Mathesis*, 1932 (Supplément).

configurations formées par les autres cercles tritangents des triangles t_j et par les associés harmoniques L_i, L_1, L_2, L_3 du point L à l'agrément du lecteur.

147. Tétraèdre isodynamique T. — En plus de la sphère particulière du système de Tücker dont nous venons de parler, 6°, J. Neuberg a signalé les deux suivantes que nous ne ferons qu'indiquer.

A. *Les plans menés par le* second *point de* Lemoine L *parallèlement aux faces du tétraèdre isodynamique* T *rencontrent les arêtes en douze points d'une sphère, dont le centre divise le segment* LO *en deux parties dont l'une est double de l'autre.*

B. *Les droites menées par le point* L *parallèlement aux arêtes d'un tétraèdre isodynamique rencontrent les plans des faces en douze points d'une sphère dont le centre divise le segment* LO *en deux parties dont l'une est la moitié de l'autre.*

La seconde de ces sphères présente une analogie complète avec le *premier* cercle de Lemoine d'un triangle.

SPHÈRES D'ADAMS

148. La sphère (I, r) inscrite au tétraèdre $T \equiv ABCD$, touche les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC en A'', B'', C'', D''. Une sphère (I, ρ), de rayon arbitraire $\rho > r$, concentrique à la sphère (I, r), découpe sur les mêmes faces des cercles égaux (A''), (B''), (C''), (D'') que les droites $(A''B, A''C, A''D)$, $(B''C, B''D, B''A)$, $(C''D, C''A, C''B)$, $(D''A, D''B, D''C)$ rencontrent respectivement, entre B et A'', C et A'', D et A'', ..., en des points (X_b, X_c, X_d), (Y_c, Y_d, Y_a), (Z_d, Z_a, Z_b), (V_a, V_b, V_c). Les triangles $X_bX_cX_d$, $Y_cY_dY_a$, $Z_dZ_aZ_b$, $V_aV_bV_c$ sont égaux, car leurs cercles circonscrits sont égaux et les angles $BA''C$, $CA''D$, $DA''B$ formés par les droites qui unissent les sommets du tétraèdre T aux points de contact de la sphère (I, r) inscrite sur les plans des faces sont les mêmes pour les quatre faces.

Les plans $Y_aZ_aV_a$, $X_bZ_bV_b$, $X_cY_cV_c$, $X_dY_dZ_d$ forment un tétraèdre $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ homothétique au tétraèdre $T'' \equiv A''B''C''D''$. Les plans des faces du tétraèdre T étant perpendiculaires aux rayons de la sphère (I, r) circonscrite au tétraèdre T'', sont antiparallèles, par rapport aux faces opposées du tétraèdre T_1, dans les trièdres (A_1), (B_1), (C_1), (D_1). Ils rencontrent donc les arêtes du tétraèdre T_1 aux sommets des triangles tangentiels $X'_bX'_cX'_d$, $Y'_cY_dY'_a$, $Z'_dZ'_aZ'_b$,

$V'_aV'_bV'_c$ des triangles égaux $X_bX_cX_d$, $Y_cY_dY_a$, $Z_dZ_aZ_b$, $V_aV_bV_c$. Ces triangles tangentiels sont égaux à leur tour et le centre d'homothétie du tétraèdre T et du tétraèdre tangentiel T'_1 du tétraèdre T_1 est le point L'_1 dont les distances aux plans des faces du tétraèdre T'_1 sont proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits à ces faces [1] (*second* point de LEMOINE); d'où il résulte que le point L'_1 est aussi le centre d'homothétie des tétraèdres T'' et T_1 qui se confond avec leurs *seconds* points de LEMOINE $L'' \equiv L_1$. Donc, *dans le tétraèdre* T_1, *la sphère* (I, ρ) *appartient à un système de* TÜCKER *d'axe* O_1I, O_1 *étant le centre de la sphère circonscrite.*

Si l'on construit les sphères (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d), inscrites dans les trièdres (A), (B), (C), (D) du tétraèdre T et touchant respectivement les trois faces adjacentes en (Y_a, Z_a, V_a), (X_b, Z_b, V_b), (X_c, Y_c, V_c), (X_d, Y_d, Z_d), les points A'' et A_1, B'' et B_1, C'' et C_1, D'' et D_1 appartiennent aux axes radicaux des ternes de sphères $[(\omega_b), (\omega_c), (\omega_d)]$, $[(\omega_c), (\omega_d), (\omega_a)]$, $[(\omega_d), (\omega_a), (\omega_b)]$, $[(\omega_a), (\omega_b), (\omega_c)]$.

Le centre radical des sphères (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d) *est donc le point* L'_1 *qui reste fixe lorsque le rayon* ρ *de la sphère* (I, ρ) *varie; ces sphères* (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d) *sont orthogonales à une sphère* (L''), *de centre* L'', *qui se réduit à son centre quand elles concourent en ce point.*

Réciproquement, une sphère (L'_1) étant donnée, les sphères (O_a), (O_b), (O_c), (O_d) orthogonales à cette sphère et inscrites respectivement dans les trièdres (A), (B), (C), (D), touchent les faces adjacentes en douze points situés sur une même sphère concentrique à la sphère (I, *r*) inscrite au tétraèdre T. En particulier, lorsque la sphère (L'') se réduit à son centre L_1, les sphères (ω''_a), (ω''_b), (ω''_c), (ω''_d) passant par L'_1, centrées sur AI, BI, CI, DI entre A et I, B et I, C et I, D et I, sont tangentes aux quatre plans des faces du tétraèdre T en *douze points situés sur une même sphère concentrique à la sphère* (I, *r*) *inscrite.* (Sphère d'ADAMS.)

149. Nous avons fixé la position des points (X_b, X_c, X_d), ..., mais, comme les droites BA'', CA'', DA'', rencontrent le cercle (A'') en six points, il y a quatre quaternes de sphères comme (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d) à envisager. De plus, à chacun des tétraèdres podaires tel que T'', des huit centres des sphères quadritangentes du tétraèdre T, correspond un point L'', soit en tout huit positions de L'' auxquelles peuvent être associées des sphères comme

$$[(\omega_a), (\omega_b), (\omega_c), (\omega_d)] \quad \text{et} \quad [(\omega'_a), (\omega'_b), (\omega'_c), (\omega'_d)],$$

[1] Cf. P. DELENS, *Mathesis*, 1937, 447.

ces dernières sphères ayant leurs centres sur AI, BI, CI, DI, ..., extérieurement à (I, r), ..., du côté de I, ..., et touchant trois des faces du tétraèdre T.

Nous ne poursuivrons pas ici ces études qui allongeraient trop le texte que nous nous sommes imposé.

150. Tétraèdre isogone. — Dans ce tétraèdre particulier $T \equiv ABCD$, où les droites AA'', BB'', CC'', DD'' concourent au point L'' précité relatif au tétraèdre $T'' \equiv A''B''C''D''$, les plans π_a, π_b, π_c, π_d tangents en ce point aux sphères (ω''_a), (ω''_b), (ω''_c), (ω''_d), inscrites aux trièdres (A), (B), (C), (D) et passant par le point L'', sont parallèles aux plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC; de sorte que, si l'on conserve les notations du paragraphe précédent, les points X'_a, L'', V'_a, par exemple, alignés sur le centre de similitude externe des sphères (ω''_a) et (ω''_d), sont collinéaires. De même, les droites $X'_bY'_a$, $X'_cZ'_b$, $Y'_aZ'_b$, $Y'_dV'_b$, $Z'_dV'_c$ concourent au point L''.

Les plans π_a, π_b, π_c, π_d découpent dans le tétraèdre T des tétraèdres homothétiques au tétraèdre T, par rapport aux sommets A, B, C, D. Il en résulte que les plans $(X'_aV'_a, Z'_dV'_b)$, $(Z'_aV'_c, Y'_aV'_b)$, $(Y'_dV'_a, X'_dV'_a)$, ..., sont respectivement perpendiculaires aux *axes* AI, BI, CI, DI du tétraèdre T.

Les intersections $X'_dV'_a$, $Y'_dV'_b$, $Z'_dV'_c$, $X'_bY'_a$, $X'_cZ'_a$, $Y'_cZ'_b$ de ces plans pris de proche en proche, sont donc parallèles aux arêtes des tétraèdres T'' et T_1 associés au tétraèdre T. Mais, dans le cas spécial qui nous occupe, les tétraèdres T'' et T_1 étant isodynamiques, la *sphère d'*Adams, de centre L'', qui contient les douze points de contact des sphères (ω''_a), (ω''_b), (ω''_c), (ω''_d) avec les faces du tétraèdre T et passant par le point L'', est une sphère de Lemoine pour chacun des tétraèdres T'' et T_1.

N. B. — 1° Les sphères (ω''_a), (ω''_b), (ω''_c), (ω''_d) sont les transformées des plans BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre isogone T par l'inversion $(L'', L''X'_d.L''V'_a)$.

2° Si l'on transforme homographiquement la configuration formée par le tétraèdre isogone T et les sphères (ω''_a), (ω''_b), (ω''_c), (ω''_d), en laissant invariable le plan de l'infini, on obtient la proposition suivante corrélative d'une propriété généralisant le cercle d'Adams :

Une quadrique (Q) *touche les faces* BCD, CDA, DAB, ABC, *d'un tétraèdre* $T \equiv ABCD$ *en* A'', B'', C'', D''. *Les droites* AA'', BB'', CC'', DD'' *sont supposées se couper en un point* M; (C_a), (C_b), (C_c), (C_d) *sont les cônes de sommets* A, B, C, D *circonscrits à la quadrique* (Q). *Les plans menés par le point* M *parallèlement aux plans* $B''C''D''$,

$C''D''A''$, $D''A''B''$, $A''B''C''$, *coupent les cônes* (C_a), (C_b), (C_c), (C_d) *suivant quatre coniques qui sont sur une quadrique* (Q') *homothétique et concentrique à la quadrique* (Q).

151. La configuration des sphères d'ADAMS peut être examinée d'une autre manière, en considérant des segments égaux

$$A''\alpha_2 = A''\alpha_3 = A''\alpha_4 = \rho,$$

portés sur $A''B$, $A''C$, $A''D$ et les points de rencontre ω_2, ω_3, ω_4 des perpendiculaires au plan de la face BCD du tétraèdre T menées par les points α_2, α_3, α_4 sur les droites BI, CI, DI.

THÉORÈME. — *Le plan* $\omega_2\omega_3\omega_4$ *reste parallèle à un plan fixe, quel que soit* ρ.

En effet, si l'on désigne par β, γ, δ les angles des droites IB, IC, ID avec le plan BCD et par K_2, K_3, K_4 les projections orthogonales du point A'' sur IB, IC, ID, on a, d'une part,

$$I\omega_2 = \frac{\rho}{\cos\beta}, \qquad I\omega_3 = \frac{\rho}{\cos\gamma}, \qquad I\omega_4 = \frac{\rho}{\cos\delta},$$

et

$$A''K_2 = A''I\cos\beta = r\cos\beta, \qquad A''K_3 = r\cos\gamma, \qquad A''K_4 = r\cos\delta,$$

d'autre part,

$$I\omega_2 . A''K_2 = I\omega_3 . A''K_3 = I\omega_4 . A''K_4 = r\rho,$$

ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME. — *L'axe radical des sphères* (ω_2), (ω_3), (ω_4), *de rayons* $\omega_2\alpha_2$, $\omega_3\alpha_3$, $\omega_4\alpha_4$, *coïncide avec la droite passant par le point* A'' *dont les distances d'un quelconque de ses points aux faces du tétraèdre* $T'' \equiv A''B''C''D''$ *aboutissant au sommet* A'' *sont proportionnelles aux quantités* $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\delta$.

Car si l'on désigne par J la projection orthogonale du point I sur le plan $\omega_2\omega_3\omega_4$ et par δ_2, δ_3, δ_4 les distances du point J aux plans perpendiculaires à IB, IC, ID en I, on obtient, d'abord,

$$\frac{\delta_2}{IJ} = \frac{IJ}{I\omega_2} = \frac{IJ}{\dfrac{\rho}{\cos\beta}} = \frac{IJ\cos\beta}{\rho},$$

ensuite, et par analogie,

$$\frac{\delta_2}{\cos\beta} = \frac{\delta_3}{\cos\gamma} = \frac{\delta_4}{\cos\delta};$$

autrement dit, *les distances* δ_2, δ_3, δ_4 *du point* J *aux plans des faces du trièdre* (T_I) *perpendiculaires à* IB, IC, ID *en* I *sont proportionnelles aux rayons des cercles* C″D″A″, D″A″B″, A″B″C″.

Or, l'axe radical des sphères (ω_2), (ω_3), (ω_4) coïncide avec la perpendiculaire A″J″ sur le plan $\omega_2\omega_3\omega_4$ et les plans C″D″A″, D″A″B″, A″B″C″ sont perpendiculaires à BI, CI, DI. Les droites IJ et A″J″ sont donc homologues par rapport aux trièdres homothétiques (T_I) et (A″) ce qui achève de démontrer le théorème.

Corollaire. — *Si l'on considère les sphères* (ω_1), (ω_2), (ω_3), (ω_4) *respectivement tangentes à trois faces du tétraèdre* T, *les contacts de ces sphères avec les faces étant sur une sphère concentrique à la sphère inscrite, le centre radical de ces sphères se confond avec le point* L″ *dont les coordonnées normales par rapport au tétraèdre* T″ *sont proportionnelles aux rayons des cercles* B″C″D″, C″D″A″, D″A″B″, A″B″C″. (*Second* point de Lemoine du tétraèdre T″.)

En effet, la donnée de ρ détermine de même une sphère (ω_1) tangente aux faces ABC, CDA, DAB, jouant le même rôle que les sphères (ω_2), (ω_3), (ω_4).

Coordonnées du point L″ dans le tétraèdre T. — D'après une propriété déjà invoquée, (**113**), lesdistances du *second* point de Lemoine d'un tétraèdre T aux plans des faces du tétraèdre tangentiel de celui-ci, sont proportionnelles aux quantités $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$, $a'b'c'$.

Par suite, si l'on prend T″ pour tétraèdre fondamental, les coordonnées normales (x, y, z, t) du point L″, par rapport au tétraèdre T, sont proportionnelles à

$$\begin{array}{ll} A''B''.A''C''.A''D'', & B''C''.B''D''.B''A'', \\ C''D''.C''A''.C''B'', & D''A''.D''B''.D''C''; \end{array}$$

autrement dit,

$$x:y:z:t = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{c'}{2} : \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c'}{2}\cos\frac{a'}{2}$$
$$: \cos\frac{c}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{a'}{2} : \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Les coordonnées barycentriques du point L″ dans le tétraèdre T sont proportionnelles aux tangentes des angles α, β, γ, δ que les bissectrices AI, BI, CI, DI font avec les plans des faces. En effet

on obtient, de proche en proche,

$$BA'' \sin^2 CBD = r^2 \cos^2 \frac{c}{2} : \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b'}{2},$$

$$\cos CBD = (\cos c + \cos a \cos b') : \sin a \sin b',$$

$$\sin^2 CBD = (1 - \cos^2 a - \cos^2 b' - \cos^2 c - 2 \cos a \cos b' \cos c) : \sin^2 a \sin^2 b'$$

$$= 81V^4 : 4C^2 . D^2 . A^2 \sin^2 a \sin^2 b',$$

$$BA'' = \frac{8C . D . A}{9V^2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b'}{2} \cos \frac{c}{2} . r;$$

d'où

$$\operatorname{tg} \beta : B = 9V^2 . y : 8A . B . C . D \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a'}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{b'}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{c'}{2},$$

et enfin

$$\frac{Ax}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{By}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{Cz}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{Dt}{\operatorname{tg} \delta},$$

ce qui donne pour le point L'' une définition analogue à celle du point de GERGONNE d'un triangle et que nous avons déjà signalée, (**134**).

152. Prenons en coordonnées rectangulaires AI pour axe des x et A comme origine, et cherchons à déterminer les sphères (ω_1) et (Ω_1) inscrites dans le cône de révolution de sommet A et de demi-angle au sommet α, et orthogonales à une sphère fixe de centre L'' (x_0, y_0, z_0) et de rayon k.

Si λ est le rayon d'une telle sphère, on a

$$\left(x_0 - \frac{\lambda}{\sin \alpha}\right)^2 + y_0^2 + z_0^2 - \lambda^2 - k^2 = 0;$$

d'où

$$\lambda^2 - 2\lambda \frac{x_0 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - k^2) \operatorname{tg}^2 \alpha = 0.$$

Si l'on désigne par l le rayon de la sphère de raccordement avec le cône précédent suivant le plan perpendiculaire à AI mené par le point L'', on peut écrire

$$\lambda^2 - 2\lambda l + (\overline{AL''}^2 - k^2) \operatorname{tg}^2 \alpha = 0.$$

On a donc, k étant donné, deux systèmes de sphères (ω_1) et (Ω_1).

La somme des rayons des sphères (ω_1) *et* (Ω_1) *est indépendante de la puissance* k^2 *et égale à* $2l$. *Le produit des rayons est égal à*

$$(\overline{AL''}^2 - k^2) \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Le point ω_1 étant donné, il lui correspond dans le tétraèdre T, un tétraèdre $\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$, les plans $\omega_1\omega_2\omega_3$, $\omega_1\omega_2\omega_4$, $\omega_1\omega_3\omega_4$ étant respectivement perpendiculaires aux droites L″D, L″C, L″B.

La puissance k^2 *étant donnée, il existe donc pour le tétraèdre* T, *deux sphères d'*ADAMS.

Soient (A) le cône circonscrit à la sphère (I, r) inscrite, de sommet A, L′ le centre de la sphère de raccordement avec ce cône suivant le plan mené par le point L″ perpendiculaire à AI; les points I, L′, ω_1 et Ω_1 se projettent sur une génératrice quelconque de (A) en i, l', ω'_1 et Ω'_1 et l'on a

$$i\Omega'_1 - i\omega'_1 = il' = \text{constante}.$$

Donc, *la différence des rayons des cercles sections des deux sphères d'*ADAMS *correspondant à la puissance donnée* k^2, *par les faces du tétraèdre* T, *est constante et indépendante de la puissance* k^2.

Valeurs particulières de k^2. Si les points ω_1 et Ω_1 sont symétriques par rapport au point L′, ils coïncident avec L′ et les points ω_2 et Ω_2 sont confondus ainsi que les points ω_3 et Ω_3, ω_4 et Ω_4; il n'y a plus qu'*une seule sphère d'*ADAMS.

L'équation donnant les rayons des sphères (ω_1), (Ω_1) étant

$$\lambda^2 - 2l\lambda + (\overline{AL''}^2 - k^2)\operatorname{tg}^2\alpha = 0,$$

on aura, en désignant par l, m, n, p les rayons des sphères de raccordement avec les cônes (A), (B), (C), (D), circonscrits à la sphère (I, r) suivant les plans menés par le point L″ perpendiculaires aux droites AI, BI, CI, DI,

$$k^2 = \overline{AL''}^2 - \frac{l^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \overline{BL''}^2 - \frac{m^2}{\operatorname{tg}^2\beta} = \overline{CL''}^2 - \frac{n^2}{\operatorname{tg}^2\gamma} = \overline{DL''}^2 - \frac{p^2}{\operatorname{tg}^2\delta},$$

et l'on peut énoncer la propriété suivante :

Étant donné un tétraèdre T *et le point* L″ *défini précédemment, les plans menés par* L″ *perpendiculaires aux droites* AI, BI, CI, DI *joignant les sommets au centre de la sphère inscrite, coupent les cônes de sommets* A, B, C, D *circonscrits à la sphère inscrite suivant quatre cercles* (C_A), (C_B), (C_C), (C_D) *qui sont sur une même sphère de centre* I.

Cette proposition étend au tétraèdre un théorème bien connu relatif au triangle et au point de GERGONNE. (*Premier cercle d'*ADAMS.)

153. TÉTRAÈDRE ISOGONE. — Le tétraèdre isogone T défini par les relations

$$(1) \qquad \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2} = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{b'}{2} = \cos\frac{c}{2}\cos\frac{c'}{2},$$

est celui pour lequel les droites AA″, BB″, CC″, DD″ joignant les sommets du tétraèdre T aux points de contact de la sphère inscrite (I, r) avec les faces opposées sont concourantes.

Leur point de concours est le point L″ défini plus haut. En effet, la droite AA″ a pour équation

$$\frac{y'}{\cos^2\frac{c'}{2}} = \frac{z'}{\cos^2\frac{b'}{2}} = \frac{t'}{\cos^2\frac{a}{2}};$$

elle contient le point L″

$$x : y : z : t = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c'}{2}\cos\frac{b'}{2} : \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c'}{2}\cos\frac{a'}{2}$$
$$: \cos\frac{c}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{a'}{2} : \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

et les relations (1) sont vérifiées.

On a dans ce cas une analogie complète entre la figure du plan et celle de l'espace.

154. Autre configuration de sphères. — *Tétraèdre spécial.* — Si les dièdres d'un tétraèdre T satisfont aux relations

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2} = \sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2} = \sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2},$$

les droites qui joignent un sommet du tétraèdre aux points de contact intérieurs de la face opposée avec une sphère inscrite dans le trièdre tronqué correspondant, concourent en un même point P.

Nous donnerons au point P le nom de point de Nagel du tétraèdre T par comparaison avec celui de même nom dans un triangle.

Théorème. — *Dans ce tétraèdre* T, *les sphères tangentes à trois des faces respectivement et passant par le point* P *de* Nagel, *découpent sur les plans des faces quatre cercles situés sur une même sphère de centre* P.

Considérons, en effet, les sphères (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d), inscrites dans les trièdres (A), (B), (C), (D), passant par le point P, dont les centres ω_a, ω_b, ω_c, ω_d sont sur les axes AI, BI, CI, DI extérieurement à ces segments rectilignes, du côté du point I. Soient (A_b, A_c, A_d), (B_c, B_d, B_a), (C_d, C_a, C_b), (D_a, D_b, D_c), les points de contact de ces sphères sur les faces qu'elles touchent.

Les plans tangents en P à chacune des sphères (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d) sont parallèles aux plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC

et les triples de points (P, A_b, C_a), (P, A_c, B_a), (P, A_d, D_a), ..., sont collinéaires, car les droites PA_b et PC_a, ..., qui joignent les points homologues P et A_b, P et C_a sur les sphères (ω_a) et (ω_c), par exemple, passent par le centre de similitude interne de ces sphères. De plus, A'_a, B'_a, C'_a, D'_a désignant les points de contact de la sphère (I_a) inscrite dans le trièdre tronqué opposé au sommet A, sur les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC, les tétraèdres $PA_bA_cA_d$ et $A'_aB'_aC'_aD'_a$ sont homothétiques, si bien que les plans BCD et $A_bA_cA_d$ sont antiparallèles relativement au trièdre $P(A_bA_cA_d)$.

Donc,

$$PA_b \cdot PB_a = PA_c \cdot PC_a = PA_d \cdot PD_a = k^2;$$

on montrerait de même que

$$PA_d \cdot PD_a = PB_c \cdot PC_b = PB_d \cdot PD_b = k^2.$$

Les sphères (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d) sont donc les transformées des plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC par l'inversion (P, k^2), de sorte que les quatre cercles découpés par ces sphères sur les plans des faces du tétraèdre T sont sur une même sphère (P, k), de centre P et de rayon k.

SPHÈRES DE LUCAS

155. Lemme. — *Si deux sphères* (O_1, R_1), (O_2, R_2) *sont tangentes à une même sphère* (O, R) *en deux points* A *et* B *dont la distance* $AB = d$, *le carré d'une tangente commune extérieure* T_1T_2 *aux deux premières a pour mesure*

$$\overline{T_1T_2}^2 = \frac{d^2}{R^2}(R \pm R_1)(R \pm R_2),$$

et réciproquement.

En effet, si la droite AB recoupe les sphères (O_1, R_1), (O_2, R_2) en A', B', du parallélisme des droites T_1A et T_2B', O_1A' et O_2B, il résulte, d'une part,

$$(1) \qquad \frac{A'B}{T_1T_2} = \frac{T_1T_2}{AB'}, \qquad \text{soit} \qquad \overline{T_1T_2}^2 = A'B \cdot AB';$$

d'autre part, on a en grandeur et en signe, d'abord,

$$\frac{A'O_1}{OB} = \frac{A'A}{AB}, \qquad \text{donc} \qquad \frac{A'O_1 + OB}{OB} = \frac{A'A + AB}{AB},$$

dont on tire selon le contact, et par analogie,

$$\frac{A'B}{d} = \frac{R \pm R_1}{R}, \qquad \frac{AB'}{d} = \frac{R \pm R_2}{R};$$

ensuite, d'après l'égalité (1),

$$\overline{T_1T_2}^2 = \frac{d^2}{R^2}(R \pm R_1)(R \pm R_2), \tag{2}$$

enfin

$$4R_1R_2 = \frac{d^2}{R^2}(R \pm R_1)(R \pm R_2), \tag{3}$$

quand les sphères (O_1, R_1), (O_2, R_2) sont, en outre, tangentes entre elles, et réciproquement.

156. Considérons un tétraèdre $T \equiv ABCD$ pour rechercher, par exemple, si l'on peut construire quatre sphères (ω_i, ρ_i) tangentes intérieurement à la sphère (O, R) aux sommets A, B, C, D du tétraèdre et tangentes entre elles trois à trois. Ces sphères (ω_i, ρ_i), si elles existent, sont nécessairement tangentes extérieurement les unes aux autres et la relation (3) qui correspond à cette hypothèse donne, de proche en proche,

$$\begin{aligned}
4\rho_b\rho_c &= \frac{a^2}{R^2}(R-\rho_b)(R-\rho_c), & 4\rho_d\rho_a &= \frac{a'^2}{R^2}(R-\rho_d)(R-\rho_a),\\
4\rho_c\rho_a &= \frac{b^2}{R^2}(R-\rho_c)(R-\rho_a), & 4\rho_d\rho_b &= \frac{b'^2}{R^2}(R-\rho_d)(R-\rho_b),\\
4\rho_a\rho_b &= \frac{c^2}{R^2}(R-\rho_a)(R-\rho_b), & 4\rho_d\rho_c &= \frac{c'^2}{R^2}(R-\rho_d)(R-\rho_c).
\end{aligned} \tag{4}$$

Multipliant ces égalités membre à membre, il vient

$$\frac{16R^4\rho_a\rho_b\rho_c\rho_d}{(R-\rho_a)(R-\rho_b)(R-\rho_c)(R-\rho_d)} = (aa')^2 = (bb')^2 = (cc')^2. \tag{5}$$

Réciproquement, les égalités (5) entraînent les égalités (4).

Conséquence. — *Pour qu'il existe quatre sphères se touchant entre elles trois à trois et tangentes intérieurement à la sphère circonscrite respectivement aux sommets d'un tétraèdre* T, *il faut et il suffit que ce tétraèdre soit isodynamique* [1].

---

[1] Ces sphères ont été appelées sphères de Lucas, par analogie aux cercles du triangle. En réalité, les cercles de Lucas d'un triangle n'appartiennent pas à ce géomètre qui les a signalés en 1892 (*Mathesis*, 1892, 264). On les rencontre, en effet, pour la première fois, dans le *Journal de* Vuibert, 1879, p. 92, sans nom d'auteur, et sous une forme plus générale que celle envisagée par Lucas.

Pour déterminer les rayons des sphères (ω_i, ρ_i) relatives à un tétraèdre isodynamique T, il suffit de diviser le produit des égalités (4) par celui de trois d'entre elles convenablement choisies. On obtient ainsi, d'après les conditions $aa' = bb' = cc'$,

$$(6)\quad \begin{aligned} \rho_a &= \frac{bc\mathrm{R}}{2a\mathrm{R}+bc} = \frac{a'c\mathrm{R}}{2b'\mathrm{R}+a'c} = \frac{a'b\mathrm{R}}{2c'\mathrm{R}+a'b}, \\ \rho_b &= \frac{ca\mathrm{R}}{2b\mathrm{R}+ca} = \frac{b'c\mathrm{R}}{2a'\mathrm{R}+b'c} = \frac{ab'\mathrm{R}}{2c'\mathrm{R}+ab'}, \\ \rho_c &= \frac{ab\mathrm{R}}{2c\mathrm{R}+ab} = \frac{bc'\mathrm{R}}{2a'\mathrm{R}+bc'} = \frac{ac'\mathrm{R}}{2b'\mathrm{R}+ac'}, \\ \rho_d &= \frac{b'c'\mathrm{R}}{2a\mathrm{R}+b'c'} = \frac{c'a'\mathrm{R}}{2b\mathrm{R}+c'a'} = \frac{a'b'\mathrm{R}}{2c\mathrm{R}+a'b'}. \end{aligned}$$

Les conditions $aa' = bb' = cc'$, et par suite les égalités (4), ne changent pas dans l'inversion, de sorte qu'une inversion $(\mathrm{O}, \mathrm{R}^2)$ transforme les sphères (ω_i, ρ_i) en des sphères (ω'_i, ρ'_i) tangentes à la sphère (O, R) aux sommets A, B, C, D du tétraèdre et qui se touchent trois à trois.

En effet, d'après les propriétés de l'inversion, les rayons de ces sphères ont pour mesures

$$(7)\quad \begin{aligned} \rho'_a &= \frac{bc\mathrm{R}}{|2a\mathrm{R}-bc|} = \frac{a'c\mathrm{R}}{|2b'\mathrm{R}-a'c|} = \frac{a'b\mathrm{R}}{|2c'\mathrm{R}-a'b|}, \\ \rho'_b &= \frac{ca\mathrm{R}}{|2b\mathrm{R}-ca|} = \frac{b'c\mathrm{R}}{|2a'\mathrm{R}-b'c|} = \frac{ab'\mathrm{R}}{|2c'\mathrm{R}-ab'|}, \\ \rho'_c &= \frac{ab\mathrm{R}}{|2c\mathrm{R}-ab|} = \frac{bc'\mathrm{R}}{|2a'\mathrm{R}-bc'|} = \frac{ac'\mathrm{R}}{|2b'\mathrm{R}-ac'|}, \\ \rho'_d &= \frac{b'c'\mathrm{R}}{|2a\mathrm{R}-b'c'|} = \frac{c'a'\mathrm{R}}{|2b\mathrm{R}-c'a'|} = \frac{a'b'\mathrm{R}}{|2c\mathrm{R}-a'b'|}, \end{aligned}$$

lesquelles satisfont aux égalités (4) et réciproquement.

Autre démonstration. — *La condition est nécessaire.* — Quatre sphères (ω_i, ρ_i) étant tangentes trois à trois et tangentes à la sphère (O, R) en A, B, C, D; une inversion (A, λ) transforme les sphères (O, R) et (ω_a, ρ_a) en deux plans (P) et (P′) perpendiculaires à la droite AO, tandis que les sphères (ω_b, ρ_b), (ω_c, ρ_c), (ω_d, ρ_d) deviennent des sphères tangentes aux plans (P), (P′), donc égales entre elles, leurs points de contact avec le plan (P) étant les points de rencontre B'_1, C'_1, D'_1 des arêtes AB, AC, AD avec ce plan. D'autre part, le triangle $\mathrm{B}'_1\mathrm{C}'_1\mathrm{D}'_1$ est équilatéral, et d'après les propriétés de l'inversion,

$$\mathrm{B}'_1\mathrm{C}'_1 = \mathrm{BC}.\frac{\lambda}{\mathrm{AB}.\mathrm{AC}} = \mathrm{C}'_1\mathrm{D}'_1 = \mathrm{CD}.\frac{\lambda}{\mathrm{AC}.\mathrm{DA}} = \mathrm{D}'_1\mathrm{B}'_1 = \mathrm{DB}.\frac{\lambda}{\mathrm{AB}.\mathrm{DA}},$$

ce qui donne

$$BC.DA = CA.DB = AB.DC$$

et le tétraèdre T est isodynamique.

La condition est suffisante. — Si le tétraèdre T est isodynamique, une inversion (A, λ) transforme les sommets B, C, D en ceux d'un triangle équilatéral $B'_1C'_1D'_1$ aux sommets duquel on peut construire trois sphères égales, tangentes deux à deux et tangentes au plan $(P) \equiv B'_1C'_1D'_1$ et à un autre plan (P′) parallèle au premier. Les transformés du plan (P′) et des trois sphères égales qui lui sont tangentes par une inversion (A, λ) sont quatre sphères tangentes trois à trois et tangentes à la sphère (O, R) aux sommets A, B, C, D du tétraèdre T.

157. Les relations (6) et (7) montrent que les rayons des sphères (ω_i, ρ_i) et (ω'_i, ρ'_i) sont considérés comme positifs selon que les segments rectilignes $\overrightarrow{A\omega_a}$, $\overrightarrow{B\omega_b}$, $\overrightarrow{C\omega_c}$, $\overrightarrow{D\omega_d}$ et $\overrightarrow{A\omega'_a}$, $\overrightarrow{B\omega'_b}$, $\overrightarrow{C\omega'_c}$, $\overrightarrow{D\omega'_d}$ ont ou non le sens des segments $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$. Les rayons des sphères (ω'_i, ρ'_i) sont négatifs quand

$$2aR < bc, \quad 2bR < ca, \quad 2cR < ab, \quad 2aR < b'c',$$

et si ces conditions sont remplies simultanément, la sphère (O, R) circonscrite au tétraèdre isodynamique T est extérieure aux quatre sphères (ω'_i, ρ'_i).

Il peut arriver que la sphère (O, R) soit intérieure, mais à l'une seulement des sphères (ω'_i, ρ'_i), par exemple, dans le cas où

$$(8) \qquad 2aR - bc = 2b'R - a'c = 2c'R - a'b < 0.$$

THÉORÈME. — *Dans un triangle, une seule hauteur peut être plus grande que le côté opposé.*

En effet, on peut construire un triangle ABC dont la hauteur AA′ est plus grande que le côté BC; les hauteurs BB′, CC′ relatives aux côtés CA, AB′ de ce triangle sont plus petites que ces côtés, car

$$BB' < BC < AA' < CA, \quad CC' < BC < AA' < AB.$$

THÉORÈME. — *Dans un tétraèdre quelconque, les distances d'un sommet, au plus, aux arêtes de la face opposée peuvent être simultanément plus grandes que ces arêtes.*

Pour construire un tétraèdre ABCD dont les hauteurs AA_1, AA_2, AA_3 des triangles des faces CDA, DAB, ABC soient plus grandes que les arêtes CD, DB, BC, étant donné la face BCD, il suffit de

prendre pour quatrième sommet un point A sur la perpendiculaire à cette face en un point A′ dont la distance A′A à A est supérieure à la plus grande des arêtes BC, CD, DB.

D'après le théorème précédent, les distances des sommets B, C, D de ce tétraèdre à deux des arêtes AB, AC, AD des faces CDA, DAB, ABC sont plus petites que les arêtes correspondantes, et le théorème est démontré.

D'après cela, si l'on a, à la fois, les inégalités

$$2aR < bc, \qquad 2b'R < a'c, \qquad 2c'R < a'b$$

équivalentes aux inégalités (8), qui reviennent aux suivantes

$$aR < R_d . AA_1, \qquad 1 < \frac{R}{R_d} < \frac{AA_1}{BC},$$

$$1 < \frac{R}{R_c} < \frac{AA_2}{DC}, \qquad 1 < \frac{R}{R_b} < \frac{AA_3}{DB},$$

et

$$AA_1 > BC, \qquad AA_2 > CD, \qquad AA_3 > DB,$$

la sphère (O, R) est intérieure à la sphère (ω'_a, ρ'_a) et celle-ci est la seule des sphères (ω'_i, ρ'_i) dans ce cas, en vertu du théorème que nous venons d'établir.

158. Si les faces ABC et DAB d'un tétraèdre isodynamique T sont des triangles isocèles et rectangles en C et D, les sphères (ω'_c, ρ'_c) et (ω'_d, ρ'_d) sont symétriques de la sphère (O, R) par rapport à C et D et les deux autres sphères (ω'_a, ρ'_a), (ω'_b, ρ'_b) sont formées du plan de l'infini et des plans tangents en A et B à la sphère (O, R).

Enfin, dans le tétraèdre isodynamique spécial T où

$$2R = \frac{bc}{a} = \frac{ca'}{b'} = \frac{ba'}{c'},$$

la *seconde* sphère de Lucas (ω'_a, ρ'_a) est formée du plan de l'infini et du plan (A) tangent au sommet A du tétraèdre T à la sphère (O, R) et les trois autres sphères sont tangentes à celle-ci en B, C, D et au plan (A).

159. D'après les formules (6) et (7), on obtient

$$\frac{R-\rho_b}{\rho_b} : \frac{R-\rho_c}{\rho_c} = \frac{R+\rho'_b}{\rho'_b} : \frac{R+\rho'_c}{\rho'_c} = \frac{b^2}{c^2},$$

$$\frac{R-\rho_c}{\rho_c} : \frac{R-\rho_a}{\rho_a} = \frac{R+\rho'_c}{\rho'_c} : \frac{R+\rho'_a}{\rho'_a} = \frac{c^2}{a^2},$$

$$\frac{R-\rho_a}{\rho_a} : \frac{R-\rho_b}{\rho_b} = \frac{R+\rho'_a}{\rho'_a} : \frac{R+\rho'_b}{\rho'_b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Par suite, si l'on désigne par A_0, B_0, C_0 les points où les droites $\omega_b\omega_c$ et $\omega'_b\omega'_c$, $\omega_c\omega_a$ et $\omega'_c\omega'_a$, $\omega_a\omega_b$ et $\omega'_a\omega'_b$ rencontrent les arêtes BC, CA, AB, on a

$$(8) \qquad \frac{A_0B}{A_0C} = \frac{b^2}{c^2}, \qquad \frac{A_0C}{A_0A} = \frac{c^2}{a^2}, \qquad \frac{A_0A}{A_0B} = \frac{a^2}{b^2},$$

et ainsi de suite pour les autres arêtes des tétraèdres $t \equiv \omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$, $t' \equiv \omega'_a\omega'_b\omega'_c\omega'_d$. Les tétraèdres T et t, T et t' se correspondent donc dans une homologie de centre O dont le plan π se confond avec celui des droites $\Delta_d \equiv (A_0, B_0, C_0)$, Δ_a, Δ_b, Δ_c (*Plan de* LEMOINE *du tétraèdre* T).

D'autre part, les points A_0, B_0, C_0 coïncident avec les centres des sphères décrites sur les cercles d'APOLLONIUS des triangles DBC, DCA, DAB relatifs aux côtés BC, CA, AB, comme grands cercles (sphères d'APOLLONIUS du tétraèdre isodynamique T).

THÉORÈME I. — *Les six sphères d'*APOLLONIUS *d'un tétraèdre isodynamique* T *passent, trois par trois, par les points* A_1, B_1, C_1, D_1 *où les symédianes* AL, BL, CL, DL *recoupent la sphère circonscrite* (O, R).

En effet, les sphères d'APOLLONIUS sont orthogonales à la sphère (O, R); leurs centres sont à l'intersection de deux arêtes du tétraèdre T et de son tétraèdre tangentiel T′ et sont situés dans un plan π qui se confond avec le plan d'homologie des tétraèdres T, T′ et le plan polaire du *second* point de LEMOINE L du tétraèdre T par rapport à la sphère (O, R) (plan de LEMOINE). Par suite, les plans ABC, π, A′B′C′ ont une droite commune Δ qui passe par les centres des sphères (A_0), (B_0), (C_0) et la droite conjuguée de Δ pour la sphère (O, R) coïncide avec la droite $DL \equiv DD_1$. Les sphères (A_0), (B_0), (C_0) passent donc par le point D_1 et les autres ternes de sphères d'APOLLONIUS respectivement par les points A_1, B_1, C_1.

THÉORÈME II. — *La sphère d'*APOLLONIUS *centrée sur une arête d'un tétraèdre isodynamique* T *est tangente aux quatre sphères de* LUCAS *qui touchent la sphère circonscrite aux extrémités de l'arête considérée, et réciproquement.*

Car, d'après les égalités (8), les points $(\omega_b, \omega_c, A_0)$, $(\omega_c, \omega_a, B_0)$, $(\omega_a, \omega_b, C_0)$ sont alignés. Dès lors, d'après le théorème I, le point D′, situé sur la symédiane DL, ayant même puissance par rapport aux sphères (O, R), (A_0), (ω_b, ρ_b), (ω_c, ρ_c), les trois dernières appartiennent à un faisceau dont le plan passe par le point D′ et est tangent à ces sphères, et réciproquement.

COROLLAIRES. — 1° *Les centres radicaux* Ω' *et* Ω'' *des quaternes de sphères* (ω_i, ρ_i) *et* (ω'_i, ρ'_i) *sont situés sur le diamètre de* BROCARD OL *du tétraèdre* T.

Car ces centres ayant mêmes puissances par rapport aux sphères d'APOLLONIUS sont situés sur leur axe radical confondu avec le diamètre de BROCARD OL perpendiculaire au plan π.

2° *Les centres des sphères* (ω, ρ) *et* (ω', ρ') *tangentes aux sphères* (ω_i, ρ_i) *et* (ω'_i, ρ'_i) *sont situés sur le diamètre de* BROCARD OL.

En effet, les sphères d'APOLLONIUS sont orthogonales aux sphères de LUCAS auxquelles elles ne sont pas tangentes; les points ω et ω' ont donc mêmes puissances par rapport aux premières, et sont situés sur la droite OL.

THÉORÈME. — *Le quaterne* $(O, L, \Omega', \Omega'')$ *est harmonique.*

En effet, le tétraèdre T étant isodynamique, la symédiane DLD' passe par le point de LEMOINE K du triangle ABC et les sphères (O, R), $(D', D'A)$, (A_0) sont deux à deux orthogonales. Le plan polaire du point K pour la sphère (A_0) est perpendiculaire à la droite A_0K, donc normal au plan ABC, et il contient la droite OD'. Par suite, le plan polaire du point D', par rapport à la sphère (A_0), passe par le point K et comme ce point est dans le plan $(O, D, \Omega', \Omega'')$, les points de contact A_3, A'_3 de la sphère (A_0) avec les droites $D'\Omega'$, $D'\Omega''$ sont alignés sur les points O et K. La division (O, K, A_3, A'_3) et par suite le quaterne $(O, L, \Omega', \Omega'')$, sont donc harmoniques.

N. B. — Les points Ω', Ω'' partagent le segment OL dans les rapports

$$\frac{\overline{\Omega'O}}{\overline{\Omega'L}} = \frac{\overline{\Omega''O}}{\overline{\Omega''L}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{cotg}\theta,$$

θ étant l'angle de BROCARD du tétraèdre T.

Les sphères (Ω'), (Ω'') orthogonales aux *premières* et *secondes* sphères de LUCAS ont pour rayons

$$(9) \qquad \sigma = \frac{2R}{\operatorname{cotg}\theta + 2\sqrt{3}}, \qquad \sigma' = \frac{2R}{\operatorname{cotg}\theta - 2\sqrt{3}}. \qquad (10)$$

Ces formules proviennent de considérations plus générales que nous rencontrerons plus loin.

160. TÉTRAÈDRES ISODYNAMIQUES SPÉCIAUX. — 1° Si le centre radical Ω'' des sphères (ω'_i, ρ'_i) est à l'infini sur le diamètre OL, les centres de ces quatre sphères sont situés dans le plan π de LEMOINE du tétraèdre T; le centre radical Ω' des sphères (ω_i, ρ_i) coïncide avec le milieu du segment OL et ces sphères coupent orthogonalement la sphère décrite sur OL comme diamètre.

Ces propriétés découlent aussi des formules (9), (10) et il y a analogie complète entre ce tétraèdre particulier dans lequel $\operatorname{cotg}\theta = 2\sqrt{3}$

et le triangle spécial dont la cotangente de l'angle de BROCARD est égale à 2.

2° Lorsque la sphère (ω', ρ') tangente aux quatre sphères (ω'_i, ρ'_i) dégénère en un plan, celui-ci se confond avec le plan π de LEMOINE de ce tétraèdre spécial comme il est démontré plus loin.

3° Le tétraèdre isodynamique déjà considéré (147) possède d'autres propriétés provenant de la considération des sphères d'APOLLONIUS (A_0), (B_0), (C_0), (D_0).

En vertu du théorème I, (158), l'inversion i de centre L et de module $LA.LA_1$ transforme le plan $(A) \equiv (\omega'_a, \rho'$ en une sphère ω qui passe par le point L et est tangente intérieurement aux sphères (O, R), (B_0), (C_0), (D_0); de plus, cette sphère ω est tangente en A_1 à la sphère (O, R).

Réciproquement, si la sphère ω existe, l'inversion i la transforme en le plan (A) tangent en A à la sphère (O, R), et ce plan qui est en outre tangent aux sphères d'APOLLONIUS $(B)_0$, (C_0), (D_0), se confond avec la sphère dégénérée de LUCAS (ω'_a, ρ'_a), en raison du théorème II (158). D'où cette proposition : *Dans le tétraèdre isodynamique spécial où les égalités*

$$2R = \frac{bc}{a} = \frac{ca'}{b} = \frac{ba'}{c},$$

*ont lieu, la sphère tangente à la sphère circonscrite et aux sphères d'*APOLLONIUS (B_0), (C_0), (D_0), *passe par le* second *point de* LEMOINE, *et réciproquement*, qui étend à ce tétraèdre celle concernant un triangle dans lequel un côté est égal à la hauteur correspondante [1].

161. GÉNÉRALISATION. — THÉORÈME. — *Si un polygone gauche d'un nombre pair de côtés, inscrit à une sphère, est tel que le produit des côtés de rang pair est égal à celui des côtés de rang impair, on peut inscrire et circonscrire une couronne de sphères tangentes, consécutives et tangentes à la sphère aux sommets du polygone, quelle que soit la première sphère.*

Soient $(P) \equiv A_1A_2 \ldots A_{2n}$ le polygone gauche donné, inscrit à une sphère (O, R), pour lequel on a, par hypothèse,

$$(11) \qquad A_2A_3.A_4A_5 \ldots A_{2n}A_1 = A_1A_2.A_3A_4 \ldots A_{2n-1}A_{2n};$$

(O_1, R_1) la sphère tangente en A_1 à la sphère (O, R). On construit de proche en proche les sphères $(O_2, R_2), \ldots, (O_{2n}, R_{2n})$, de manière

[1] V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1937, 423.

que chacune d'elles soit tangente à la précédente et à la sphère (O, R) au sommet correspondant de (P).

Il est évident que les sphères (O_1), (O_2), ..., (O_n) sont toutes intérieures ou extérieures à la sphère (O, R).

D'autre part, il est clair que les points de contact A_k et A_{k+1} $(1 \leqslant k \leqslant 2n-1)$, sont l'un des points de contact d'un des cercles tritangents du triangle OO_kO_{k+1}. Par suite, R_k, R_{k+1} et O désignant les rayons des sphères (O_k), (O_{k+1}) et l'angle au sommet du triangle isocèle OO_kO_{k+1},

$$\sin^2 O = \frac{R_kR_{k+1}}{(R \pm R_k)(R \pm R_{k+1})},$$

suivant que les sphères (O_k), (O_{k+1}) sont intérieures ou extérieures à la sphère (O, R). Donc,

$$\overline{A_kA_{k+1}}^2 = 4R^2 . \frac{R_kR_{k+1}}{(R \pm R_k)(R \pm R_{k+1})}, \tag{12}$$

et, d'après l'égalité (11),

$$\overline{A_1A_{2n}}^2 = 4R^2 . \frac{R_1R_{2n}}{(R \pm R_1)(R \pm R_{2n})}; \quad \sin^2 \frac{A_1OA_{2n}}{2} = \frac{R_1R_{2n}}{(R \pm R_1)(R \pm R_{2n})}.$$

La supposition que le cercle tritangent considéré du triangle O_1OO_{2n} touche OO_1, OO_{2n} en M_1, M_{2n} conduirait à l'égalité

$$OA_1 . OA_{2n} = R_1 . R_{2n} = OM_1 . OM_{2n},$$

ce qui est impossible et $M_1 \equiv A_1$, $M_{2n} \equiv A_{2n}$; les sphères (O_1) et (O_{2n}) sont donc tangentes. Réciproquement, si les sphères (O_1), (O_2), ..., (O_{2n}) sont tangentes, leurs points de contact A_1, A_2, ..., A_{2n} avec la sphère (O, R) sont les sommets d'un polygone (P), en vertu des égalités de la forme (12).

Corollaire. — *Les sphères* (O_k) *de la couronne extérieure sont les transformées de celles de la couronne intérieure par l'inversion* (O, R^2).

Cas particulier : $n = 2$. — On retrouve les sphères de Lucas associées à un tétraèdre *isodynamique*.

162. Toutes les propriétés contenues dans les paragraphes 153 à 161 s'étendent à des sphères (ω_i, ρ_i) et (ω'_i, ρ'_i), (O_k) et (O'_k) qui, au lieu d'être tangentes, se coupent sous un même angle φ.

SPHÈRES GÉNÉRALISÉES DE LUCAS

163. Théorème fondamental. — Il s'agit du théorème suivant : *Étant donné un tétraèdre* ABCD, *inscrit à une sphère* (O) *et un plan* ϖ *qui coupe les faces* BCD, CDA, DAB, ABC *du tétraèdre* ABCD *suivant les droites* Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d, *si l'on prend sur* OA, OB, OC, OD *des points variables* ω_a, ω_b, ω_c, ω_d *tels que les plans* $\omega_b\omega_c\omega_d$, $\omega_c\omega_d\omega_a$, $\omega_d\omega_a\omega_b$, $\omega_a\omega_b\omega_c$ *passent par* Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d, *le lieu du centre radical des sphères* (ω_a), (ω_b) (ω_c), (ω_d) *de centres* ω_a, ω_b, ω_c, ω_d, *tangentes à la sphère* (O), *est la perpendiculaire menée par* O *au plan* ϖ.

Soient A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1 les intersections du plan ϖ et des arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC du tétraèdre ABCD, Δ la perpendiculaire menée par O au plan ϖ.

Les sphères, réelles ou imaginaires, (A_1), (B_1), (C_1), (A'_1), (B'_1), (C'_1) de centres A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1 orthogonales à la sphère (O) ont pour axe radical commun la droite Δ.

Une inversion de pôle A_1, dont le module est égal au carré du rayon de la sphère (A_1), transforme la sphère (O) en elle-même, les sphères (ω_b) et (ω_c) en les sphères (ω_c) et (ω_b). Par suite, les sphères (ω_b), (ω_c), (A_1) appartiennent à un même faisceau.

Ce raisonnement, étendu aux autres sphères, montre que le centre radical P des sphères (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d) a même puissance par rapport aux sphères (A_1), (B_1), (C_1), (A'_1), (B'_1), (C'_1), donc qu'il se trouve sur la droite Δ.

Observons que les sommets A', B', C', D' du tétraèdre tangentiel du tétraèdre ABCD ont mêmes puissances par rapport aux sphères (ω_b), (ω_c) et (ω_d), (ω_c), (ω_d) et (ω_a), (ω_d), (ω_a) et (ω_b), (ω_a), (ω_b) et (ω_c) et que les droites PA', PB', PC', PD', qui sont les axes radicaux des groupes de sphères précédents, sont perpendiculaires aux faces du tétraèdre $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$.

Cette remarque permet de voir que, lorsque les points ω_a, ω_b, ω_c, ω_d varient, P décrit la droite Δ en entier.

De ce théorème, il résulte qu'à tout point P de Δ, il correspond des sphères (ω_a), (ω_b), (ω_c), (ω_d) qui admettent ce point pour centre radical.

Nous nous proposons d'étudier ces sphères dans le cas ou ϖ est le plan polaire du second point de Lemoine L du tétraèdre ABCD par rapport à ce tétraèdre, plan qui est aussi, on le sait, le plan polaire de L par rapport à (O), (**119**).

164. Calcul des rayons des sphères (ω_i). — Conservons les notations précédentes et désignons par BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$,

$DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$ les arêtes du tétraèdre ABCD, par R le rayon de sa sphère circonscrite, par V son volume, par θ son angle de BROCARD, par l, m, n et λ_a, λ_b, λ_c les quantités aa', bb', cc' et $m^2 + n^2 - l^2$, $n^2 + l^2 - m^2$, $l^2 + m^2 - n^2$.

Posons

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{PL}} = k \operatorname{cotg} \theta = \frac{k\Sigma ab'c'}{12V},$$

$$(1) \qquad \overline{PO}\,.\,12V - \overline{PL}k\Sigma ab'c' = 0.$$

Les points O et L étant les barycentres des points A, B, C, D affectés des coefficients

$$X = a^2\lambda_a + b'^2\lambda_b + c'^2\lambda_c - 2a^2b'^2c'^2,$$

$Y = \ldots$, $Z = \ldots$, $T = \ldots$ et des coefficients $ab'c'$, ...

on a, en tenant compte de la relation

$$\Sigma X = 288V^2, \qquad \overrightarrow{PO} = \frac{\Sigma\overrightarrow{PA}\,.\,X}{288V^2}, \qquad \overrightarrow{PL} = \frac{\Sigma\overrightarrow{PA}ab'c'}{\Sigma ab'c'}.$$

En portant ces valeurs de $\overrightarrow{PO}$ et $\overrightarrow{PL}$ dans (1), il vient

$$\Sigma\overrightarrow{PA}(X - 24Vkab'c') = 0.$$

Cette relation prouve que P est le barycentre des points A, B, C, D affectés des coefficients

$$\alpha = X - 24\ kab'c', \qquad \beta = Y - 24\ ka'bc',$$
$$\gamma = Z - 24\ ka'b'c, \qquad \delta = T - 24\ kabc.$$

Convenons de compter positivement le rayon des sphères (ω_i) quand ces sphères sont du même côté que (O) par rapport aux plans tangents à O en A, B, C, D, négativement dans le cas contraire.

Si nous choisissons comme sens positifs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ sur les rayons issus de O et si nous posons $\overline{\omega_a A} = x$, $\overline{\omega_b B} = y$, $\overline{\omega_c C} = z$, $\overline{\omega_d D} = t$, x, y, z, t représenteront les valeurs algébriques des rayons des sphères (ω_i).

On a alors, en grandeur et en signe,

$$\frac{\overline{\omega_a O}}{\overline{\omega_a A}} = \frac{x - R}{x}, \qquad \frac{\overline{\omega_b O}}{\overline{\omega_b B}} = \ldots,$$

Le point ω_b est donc le barycentre des points O et B affectés des coefficients y et $-(y-R)$ et, par suite,

$$\overline{P\omega_b}^2 . R^2 = [\overline{PO}^2 y - \overline{PB}^2(y-R)]R + R^2 y(y-R),$$
$$(\overline{P\omega_b}^2 - y^2)R = \overline{PO}^2 y - \overline{PB}^2(y-R) - R^2 y.$$

De même,

$$(\overline{P\omega_c}^2 - z^2)R = \overline{PO}^2 z - \overline{PC}^2(z-R) - R^2 z.$$

Comme P est le centre radical des sphères (ω_i), on a

$$y[\overline{PB}^2 - (\overline{PO}^2 - R^2)] - z[\overline{PC}^2 - (\overline{PO}^2 - R^2)] = R(\overline{PB}^2 - \overline{PC}^2).$$

Or,

$$\overline{PB}^2 - (\overline{PO}^2 - R^2) = \frac{a^2\gamma + b'^2\delta + c^2\alpha}{\Sigma\alpha}$$
$$\overline{PC}^2 - (\overline{PO}^2 - R^2) = \frac{a^2\beta + b^2\alpha + c'^2\delta}{\Sigma\alpha}$$
$$\overline{PB}^2 - \overline{PC}^2 = \frac{a^2(\gamma-\beta) + \alpha(c^2-b^2) + \delta(b'^2-c'^2)}{\Sigma\alpha}.$$

Il s'ensuit que

$$y(a^2\gamma + b'^2\delta + c^2\alpha) - z(a^2\beta + b^2\alpha + c'^2\delta)$$
$$= R[a^2(\gamma-\beta) + \alpha(c^2-b^2) + \delta(b'^2-c'^2)]$$

ou, en remplaçant α, β, γ, δ par leur valeur et en utilisant la relation $2\Sigma m^2n^2 - \Sigma l^4 = 576R^2V^2$,

$$(2) \quad y[24R^2V - k(l+m+n)ab'c] - z[24R^2V - k(l+m+n)abc']$$
$$= Rk(l+m+n)a(bc'-b'c).$$

D'autre part,

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{\omega_b O}}{\overline{\omega_b B}} \cdot \frac{\overline{\omega_c C}}{\overline{\omega_c O}} = 1$$

et, comme

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{b'c}{bc'}, \qquad \frac{\overline{\omega_b O}}{\overline{\omega_b B}} = \frac{y-R}{y}, \qquad \frac{\overline{\omega_c C}}{\overline{\omega_c O}} = \frac{z}{z-R},$$

on a

$$(3) \qquad b'c(y-R)z = bc'(z-R)y.$$

En transportant la valeur de z tirée de la relation (2) dans la

relation (3), il vient successivement,

$$y^2[24R^2V - k(l+m+n)ab'c] - 2yR[12R^2V - k(l+m+n)ab'c] - R^2k(l+m+n)ab'c = 0,$$

$$y = \frac{Rk(l+m+n)ab'c}{k(l+m+n)ab'c - 24R^2V} = \frac{Rk(l+m+n)lmn}{k(l+m+n)lmn - 24R^2Va'bc'},$$

après avoir éliminé la solution évidente $y = R$.

Les valeurs de x, z, t se déduisent symétriquement de celle de y.

Lorsque $k = \pm\infty$, le point P est en L, $x = y = z = t = R$, les sphères (ω_i) se confondent avec la sphère (O) et la remarque du 1° permet d'énoncer ce théorème :

Étant donné un tétraèdre T *dont* (O) *est la sphère circonscrite,* L *le second point de* LEMOINE, Δ_i *les intersections du plan polaire de* L *par rapport à* T *avec les faces de* T, T′ *le tétraèdre tangentiel, les perpendiculaires menées par les sommets de* T′ *aux plans* (O, Δ_i) *concourent en* L.

164′. RELATIONS ENTRE LES RAYONS DES SPHÈRES (ω_i) ET ENTRE DEUX SYSTÈMES DE SPHÈRES (ω_i) CORRESPONDANT A DES VALEURS OPPOSÉES DE k.

a) On a d'abord $\Sigma \frac{1}{x} = \frac{4[k(l+m+n)lmn - 72R^2V^2 \operatorname{cotg}\theta]}{Rk(l+m+n)lmn}$.

b) Changeons k en $-k$, ce qui revient à considérer le point P′, conjugué harmonique de P par rapport à OL et désignons par (ω'_i) les sphères correspondantes, par x' le rayon de la sphère (ω'_a).

On a

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{R}, \qquad \frac{1}{\overline{A\omega_a}} + \frac{1}{\overline{A\omega'_a}} = \frac{2}{\overline{AO}};$$

d'où il résulte que les points O, A, ω_a, ω'_a constituent une division harmonique.

Le point A étant un centre de similitude des sphères (ω_a) et (ω'_a), le point O est l'autre centre de similitude et les sphères (ω_a) et (ω'_a) se correspondent dans l'inversion de pôle O, de module R^2.

Conclusions analogues pour les autres sphères (ω_i) et (ω'_i).

165. CALCUL DES ANGLES DES SPHÈRES (ω_i) ASSOCIÉES DEUX A DEUX. — Nous allons déterminer l'angle θ_a des sphères (ω_b) et (ω_c).

Le plan OBC coupant les sphères (O), (ω_b), (ω_c) suivant des grands cercles auxquels nous donnons le même nom que les sphères correspondantes, nous supposons le cercle (O) orienté dans un sens quelconque. L'orientation du cercle (O) détermine celle des tangentes

en θ et C à (O) et, à son tour, l'orientation de ces droites détermine celle des cercles (ω_b) et (ω_c). Nous appelons angle θ_a des sphères (ω_b) et (ω_c) l'angle des tangentes orientées des cercles (ω_b) et (ω_c) en l'un de leurs points d'intersection.

Avec cette convention et celle du 2°, nous avons, dans tous les cas, en grandeur et en signe,

$$\overline{\omega_b\omega_c}^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\theta_a.$$

D'autre part, en grandeur et en signe également,

$$\begin{aligned}\overline{\omega_b\omega_c}^2 &= \overline{O\omega_b}^2 + \overline{O\omega_c}^2 - 2\,\overline{O\omega_b}\,.\,\overline{O\omega_c}\cos(OB, OC)\\ &= y^2 + z^2 - 2yz + \frac{(R-y)(R-z)a^2}{R^2}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\cos\theta_a &= 1 - \frac{(R-y)(R-z)a^2}{2R^2yz}\\ &= 1 - \frac{288R^2V^2}{k^2(l+m+n)^2mn}.\end{aligned}$$

De là, on déduit immédiatement que, si θ'_a désigne l'angle des sphères (ω_d) et (ω_a), $\cos\theta'_a = \cos\theta_a$. D'où cette proposition :

Les sphères (ω_i) correspondant à des couples d'arêtes opposées, lorsqu'elles sont sécantes, se coupent sous des angles égaux.

Pour que les sphères (ω_b) et (ω_c), (ω_d) et (ω_a) soient *sécantes*, il faut et il suffit que

$$k < -\frac{12RV}{(l+m+n)\sqrt{mn}} \quad \text{ou} \quad k > \frac{12RV}{(l+m+n)\sqrt{mn}}.$$

Elles sont *tangentes* lorsque $k = \pm\dfrac{12RV}{(l+m+n)\sqrt{mn}}$.

Pour que les sphères (ω_i) se coupent deux à deux sous des angles égaux, il faut et il suffit que $l = m = n$ c'est-à-dire que le tétraèdre ABCD soit *isodynamique*.

Dans ce cas, comme $3l^4 = 576R^2V^2$, $\cos\theta_a = 1 - \dfrac{1}{6k^2}$

Pour que les sphères (ω_i) soient *sécantes*, il faut et il suffit que $k < -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ou $k > \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Lorsque $k = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, les sphères (ω_i) sont *tangentes*. Enfin, elles sont *orthogonales* lorsque $k = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

166. Calcul de la puissance P_ϖ de P par rapport aux sphères (ω_i). — Quand le plan ϖ est le plan polaire de L par rapport au

tétraèdre ABCD, les sphères (A_1), (B_1), (C_1), (A'_1), (B'_1), (C'_1) se coupent sur OL aux centres isodynamiques V et W du tétraèdre ABCD. En conséquence,

$$P_\omega = \overline{PV}.\overline{PW} = \overline{PO}^2 + \overline{PO}(\overline{OV} + \overline{OW}) + \overline{OV}.\overline{OW}.$$

Or, de $\dfrac{\overline{PO}}{\overline{PL}} = k \operatorname{cotg} \theta$, on tire $\overline{PO} = \dfrac{\overline{OL}.\, k \operatorname{cotg} \theta}{1 - k \operatorname{cotg} \theta}$.

De plus, $\overline{OV} + \overline{OW} = \dfrac{2R^2}{\overline{OL}}$, $\overline{OV}.\overline{OW} = R^2$,

$$\overline{OL}^2 = \frac{72R^2V^2 \operatorname{cotg}^2 \theta - (l + m + n)lmn}{72V^2 \operatorname{cotg}^2 \theta}.$$

Donc.

$$P_\omega = \frac{72R^2V^2 - k^2(l + m + n)lmn}{72V^2(1 - k \operatorname{cotg} \theta)^2}.$$

Quand $P_\omega > 0$, soit $-\dfrac{6\sqrt{2}RV}{\sqrt{(l + m + n)lmn}} < k < \dfrac{6\sqrt{2}RV}{\sqrt{(l + m + n)lmn}}$, il existe une sphère de centre P orthogonale aux sphères (ω_i).

Lorsque $k = \pm \dfrac{6\sqrt{2}RV}{\sqrt{(l + m + n)lmn}}$, les sphères (ω_i) concourent en l'un des centres isodynamiques du tétraèdre ABCD et, en rappelant que les sphères (ω_i) correspondant à des couples d'arêtes opposées se coupent sous des angles égaux, on peut énoncer ce théorème :

Étant donné un tétraèdre T *dont* (O) *est la sphère circonscrite,* L *le second point de* LEMOINE, ϖ *le plan polaire de* L *par rapport à* T, V *un centre isodynamique,* T′ *le tétraèdre tangentiel, si l'on considère le tétraèdre* T_1, *homologique du tétraèdre* T *dans l'homologie de centre* O, *de plan* ϖ, *dont les faces sont perpendiculaires aux droites qui joignent le point* V *aux sommets du tétraèdre* T′, *le point* V *est un centre isogone du tétraèdre* T_1.

166′. DÉTERMINATION DE LA SECONDE SPHÈRE TANGENTE AUX SPHÈRES (ω_i). — Soient O′ le centre de cette sphère, R′ la valeur algébrique de son rayon.

Dans l'inversion de pôle P, de module P_ω, la sphère (O) se transforme en la sphère (O′). On en déduit que O′ est sur OL et que

$$\frac{\overline{PO'}}{\overline{PO}} = \frac{R'}{R} = \frac{P_\omega}{\overline{PO}^2 - R^2}.$$

Comme

$$\overline{PO}^2 - R^2 = -\frac{k^2(l+m+n)lmn - 144kR^2V^2\cot g\,\theta + 72R^2V^2}{72V^2(1-k\cot g\,\theta)^2}$$

on a

$$R' = \frac{[k^2(l+m+n)lmn - 72R^2V^2]R}{k^2(l+m+n)lmn - 144kR^2V^2\cot g\,\theta + 72R^2V^2}.$$

Pour que la sphère (O″) devienne un plan, il faut et il suffit que

$$k^2(l+m+n)lmn - 144kR^2V^2\cot g\,\theta + 72R^2V^2 = 0.$$

Partant de là, on pourrait déterminer ce plan.

Il est plus simple et plus rapide de remarquer que, pour que la sphère (O′) soit un plan, il faut et il suffit que P soit l'une des extrémités P_1 ou P_2 du diamètre OL de la sphère (O). Or, la sphère (O) et la sphère (L′) de diamètre VW sont orthogonales. Par suite, dans l'inversion de pôle P_1 ou P_2, de module $\overline{P_1V}.\overline{P_1W}$ ou $\overline{P_2V}.\overline{P_2W}$, les sphères (ω_i) et la sphère (L′) se transforment en elles-mêmes, la sphère (O) se transforme en un plan tangent aux sphères (ω_i), perpendiculaire à OL et qui coupe orthogonalement la sphère (L′) c'est-à-dire qui passe par le milieu L′ de VW. *Ce plan n'est autre que le plan polaire de* L *par rapport au tétraèdre* ABCD.

SPHÈRES DE HAGGE
d'un polygone gauche de *n* sommets cosphériques.

167. Définition. — Considérons un polygone gauche (P) de n sommets $A_1A_2 \ldots A_n$ inscrit à une sphère (O, R) et un point quelconque M.

Désignons par A_i'' le point transformé de la seconde intersection A_i', $(i = 1, 2, \ldots, n)$, de la sphère (O, R) et de la droite qui joint le point M à un sommet A_i dans l'homothétie qui a pour centre le point G_i, barycentre du polygone déterminé par les sommets autres que A_i, pour rapport $-1 : (n-2)$.

Observons d'abord que le barycentre G du polygone (P) se trouve sur A_iG_i et qu'il est tel que

$$\frac{GA_i}{GG_i} = -(n-1).$$

Si α_i désigne l'intersection de A_iA_i' et de GA_i'', le théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle $A_i'A_i''G_i$ et à la transversale α_iGA_i''

donne

$$\frac{\alpha_i A_i}{\alpha_i A'_i} = \frac{GA_i}{GG_i} \cdot \frac{A''_i G_i}{A''_i A'_i} = -1.$$

Le point α_i est donc le milieu de $A_i A'_i$ et l'on en déduit que les points α_i se trouvent sur la sphère (ω) décrite sur OM comme diamètre.

D'autre part, le théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle $A'_i A''_i \alpha_i$ et à la transversale $A_i G G_i$, donne

$$\frac{GA''_i}{G\alpha_i} = \frac{A_i A'_i}{A_i \alpha_i} \cdot \frac{G_i A''_i}{G_i A'_i} = -\frac{2}{n-2}.$$

Les points A''_i se trouvent donc sur la sphère (ω') transformée de la sphère (ω) dans l'homothétie $[G, -2 : (n-2)]$.

Soit Ω le point de la droite OG où concourent les plans menés du barycentre de $n-2$ quelconques des sommets du polygone (P) sur la droite qui passe par les deux sommets restants (point de Kantor).

Comme

$$\frac{G\Omega}{GO} = -\frac{2}{n-2},$$

le point Ω appartient aussi à la sphère (ω') et cette sphère a pour diamètre le segment qui joint le point Ω à l'homothétique du point M dans l'homothétie $[G, -2 : (n-2)]$. On aboutit donc à ce théorème :

Étant donné un polygone gauche de n *sommets* $A_1 A_2 \ldots A_n$, *de barycentre* G, *inscrit à une sphère* (O, R) *et un point* M, *les points transformés des secondes intersections de la sphère* (O, R) *et des droites qui joignent le point* M *aux sommets* A_i *dans les homothéties qui ont pour centres les barycentres des polygones déterminés par les sommets autres que* A_i, *pour rapport* $-1 : (n-2)$, *se trouvent sur la sphère qui a pour diamètre le segment qui joint le point de* Kantor *à l'homothétique du point* M *dans l'homothétie* $[G, -2 : (n-2)]$. C'est cette sphère que nous appelons sphère de Hagge du point M par rapport au polygone (P).

Réciproquement, considérons une sphère quelconque (ω') qui passe par le point Ω et désignons par M l'homothétique du point diamétralement opposé à Ω sur (ω') dans l'homothétie $[G, -(n-2) : 2]$. Comme

$$\frac{GO}{G\Omega} = -\frac{n-2}{2},$$

la sphère (ω) décrite sur OM comme diamètre est la transformée de la sphère (ω') dans cette homothétie. D'autre part, la droite A_iM coupe la sphère (O, R) en un point A'_i, la sphère (ω) en un point α'_i et, puisque $O\alpha_i$ est perpendiculaire à la corde $A_iA'_i$ de la sphère (O, R), α'_i est le milieu de $A_iA'_i$. Le théorème de MÉNÉLAÜS montre que la droite α_iG coupe la droite A'_iG_i en un point A''_i tel que

$$\frac{G_iA''_i}{G_iA'_i} = -\frac{1}{n-2}$$

et que, de plus, on a la relation

$$\frac{GA''_i}{G\alpha_i} = -\frac{2}{n-2}.$$

En définitive, les points A''_i appartiennent à la sphère (ω') et on peut énoncer ce théorème :

Étant donné un polygone gauche de n *sommets* $A_1A_2 \ldots A_n$, *de barycentre* G, *inscrit à une sphère, toute sphère passant par le point de* KANTOR Ω *est la sphère de* HAGGE *d'un point* M *qui se confond avec l'homothétique du point diamétralement opposé à* Ω *sur cette sphère dans l'homothétie* [G, — (n — 2) : 2].

168. COROLLAIRES. — 1° Quand les points M et O coïncident, la sphère (ω) se réduit au point O et la sphère (ω') au point Ω.

Par suite :

Dans un polygone gauche inscrit à une sphère, les droites qui joignent les points diamétralement opposés aux sommets aux barycentres des polygones déterminés par les autres sommets concourent au point de KANTOR.

2° Quand les points M et G sont confondus, la sphère (ω') a pour diamètre $G\Omega$. Par analogie avec le tétraèdre, on peut appeler *sphère orthocentroïdale* cette sphère décrite sur le segment $G\Omega$ comme diamètre.

3° Quand les droites $A_iA'_i$ sont parallèles à une direction quelconque Δ, leurs milieux α'_i, se trouvent dans le plan mené par le point O perpendiculairement à Δ et les points A''_i dans le plan mené par le point Ω perpendiculairement à Δ. D'où ce théorème :

Étant donné un polygone gauche de n *sommets* $A_1A_2 \ldots A_n$ *inscrit à une sphère* (O, R) *et une droite* Δ, *les points transformés des secondes intersections de la sphère* (O, R) *et des parallèles à la droite* Δ *menées par les sommets* A_i *dans les homothéties qui ont pour centres les barycentres des polygones déterminés par les sommets autres que* A_i, *pour*

rapport $-1:(n-2)$, *se trouvent dans le plan perpendiculaire à la droite* Δ *qui passe par le point de* KANTOR.

169. AUTRES PROPRIÉTÉS. — 1° On peut remarquer que les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ appartiennent respectivement aux sphères $(\omega_1), (\omega_2), \ldots, (\omega_n)$ transformées de la sphère (O, R) dans les homothéties de centres $G_1, G_2, \ldots, G_n$, de rapport $-1:(n-2)$. Ces n sphères sont égales entre elles et ont pour rayon $\frac{R}{n-2}$.

Soit S le point où la droite $A_i\omega_i$ coupe la droite $O\Omega$. On a

$$\frac{SO}{SG} = \frac{\omega_i O}{\omega_i G_i} \cdot \frac{A_i G_i}{A_i G} = n.$$

Comme $\frac{G_i A_i}{G_i G} = n$, les segments SG_i et OA_i sont parallèles et

$$\frac{S\omega_i}{SA_i} = \frac{G_i\omega_i}{G_i O} = -\frac{1}{n-2}.$$

Observons, en passant, que le point S est le centre d'une sphère qui passe par les points G_i et qui est homothétique de la sphère (O, R) dans l'homothétie $[G, -1:(n-1)]$. (Cette sphère correspond, dans le polygone gauche, à la sphère des douze points d'un tétraèdre; elle passe d'ailleurs par les points N_i qui partagent les segments ΩA_i dans le rapport $-1:(n-2)$ et les segments $G_i N_i$ sont des diamètres), (87) (sphère des $3n$ points).

D'autre part, de $\frac{SO}{SG} = n$, on tire $\frac{OS}{OG} = \frac{n}{n-1}$ et, puisque

$$\frac{O\Omega}{GO} = \frac{n}{n-2}, \qquad \frac{OS}{O\Omega} = \frac{n-2}{n-1}.$$

En remarquant que $\frac{OG_i}{O\omega_i} = \frac{n-2}{n-1}$, on voit que les segments SG_i et $\Omega\omega_i$ sont parallèles, donc aussi les segments $\Omega\omega_i$ et OA_i, et

$$\frac{\Omega\omega_i}{OA_i} = \frac{S\omega_i}{SA_i} = -\frac{1}{n-2}.$$

En grandeur, $\Omega\omega_i = \frac{R}{n-2}$, ce qui prouve que les sphères (ω_i) passent par le point Ω.

Ces propriétés sont mises en évidence de la manière suivante :

Étant donné un polygone gauche de n *sommets* $A_1A_2 \ldots A_n$, *inscrit à une sphère* (O, R), *les* n *sphères* (ω_i) *transformées de la sphère* (O, R) *dans les homothéties qui ont pour centres les barycentres* G_i *de* n — 1

sommets, pour rapport $-1:(n-2)$, *concourent au point de* KANTOR *et leurs centres* ω_i *sont homothétiques des sommets* A_i *dans l'homothétie qui a pour centre le centre de la sphère des barycentres* G_i, *pour rapport* $-1:(n-2)$.

Ces sphères sont, pour le polygone gauche inscrit à une sphère, les analogues des cercles HBC, HCA, HAB d'un triangle ABC, d'orthocentre H, dont les centres sont symétriques des sommets A, B, C par rapport au centre du cercle des neuf points.

2° Soient π un plan quelconque, O′ et M′ les projections orthogonales des points O et M sur ce plan, O″ l'homothétique du point O′ dans l'homothétie $[G, -2:(n-2)]$. La droite $O''\Omega$ est perpendiculaire au plan π. Si l'on prend sur $O''\Omega$ un point L tel que le segment O″L soit équipollent à $2MM':(n-2)$, *le point* L *appartient à la sphère* (ω').

En effet, si K désigne la projection orthogonale du point M sur la droite OO′ le point K est situé sur la sphère (ω) et, de plus, comme KO′ est équipollent à MM′.

$$\frac{LO''}{KO'} = -\frac{2}{n-2} = \frac{GO''}{GO'}.$$

Le point L est donc l'homothétique du point K dans l'homothétie $[G, -2:(n-2)]$ et il se trouve sur la sphère (ω').

SPHÈRES DE HAGGE D'UN TÉTRAÈDRE

170. Nous appellerons sphère de HAGGE d'un point M, par rapport à un tétraèdre $T \equiv ABCD$, la sphère (ω) circonscrite au tétraèdre $T_2 \equiv A_2B_2C_2D_2$ dont les sommets sont les transformés des points A_1, B_1, C_1, D_1 où les droites AM, BM, CM, DM recoupent la sphère (O, R) circonscrite au tétraèdre T, par les homothéties $\left(G_i, -\frac{1}{2}\right)$, $(i = a, b, c, d)$.

Cette sphère (ω) qui correspond au cas particulier où $n = 4$, possède toutes les propriétés de la sphère de HAGGE d'un polygone gauche (P) de n sommets cosphériques. Nous en signalons quelques-unes.

THÉORÈME. — *Le tétraèdre* T_2 *est symétrique du tétraèdre*

$$T_3 \equiv A_3B_3C_3D_3$$

dont les sommets A_3, B_3, D_3, C_3 *coïncident avec les milieux des cordes* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, *par rapport au centre de gravité* G *du tétraèdre* T.

En effet, d'après le théorème de MÉNÉLAÜS appliqué d'abord au triangle AA_1G_a coupé par la transversale A_2A_3, puis au triangle $A_1A_2A_3$ coupé par la transversale AG_a, les droites A_2A_3 et AG_a passent respectivement par le point G et par le milieu de A_2A_3.

THÉORÈME. — *La sphère* (ω) *circonscrite au tétraèdre* T_2 *passe par le point de* MONGE Ω *du tétraèdre* T *et son diamètre est égal à* OP.

Car le centre de la sphère (ω) coïncide avec le symétrique du milieu ω' du segment OM, par rapport au point G, et

$$\omega\Omega = O\omega' = \frac{OP}{2}.$$

COROLLAIRES. — 1° *Dans un tétraèdre* T, *les droites qui joignent les points diamétralement opposés aux sommets sur la sphère circonscrite aux centres de gravité des faces opposées concourent au point de* MONGE.

2° *Quand le point* M *coïncide avec le centre de gravité* G, *la sphère* (ω) *circonscrite au tétraèdre* T_2 *se confond avec celle qui est décrite sur le segment* $G\Omega$ *comme diamètre* (sphère *orthocentroïdale*).

3° *Si les droites* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *sont parallèles à une direction donnée* Δ, *les sommets du tétraèdre* T_2 *sont dans un plan perpendiculaire à* Δ *passant par le point* Ω *de* MONGE *du tétraèdre* T.

THÉORÈME. — *Les sommets* A_2, B_2, C_2, D_2 *du tétraèdre* T_2 *sont situés respectivement sur les sphères* (ω_i) *transformées de la sphère* (O, R) *circonscrite au tétraèdre* T *par les homothéties* $\left(G_i, -\frac{1}{2}\right)$. *Ces quatre sphères, égales entre elles, passent par le cercle des neuf points de la face correspondante et concourent au point de* MONGE *du tétraèdre fondamental.*

Le point A_2, par exemple, est sur la sphère $\left(\omega_a, \frac{R}{2}\right)$ transformée de la sphère (O, R) par l'homothétie $\left(G_a, -\frac{1}{2}\right)$. Les pieds des médianes du triangle BCD sont sur cette sphère (ω_a) qui passe par le cercle des neuf points de ce triangle.

D'autre part, le point de MONGE Ω est le transformé du point O par l'homothétie $\left(O', -\frac{1}{2}\right)$ dont le pôle coïncide avec le centre O de la sphère des douze points du tétraèdre T. Dès lors,

$$\omega_a\Omega = \frac{3}{2}\, O'G_a = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{3} = \frac{R}{2}.$$

La sphère (ω_a) et par suite les sphères (ω_b), (ω_c), (ω_d) passent donc par le point Ω.

N. B. — Ces sphères $\left(\omega_i, \frac{R}{2}\right)$ sont analogues aux cercles BCH, CAH, ABH d'un triangle ABC, d'orthocentre H.

171. Tétraèdre orthocentrique T. — Toutes ces propriétés s'appliquent à ce tétraèdre particulier dans lequel le point de Monge coïncide avec l'orthocentre H. Ajoutons cependant les remarques suivantes.

Corollaire. — *Sur les hauteurs* AA_h, BB_h, CC_h, DD_h *d'un tétraèdre orthocentrique* T, *on porte les segments* AA_4, BB_4, CC_4, DD_4 *équipollents à trois fois les distances d'un point arbitraire* M *aux plans des faces opposées du tétraèdre. La sphère circonscrite au tétraèdre* T_4 *passe par l'orthocentre* H *du tétraèdre fondamental.*

Car les plans parallèles à ceux des faces BCD, CDA, DAB, ABC menés par les points A_4, B_4, C_4, D_4 concourent en l'anticomplémentaire M_1 du point M par rapport au tétraèdre T, et la sphère décrite sur HM_1 comme diamètre est circonscrite au tétraèdre T_4.

Corollaire. — *Le tétraèdre* T_4 *est homothétique à celui qui est déterminé par les projections orthogonales* A'_4, B'_4, C'_4, D'_4 *du point* M *sur les hauteurs du tétraèdre complémentaire* $G_aG_bG_cG_d$, *le centre d'homothétie étant le centre de gravité* G *du tétraèdre* T *et le rapport d'homothétie égal à* -3.

Car il est évident que les points A'_4, B'_4, C'_4, D'_4 sont les transformés des points A_4, B_4, C_4, D_4 par l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{3}\right)$. Cette propriété est un cas particulier de la suivante : Soit *un point* M *de l'espace dont les distances aux plans des faces d'un tétraèdre orthocentrique* T *sont* α, β, γ, δ *et portons sur les hauteurs* AH, BH, CH, DH *les segments* AA_4, BB_4, CC_4, DD_4 *équipollents à* $k\alpha$, $k\beta$, $k\gamma$, $k\delta$, k *étant différent de* 3. *Si* H_0 *est l'orthocentre du tétraèdre* $G_aG_bG_cG_d$ *et* Q *un point de* H_0M *tel que* $H_0Q : H_0M = k : (k-3)$, *le tétraèdre* T_4 *est homothétique au tétraèdre podaire du point* Q, *le rapport d'homothétie étant* $k-3$ *et le centre d'homothétie le point* S *de* HQ *tel que* $SH : SQ = k-3$.

En effet, la distance δ_a du point Q au plan BCD, par exemple, a pour mesure

$$\delta_a = \frac{1}{k-3}(k\alpha - 3H_0G_a) = \frac{1}{k-3}(AA_4 - AH) = \frac{1}{k-3}\cdot HA_4.$$

UN CHAPITRE DE GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE : ORTHOPÔLE D'UNE DROITE

A la Mémoire de G. Fontené.

La théorie de l'orthopôle d'une droite par rapport à un triangle, ou par rapport à un tétraèdre, qui constitue une des conquêtes les plus intéressantes de la géométrie récente de ces figures, est redevable envers les écrits de G. Fontené parus dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* au début de ce siècle. Dans un article intitulé *Sur une surface du troisième ordre qui est l'analogue du cercle des neuf points* (N. A, 1906, pp. 145-159), il a énoncé et démontré, en partie par la géométrie, en partie par des calculs longs et pénibles, un théorème qui étend au tétraèdre orthocentrique la construction généralisée d'Hamilton pour l'orthopôle d'une droite par rapport à un triangle et au sujet duquel il m'écrivait en mai 1917 : « *Une chose dont je désespère, c'est de voir démontrer géométriquement la seconde partie* ».

C'est pour répondre à ce désir que nous avons écrit ce chapitre qui, d'autre part, réunit des propriétés importantes peu répandues ou inédites et établit une analogie complète entre la géométrie du plan et celle de l'espace.

172. 1. Théorème I. — *Étant donné deux triangles* $T \equiv ABC$ *et* $T' \equiv A'B'C'$, *il existe un point propre* M *et, en général, un seul qui ait mêmes coordonnées barycentriques dans ces deux triangles. Si l'on désigne par* a, b, c *les points de rencontre des côtés homologues des triangles et par* a_1, b_1, c_1 *ceux des côtés homologues des triangles anti-complémentaires, le point* M *se confond avec le point de rencontre des droites* (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1).

Les droites (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1) se confondent avec les lieux des points dont le rapport des distances aux droites BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B' est égal au rapport des hauteurs de T et T' issues de A et A', B et B', C et C'. Soient alors M le point de rencontre des droites (b, b_1), (c, c_1), H_b et H_b les pieds des hauteurs

issues de B et B′ dans T et T′, M_b et M'_b les projections orthogonales de M sur CA et C′A′. On obtient, en grandeur et en signe,

$$MM_b : MM'_b = AH_b : AH \ ;$$

d'où, et par analogie, les relations d'aires

$$MCA : MC'A' = ABC : A'B'C' = MAB : MA'B'.$$

On déduit de là

$$MBC : MB'C' = ABC : A'B'C',$$

et, en désignant par H_a et H'_a les pieds des hauteurs issues de A et A′ dans T et T′, par M_a et M'_a les projections orthogonales de M sur BC et B′C′,

$$MM_a : MM'_a = AH_a : AH'_a.$$

Par suite, le point M appartient à la droite (a, a_1) et ce point a mêmes coordonnées barycentriques dans T et T′. Soit maintenant un point M qui ait mêmes coordonnées barycentriques dans T et T′. On a

$$MBC : MB'C' = ABC : A'B'C', \quad \text{d'où} \quad MM_a : MM'_a = AH_a : AH'_a.$$

Le point M appartient donc à la droite (a, a_1) et, de même aux droites (b, b_1), (c, c_1). En définitive, il existe un point M et, en général, un seul qui ait mêmes coordonnées barycentriques dans T et T′, ce point est confondu avec l'intersection des droites (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1).

Théorème II. — *Étant donné un triangle fixe* T ≡ ABC *et un triangle variable* T′ ≡ A′B′C′ *dont les sommets* A′, B′, C′ *décrivent sur les droites* AA′, BB′, CC′, *supposées fixes, des divisions semblables, si l'on désigne par* a, b, c *les points de rencontre des côtés homologues des triangles* T *et* T′ *et par* a_1, b_1, c_1 *ceux des côtés homologues correspondants des triangles anticomplémentaires, le point de rencontre* M *des droites* (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1) *reste fixe et il a mêmes coordonnées barycentriques dans le triangle* T *et dans tous les triangles* T′.

Soient deux positions $T'_1 \equiv A'_1B'_1C'_1$ et $T'_2 \equiv A'_2B'_2C'_2$ du triangle T′, M le point de rencontre des droites (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1) correspondant à T′ et α, β, γ les coordonnées barycentriques de ce point dans T et T'_1. On obtient, en grandeur et en signe,

$$\Sigma\alpha \,.\, \overline{MA} = \Sigma\alpha \,.\, \overline{MA'_1} = \Sigma\alpha \,.\, \overline{AA'_1} = 0.$$

Or, par hypothèse,

$$AA'_2 : AA'_1 = BB'_2 : BB'_1 = CC'_2 : CC'_1,$$

de sorte que

$$\Sigma\alpha . \overline{MA} = \Sigma\alpha . \overline{AA'_2} = \Sigma\alpha . \overline{MA'_2} = 0.$$

Le point M a donc mêmes coordonnées barycentriques α, β, γ dans T et T'_2. Par suite, ce point coïncide avec le point de rencontre des droites (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1) correspondant au triangle T'_2. Quand le triangle T′ varie, le point M reste fixe; de plus, il a mêmes coordonnées barycentriques par rapport au triangle T et à tous les triangles T′. On dit encore que ce point M est l'*équicentre* des triangles T et T′ (¹).

THÉORÈME III. — *Étant donné un triangle* $T \equiv ABC$ *et trois directions fixes* Δ_a, Δ_b, Δ_c, *si l'on projette deux points* P_1 *et* P_2 *parallèlement à* Δ_a, Δ_b, Δ_c *en* A_1, B_1, C_1 *et* A_2, B_2, C_2 *sur les droites* BC, CA, AB *et si l'on désigne par* a, b, c *les points de rencontre des côtés homologues des triangles* $T_1 \equiv A_1B_1C_1$ *et* $T_2 \equiv A_2B_2C_2$ *et par* a_1, b_1, c_1 *les points de rencontre des côtés homologues correspondants des triangles anticomplémentaires de* T_1 *et* T_2, *les droites* (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1) *concourent en un point* M. *Quand,* P_1 *restant fixe,* P_2 *décrit la droite* P_1P_2, *le point* M *reste fixe et il se confond avec l'équicentre des triangles* T_2.

D'après le théorème I, les droites (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1) concourent en un point M. D'autre part, P_1 étant un point fixe, par hypothèse, si le point P_2 décrit la droite P_1P_2, les points A_2, B_2, C_2 décrivent sur les droites fixes $A_1A_2 \equiv BC$, $B_1B_2 \equiv CA$, $C_1C_2 = AB$ des divisions semblables; de sorte que, d'après le théorème II, le point M reste fixe et coïncide avec l'équicentre des triangles T_2.

COROLLAIRE. — *Les triangles podaires de tous les points d'une droite* m, *par rapport à un triangle* $T \equiv ABC$, *ont un équicentre* M (²). Le point M est aussi appelé *orthopôle* de la droite *m*; celle-ci est alors une *orthopolaire* du point M par rapport à T. Si la droite *m* rencontre la circonférence ABC en M_1 et M_2, les droites podaires de ces points (droites de *Simson*) se coupent en M et si de plus *m* est un diamètre du cercle ABC, elles sont rectangulaires.

COROLLAIRE. — *Si le point* P_1 *coïncide avec le centre du cercle* ABC, *les droites* A_2a, B_2b, C_2c *qui joignent les sommets du triangle* T_2 *aux points de rencontre des droites* B_1C_1 *et* B_2C_2, C_1A_1 *et* C_2A_2, A_1B_1 *et* A_2B_2 *concourent au point* M.

Car le triangle T est confondu avec le triangle anticomplémentaire

(¹) J. NEUBERG, Sur les équicentres de deux systèmes de *n* points [*Mémoires de la Soc. des Sciences de Liège* (S. L.), 3ᵉ série, t. X, 1913].

(²) T. LEMOYNE, N. A., 1904, 400.

du triangle T_1 et les droites (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1) coïncident avec les droites A_2a, B_2b, C_2c.

COROLLAIRE. — *Quand la droite* m *pivote autour du centre du cercle* ABC, *le point* M *décrit la circonférence des neuf points du triangle* T *et ses projections orthogonales sur les côtés du triangle* $T'' \equiv A''B''C''$, *transformé du triangle* T, *d'orthocentre* H, *par l'homothétie* (H, 1/2) *sont collinéaires.*

Car le lieu d'un point Q dont les projections orthogonales sur les côtés de T sont alignées est la circonférence ABC; la droite podaire de Q passe au milieu de QH. Lorsque le point Q décrit la circonférence ABC, le lieu de M est une circonférence transformée de la précédente par l'homothétie (H, 1/2) qui se confond avec la circonférence des neuf points de T qui est aussi le lieu des points dont les projections sur les côtés de T'' sont collinéaires.

2. THÉORÈME. — *Les cercles podaires de tous les points d'une droite* m *par rapport à un triangle* T *sont orthogonaux à un cercle fixe* (¹).

En effet, lorsque les directions Δ_a, Δ_b, Δ_c envisagées au théorème III sont perpendiculaires aux droites BC, CA, AB, si l'on désigne par M l'équicentre des triangles podaires $T_1 = A_1B_1C_1$, $T_2 \equiv A_2B_2C_2$ de deux points arbitraires P_1, P_2 de la droite m, par (ω_1, σ_1), (ω_2, σ_2) les cercles podaires $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ et par α, β, γ les coordonnées barycentriques du point M dans les triangles T_1, T_2, on obtient

$$(\alpha+\beta+\gamma).\sigma_1^2 = (\alpha+\beta+\gamma).\overline{\omega_1M}^2 + \Sigma\alpha.\overline{MA_1}^2$$
$$(\alpha+\beta+\gamma).\sigma_2^2 = (\alpha+\beta+\gamma).\overline{\omega_2M}^2 + \Sigma\alpha.\overline{MA_2}^2.$$

Si l'on désigne par N_a le milieu de A_1A_2 et par M_a la projection orthogonale de M sur la droite A_1A_2, on a, en grandeur et en signe,

$$\Sigma(\overline{MA_1}^2 - \overline{MA_2}^2).\alpha = \Sigma A_1A_2.N_aM_a.\alpha.$$

D'autre part, le barycentre des points A'_2, B_2, C'_2 qui coïncident avec les extrémités des segments $\overrightarrow{MA'_2}$, $\overrightarrow{MB'_2}$, $\overrightarrow{MC'_2}$ équipollents aux segments $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$ affectés des coefficients α, β, γ, se confond avec le point M. Soient Q_a la projection orthogonale du milieu Q de P_1P_2 sur la droite $A_1A_2 \equiv BC$ et Q'_a celle de Q sur la droite MA'_2. On a déjà $Q'_aM \equiv Q_aM_a$ et, par suite,

$$\Sigma\overline{A_1A_2}.\overline{Q_aM_a}.\alpha = \Sigma\overline{MA'_2}.\overline{Q'_aM}.\alpha = 0,$$

(¹) T. LEMOYNE, N. A., 1904, p. 400.

car, étant donné n points quelconques $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et le barycentre G de ces points affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, si $l_1, l_2, \ldots, l_n$ sont les projections orthogonales d'un vecteur quelconque sur $\overline{GA_1}, \overline{GA_2}, \ldots, \overline{GA_n}$, on a, en grandeur et en signe [1],

$$(1) \qquad \Sigma \alpha_1 . \overline{GA_1} . l_1 = 0.$$

Dans le cas actuel, il suffit d'appliquer cette remarque aux points A'_2, B'_2, C'_2, M et au vecteur $\overrightarrow{QM}$. Dès lors, on obtient l'égalité

$$\overline{\omega_1 M}^2 - \sigma_1^2 = \overline{\omega_2 M}^2 - \sigma_2^2,$$

qui prouve que le point M coïncide avec le centre d'un cercle fixe (M) orthogonal au cercle $A_1B_1C_1$ et à tous les cercles podaires $A_2B_2C_2$ des points P_2 de la droite m.

Corollaire. — *Si la droite* m *passe par le centre du cercle* ABC, *le cercle* (M) *se réduit à son centre.*

173. 1. Théorème I. — *Étant donné deux tétraèdres* $T \equiv ABCD$ *et* $T' \equiv A'B'C'D'$, *il existe un point propre* M *et, en général, un seul qui ait mêmes coordonnées barycentriques dans ces deux tétraèdres. Si l'on désigne par* a, b, c, d *les droites d'intersection des faces homologues des deux tétraèdres et par* a_1, b_1, c_1, d_1 *les droites d'intersection des faces homologues correspondantes des tétraèdres anticomplémentaires, ce point* M *se confond avec l'intersection des plans* (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1).

Les plans (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) sont les lieux des points dont le rapport des distances aux plans BCD et B'C'D', CDA et C'D'A', DAB et D'A'B', ABC et A'B'C' est égal au rapport des hauteurs des tétraèdres T et T' issues de A et A', B et B', C et C', D et D'.

Si l'on désigne par H_a, et H'_a, H_b et H'_b les pieds des hauteurs de T et T' issues de A et A', B et B' et par M_a et M' les projections orthogonales de M sur les plans BCD et B'C'D', en procédant comme en géométrie plane, (172, théorème I), on obtient, en grandeur et en signe,

$$(2) \qquad \overline{MM_a} : \overline{MM'_a} = \overline{AH_a} : \overline{AH'_a};$$

de sorte que le point M appartient au plan (a, a_1) et ce point a mêmes coordonnées barycentriques dans les tétraèdres T et T'.

---

[1] E. Lemoine. Cf. aussi, R. Blanchard, *Journal de Vuibert*, 50e année, p. 12.

Réciproquement, si un point M a mêmes coordonnées barycentriques dans T et T′, on a

$$\overline{MBCD} : \overline{MB'C'D'} = \overline{ABCD} : \overline{A'B'C'D'},$$

d'où la relation (2); le point M appartient donc au plan (a, a_1) et, par analogie, aux plans (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1). En définitive, il existe un point M et, en général, un seul qui ait les mêmes coordonnées barycentriques dans les tétraèdres T et T′ et ce point coïncide avec l'intersection des plans (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1).

THÉORÈME II. — *Étant donné un tétraèdre fixe* $T \equiv ABCD$ *et un tétraèdre* $T' \equiv A'B'C'D'$ *dont les sommets* A′, B′, C′, D′ *décrivent sur les droites* AA′, BB′, CC′, DD′ *supposées fixes des divisions semblables, si l'on désigne par* a, b, c, d *les droites d'intersection des faces homologues des deux tétraèdres et par* a_1, b_1, c_1, d_1 *les droites d'intersection des faces homologues correspondantes des tétraèdres anticomplémentaires, le point de rencontre* M *des plans* (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) *reste fixe et il a mêmes coordonnées barycentriques dans le tétraèdre* T *et dans tous les tétraèdres* T′.

Soient deux positions $T'_1 = A'_1B'_1C'_1D'_1$ et $T'_2 \equiv A'_2B'_2C'_2D'_2$ de T′, M le point de rencontre des plans (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) correspondant à T'_1 et α, β, γ, δ les coordonnées barycentriques de ce point dans T et T_1. On a

$$\Sigma\alpha \,.\, \overline{MA} = \Sigma\alpha \,.\, \overline{MA'_1} = \Sigma\alpha \,.\, \overline{AA'_1} = 0.$$

Or, par hypothèse,

$$AA'_2 : AA'_1 = BB'_2 : BB'_1 = CC'_2 : CC'_1 = DD'_2 : DD'_1.$$

Il en résulte

$$\Sigma\alpha \,.\, \overline{MA} = \Sigma\alpha \,.\, \overline{AA'_2} = \Sigma\alpha \,.\, \overline{MA'_2} = 0,$$

et M a donc mêmes coordonnées barycentriques α, β, γ, δ par rapport à T et T'_2. Dès lors, ce point est confondu avec l'intersection des plans (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) correspondant à T'_2. Quand T′ varie, le point M reste fixe; de plus, il a les mêmes coordonnées barycentriques dans le tétraèdre T et dans tous les tétraèdres T′. On dit encore que ce point M est l'*équicentre* des tétraèdres T et T′ [1].

THÉORÈME III. — *Étant donné un tétraèdre* $T \equiv ABCD$ *et quatre directions fixes* Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d, *si l'on projette deux points,* P_1 *et* P_2 *parallèlement à* Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d *en* A_1, B_1, C_1, D_1 *et* A_2, B_2, C_2, D_2 *sur les*

[1] J. NEUBERG, S. L., *loc. cit.* (172).

plans BCD, CDA, DAB, ABC *et si l'on désigne par* a, b, c, d *les droites d'intersection des faces homologues des tétraèdres* $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ *et* $T_2 = A_2B_2C_2D_2$, *les plans* (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) *concourent en un point* M. *Si le point* P_1 *reste fixe,* P_2 *décrivant la droite* $P_1P_2 \equiv m$, *le point* M *reste fixe et il coïncide avec l'équicentre des tétraèdres* T_2.

D'après le théorème I, (173), les plans (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) concourent en un point M. D'autre part, P_1 étant un point fixe, par hypothèse, si le point P_2 décrit la droite m, les points A_2, B_2, C_2, D_2 décrivent sur les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 des divisions semblables. En raison du théorème II, le point M reste fixe et coïncide avec l'équicentre des tétraèdres T_2.

Corollaire. — *Les tétraèdres podaires de tous les points d'une droite quelconque* m, *par rapport à un tétraèdre* $T \equiv ABCD$, *ont un équicentre* M [1].

Le point M est encore appelé *orthopôle* de la droite m. Si cette droite rencontre la surface cubique de Sartiaux aux points M_1, M_2, M_3, les plans podaires de ces points par rapport à T (plans de *Simson*) se coupent en M.

2. Théorème. — *Les sphères podaires de tous les points d'une droite* m, *par rapport à un tétraèdre* T, *sont orthogonales à une sphère fixe* [2].

La démonstration de cette proposition est analogue à celle du théorème de M. T. Lemoyne, (172, 2), qu'il suffit de suivre pas à pas, car la relation (1) est vraie pour n points coplanaires ou non. Le centre de la sphère fixe se confond avec l'équicentre M des tétraèdres podaires de tous les points de la droite m.

Corollaire. — *Il y a huit droites associées à un tétraèdre* $T \equiv ABCD$ *pour lesquelles la sphère qui coupe orthogonalement les sphères podaires de tous leurs points se réduit à un point donné* M.

Car si l'on désigne par α_1, β_1, γ_1, δ_1 les plans polaires des sommets A,

---

(1) J. Neuberg, *Mathesis*, 1922, p. 89.

(2) Après avoir démontré un cas particulier intéressant dans un article intitulé *Extension au tétraèdre d'une propriété du cercle podaire* (*The Tohoku Mathematical Journal*. novembre 1919, p. 25 et mars 1921, p. 232), nous avons communiqué le théorème général dans une correspondance avec Cl. Servais (décembre 1921). Ce géomètre en a donné une démonstration géométrique suivie de développements importants (*Bull. de l'Acad. royale*, 1922, p. 50), moins simple que la nôtre (*The American Mathematical Monthly*, 1942 et 1946, 324), et que celle de M. R. Blanchard contenue dans un Mémoire inédit présenté à l'Académie des Sciences de Paris à l'occasion du Prix Victor Thébault (1945) dont nous nous sommes inspiré dans le présent travail (V. T.)

B, C, D de T relatifs au point donné M et par α, β, γ, δ les plans BCD, CDA, DAB, ABC, ces plans rencontrent les plans polaires en cause suivant les rayons $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, $\delta\delta_1$ d'un système réglé, puisque les trièdres supplémentaires M (ABC), M $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, par exemple, montrent que les points (BC, α_1), (CA, β_1) (AB, γ_1) sont situés sur une droite qui rencontre les rayons $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, $\delta\delta_1$.

D'autre part, la surface du quatrième ordre Ω lieu des points P de l'espace dont les sphères podaires relatives au tétraèdre T passent par un point donné M, contient les arêtes de T, les droites $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, $\delta\delta_1$, car la sphère podaire d'un point P de $\alpha\alpha_1$ coïncide avec la sphère décrite sur AP comme diamètre et elle passe par M. Enfin, la surface Ω passe par quatre directrices d_1, d_2, d_3, d_4 du système réglé $(\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1, \delta\delta_1)$, car elle rencontre un rayon r de ce système en quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 par lesquels passent respectivement les directrices d_1, d_2, d_3, d_4 du système réglé. La droite d_1 coupe la surface Ω en cinq points P_1, (d_1, α), (d_2, β), (d_3, γ), (d_4, δ) et est située entièrement sur cette surface.

Les sphères podaires de chacune des droites

$$(\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1, \delta\delta_1), \qquad (d_1, d_2, d_3, d_4)$$

passent donc par le point donné M; ce sont les seules droites possédant cette propriété [1].

174. Conclusion. — Les paragraphes 172 et 173 constituent une analogie complète entre l'orthopôle M d'une droite arbitraire m, par rapport à un triangle T ou pour un tétraèdre T. En effet, étant donné un triangle $T \equiv ABC$ et deux points P_1 et P_2 dont les triangles podaires par rapport à T sont $T_1 \equiv A_1B_1C_1$ et $T_2 \equiv A_2B_2C_2$, si a, b, c désignent les intersections des côtés homologues de T_1 et T_2 et a_1, b_1, c_1 les intersections des côtés homologues correspondants des triangles anticomplémentaires de T_1 et T_2, les droites aa_1, bb_1, cc_1 concourent en un point M qui est l'orthopôle de $P_1P_2 \equiv m$ par rapport à T. De plus, M coïncide avec l'équicentre des triangles podaires des points de m et a même puissance par rapport aux cercles podaires de tous les points de cette droite.

De même, étant donné un tétraèdre $T \equiv ABCD$ et deux points P_1 et P_2 dont les tétraèdres podaires par rapport à T sont $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$, $T_2 \equiv A_2B_2C_2D_2$, si a, b, c, d désignent les droites

---

[1] Plus généralement, ces propriétés subsistent quand on remplace le point M par une sphère donnée (M). Cf. Cl. Servais, *Bull. de l'Académie royale*, (1922, p. 641).

d'intersection des faces homologues de T_1 et T_2 et a_1, b_1, c_1, d_1 les droites d'intersection des faces homologues correspondantes des tétraèdres anticomplémentaires de T_1 et T_2, les plans (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) concourent en un point M qui reste fixe quand la droite $P_1P_2 \equiv m$ reste elle-même fixe. D'autre part, ce point M est confondu avec l'équicentre des tétraèdres podaires de tous les points de la droite m et a même puissance par rapport aux sphères podaires des points de cette droite.

175. Plans podaires. — 1. *Rappel de propriétés connues.* Le lieu des points dont les projections orthogonales sur les plans des faces d'un tétraèdre $T \equiv ABCD$ sont coplanaires est une surface cubique (S) (surface de Sartiaux) qui passe par les six arêtes et a pour points doubles les sommets de T. Elle a pour équation normale

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} + \frac{D}{t} = 0,$$

A, B, C, D désignant les mesures des aires des faces BCD, CDA, DAB, ABC. Cette surface est l'inverse du plan de l'infini

$$Ax + By + Cz + Dt = 0$$

et se confond avec le lieu des centres des hyperboloïdes équilatères conjugués à T et avec celui des foyers des paraboloïdes de révolution inscrits au tétraèdre fondamental. Les plans podaires des trois points de rencontre d'une droite m avec la surface (S) passent par l'orthopôle M de cette droite par rapport à T de même que le plan podaire perpendiculaire à m du conjugué isogonal du point à l'infini de m.

2. Théorème. — *Dans un tétraèdre* $T \equiv ABCD$, *si les plans podaires de trois points alignés* P, Q, R *forment un trièdre trirectangle, la droite* $\Delta \equiv (P, Q, R)$ *est une génératrice de l'isogonal de l'hyperboloïde des hauteurs, du même système que les isogonales des hauteurs* (1).

En effet, le point P se confond avec le foyer d'un paraboloïde de révolution inscrit à T dont le foyer à l'infini coïncide avec le conjugué isogonal P′ de P dans la direction normale au plan podaire de P, car celle-ci est la direction de l'axe du paraboloïde. L'inverse isogonale de la droite Δ est une cubique gauche σ qui, passant par les sommets A, B, C, D de T et par les conjugués isogonaux P′, Q′, R′ de P, Q, R, passe à l'infini dans trois directions perpendiculaires deux à deux puisque les plans podaires de P, Q, R ont cette propriété, par

(1) J. H. Grace, *Proc. Philos. Soc.*, 23, 1925-1927, p. 853, § 3.

hypothèse; il s'ensuit que toutes les quadriques passant par cette cubique σ sont équilatères (puisque leur conique à l'infini est circonscrite à un triangle conjugué à l'ombilicale).

D'autre part, soient E un point arbitraire de σ et F un autre point de cette cubique tel que les plans ABC et DEF soient perpendiculaires. Il y a quatre quadriques linéairement indépendantes contenant les six points A, B, C, D, E, F et l'on peut prendre pour ces quatre quadriques, trois quadriques passant par la cubique σ et le couple de plans précité. Toutes ces quadriques sont des hyperboloïdes équilatères et, en particulier, le plan de trois des points A, B, C, D, E, F est perpendiculaire au plan des trois autres. Ainsi, le plan AEF étant perpendiculaire au plan BCD doit contenir la perpendiculaire de A au plan BCD, de sorte que la droite EF coupe l'une et, par suite, les quatre hauteurs du tétraèdre T; elle coïncide donc avec une génératrice de l'hyperboloïde des hauteurs (H) et le point E étant arbitraire sur σ, cette cubique est sur (H). Il en résulte que la droite Δ est une génératrice de l'hyperboloïde (H′) isogonal de (H) par rapport au tétraèdre fondamental.

Réciproquement, *si une génératrice* Δ *de l'isogonal* (H′) *de l'hyperboloïde des hauteurs* (H) *d'un tétraèdre* T, *du même système que les isogonales des hauteurs, rencontre la surface cubique de* SARTIAUX (S) *en* P, Q, R, *les plans podaires de ces points forment un trièdre trirectangle.*

Soit une droite arbitraire Δ qui rencontre la surface (S) en P, Q, R. L'inverse tétraédrique du plan (A, Δ) est un cône du second ordre (C), dont l'inverse isogonal est (C′), passant par les conjugués isogonaux P′, Q′, R′ des points P, Q, R, par rapport à T, et situés dans le plan de l'infini. Pour que le cône (C) soit équilatère, il faut et il suffit que l'on ait, en coordonnées normales, d'abord,

$$\Delta \equiv \frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma} = \frac{t-t_1}{\delta},$$

$$(C) \equiv (A, \Delta) \equiv \begin{vmatrix} y & z & t \\ y_1 & z_1 & t_1 \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

ensuite

$$(C') \equiv \begin{vmatrix} zt & yt & yz \\ y_1 & z_1 & t_1 \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$zt(\delta z_1 - \gamma t_1) + yt(\beta t_1 - \delta y_1) + yz(\gamma y_1 - \beta z_1) = 0$$

Ce cône (C') doit être harmoniquement circonscrit au cercle de l'infini

$$u^2 + v^2 + w^2 + s^2 - 2vw \cos a' - 2uw \cos b' - 2uv \cos c' \\ - 2us \cos a - 2vs \cos b - 2ws \cos c = 0,$$

a, a', b, b', c, c' désignant les dièdres suivant les arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC de T. Il en résulte la condition

$$\cos c(\delta z_1 - \gamma t_1) + \cos b(\beta t_1 - \delta y_1) + \cos a'(\gamma y_1 - \beta z_1) = 0,$$

qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \cos c & \cos b & \cos a' \\ y_1 & z_1 & t_1 \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Elle exprime que Δ rencontre la droite

$$y : \cos c = z : \cos b = t : \cos a',$$

laquelle se confond avec une deuxième génératrice de l'isogonal (H') de l'hyperboloïde (H) passant par A.

Si l'on suppose alors que Δ soit une génératrice de (H'), du même système que les isogonales des hauteurs, les quatre cônes (A, Δ), (B, Δ), (C, Δ), (D, Δ) sont équilatères. Comme ils contiennent les points à l'infini P', Q', R', cette condition exige que le triangle P'Q'R' soit conjugué au cercle de l'infini. Les trièdres A (P', Q', R'), B (P', Q', R'), C (P', Q', R'), D (P', Q', R') sont trirectangles et les plans podaires des points P, Q, R forment un trièdre trirectangle.

Corollaire. — *Si les plans podaires de trois points collinéaires* P, Q, R *forment un trièdre trirectangle, le point de rencontre des plans menés par les points* P, Q, R, *parallèlement à leurs plans podaires est situé sur l'intersection de la surface cubique de* Sartiaux (S) *et de l'hyperboloïde des hauteurs* (H) *du tétraèdre fondamental.*

En effet, puisque les plans podaires de P, Q, R sont perpendiculaires deux à deux et que l'isogonal P' de P, par exemple, est à l'infini dans la direction normale au plan podaire de P, les plans menés par P, Q, R parallèlement à leurs plans podaires respectifs coïncident avec les plans PQ'R', QR'P', RP'Q' et se coupent en un point L. Le plan polaire de P par rapport à l'hyperboloïde équilatère (P_1), de centre P, conjugué au tétraèdre T, coïncide avec le plan de l'infini, de sorte que la droite polaire de $\Delta \equiv$ (P, Q, R), par rapport à (P_1), est à l'infini. Comme les couples de points isogonaux Q et Q', R et R' sont conjugués pour tous les hyperboloïdes équilatères

ayant T pour tétraèdre conjugué, la droite polaire de Δ passe par Q′ et R′. Le plan polaire, par rapport à (P_1), du point L′ situé à l'infini sur Δ passe donc par les points Q′, R′ et P. Dès lors, les points L et L′ sont, d'une part, conjugués par rapport à (P_1) et par suite à tous les hyperboloïdes envisagés, d'autre part, conjugués isogonaux pour le tétraèdre T. Quand la droite Δ varie, le lieu de L′ coïncide avec la section par le plan de l'infini de la quadrique contenant Δ, confondue avec l'isogonal (H′) de l'hyperboloïde des hauteurs de T. Le point L décrit donc l'intersection de la surface (S) de Sartiaux et de l'hyperboloïde (H), ce qui achève la démonstration du corollaire.

N. B. — Il est clair aussi que *le plan podaire du point* L *est perpendiculaire à la droite* Δ, car L′ est à l'infini sur cette droite.

176. Tétraèdre orthocentrique. — Les propriétés contenues dans les paragraphes 172 et 175 suggèrent les analogies entre l'orthopôle d'une droite par rapport à un triangle ou à un tétraèdre auxquelles nous avons fait allusion au début en rappelant des travaux de G. Fontené.

Théorème. — *Étant donné un tétraèdre orthocentrique* $T \equiv ABCD$, *d'orthocentre* H, *les projections orthogonales* a, b, c, d *d'un point arbitraire* Q *sur les plans* BCD, CDA, DAB, ABC *et les droites* a_1, b_1, c_1, d_1 *d'intersection des plans des faces correspondantes du tétraèdre complémentaire* $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ *de* T *et du tétraèdre* $t \equiv abcd$, *les plans* (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) *concourent en un même point* M [1].

En se reportant à la configuration du théorème III (173), dans le cas actuel, les directions Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d sont perpendiculaires aux plans BCD, CDA, DAB, ABC, le point P_1 coïncide avec le complémentaire H_1 de l'orthocentre H, le point P_2 avec Q. Le tétraèdre T se confond avec le tétraèdre complémentaire de T_1, les droites a_1, b_1, c_1, d_1 passent par A_2, B_2, C_2, D_2 et les plans (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) coïncident avec les plans (A_2, a), (B_2, b), (C_2, c), (D_2, d) qui concourent en M.

Corollaire. — *Si le point* Q *se déplace sur une droite fixe* m *passant par l'orthocentre* H_1 *du tétraèdre complémentaire* T_1 *de* T, *le point* M *reste fixe* [2].

Car le point M est confondu avec l'orthopôle de *m* par rapport à T et avec l'équicentre des tétraèdres podaires de tous les points de *m* (173, théorème III).

---

[1] G. Fontené, N. A., 1906, *loc. cit.*
[2] G. Fontené, N. A., *loc. cit.*

COROLLAIRE. — *Quand la droite* m *pivote autour de l'orthocentre* H_1 *du tétraèdre* T_1, *le point* M *décrit la transformée* Σ *de la surface de* SARTIAUX (S) *du tétraèdre fondamental par l'homothétie* (H, 2/3) *et ses projections orthogonales sur les plans des faces du tétraèdre* $T'' \equiv A''B''C''D''$, *transformé du tétraèdre* T *par l'homothétie* (H, 2/3), *sont coplanaires* (1).

En effet, d'après ce qui précède (173), les plans podaires des points de rencontre P, Q, R de la droite m avec la surface (S) forment un trièdre trirectangle et le point de rencontre des plans menés par P, Q, R parallèlement aux plans podaires de ces points est situé sur (S). D'autre part, les points P, Q, R coïncident avec les foyers de trois paraboloïdes de révolution inscrits à T dont les plans orthoptiques passent par H. Les plans tangents aux sommets de ces paraboloïdes, qui coïncident avec les plans podaires de P, Q, R et qui concourent en l'orthopôle M de m, rencontrent donc les segments $\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{HQ}$, $\overrightarrow{HR}$ aux deux tiers à partir de H, ce qui achève de démontrer le corollaire.

Il peut se déduire aussi de ce que le lieu des orthopôles des droites d'une gerbe de centre H_1 est une surface cubique ayant quatre points doubles aux symétriques des pieds des hauteurs du tétraèdre adjoint t [homothétique (H, 2) du tétraèdre orthocentrique T] par rapport aux projections orthogonales de H_1 sur les hauteurs de T (2). Car, si l'on désigne par h et h' le pied de la hauteur relative au sommet A de T et celui de la hauteur correspondante de t ($hh' = Hh$), par A′ le point double sur cette hauteur du lieu des orthopôles des droites passant par H_1, et par h_1 la projection de H_1 sur Ah, on obtient

$$h_1A_1 = h'h_1 = h'h + hh_1 = hH + \frac{HA}{3}$$

$$HA' = h_1A' - h_1H = h_1A' - hH + hh_1 = \frac{2HA}{3}$$

Note. — Ces propositions constituent une extension au tétraèdre orthocentrique de la généralisation d'un théorème d'HAMILTON relatif à l'orthopôle d'un diamètre du cercle circonscrit à un triangle par M. R. GOORMAHGTIGH (3). D'autre part, la surface Σ est l'analogue dans un tétraèdre orthocentrique du cercle des neuf points (O_9) pour un triangle. Ainsi, de même que le cercle (O_9) passe par les

(1) G. FONTENÉ, N. A., *loc. cit.*
(2) Cf. A. MARMION, *Comptes Rendus*, t. 230, p. 1926.
(3) *Journal de Vuibert*, 38e année, p. 69.

milieux des côtés et par les pieds des hauteurs d'un triangle, la surface Σ passe par les centres de gravité des faces et par les pieds des hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique.

177. Plan podaire généralisé. — Étant donné un tétraèdre quelconque $T \equiv ABCD$, un axe arbitraire Δ de l'espace et une seconde position $T' \equiv A'B'C'D'$ du tétraèdre T après une rotation, d'angle ω, autour de Δ, on se propose de déterminer le lieu des points M de la surface de Sartiaux (S) du tétraèdre T tels que les perpendiculaires menées de M sur les plans B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C' rencontrent respectivement les plans BCD, CDA, DAB, ABC en quatre points situés dans un même plan.

Si l'on désigne par M_i, M'_i et M''_i, ($i = a, b, c, d$), les projections orthogonales d'un point cherché M sur les plans (BCD, CDA, DAB, ABC), (B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C') et les points de rencontre des droites MM'_i avec les plans des faces du tétraèdre T, par $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$ les cosinus directeurs d'une droite MM_i et par x_i les coordonnées normales du point M par rapport au tétraèdre T, la surface (S) a pour équation

$$(1) \qquad \left|\cos\alpha_i, \quad \cos\beta_i, \quad \cos\gamma_i, \quad \frac{1}{x_i}\right| = 0.$$

Le système de coordonnées rectangulaires peut être choisi de manière que la rotation d'angle ω du tétraèdre T se fasse autour d'un axe Δ passant par le point M et parallèle à l'axe des z. D'autre part, en vertu du théorème fondamental de la géométrie sphérique, si l'on pose, angle $M'_iMM''_i = u_i$, on obtient

$$\cos u_i = \cos^2\gamma_i + \sin^2\gamma_i \cos\omega,$$

et les coordonnées normales du point M, par rapport au tétraèdre T'' formé par les plans perpendiculaires aux droites MM''_i en M_i sont $\dfrac{x_i}{\cos u_i}$. Dès lors, si l'on désigne par ($\cos\alpha''_i$, $\cos\beta''_i$, $\cos\gamma''_i$) les cosinus directeurs des droites MM''_i, on a, d'abord,

$$S'' \equiv \left|\cos\alpha''_i, \quad \cos\beta''_i, \quad \cos\gamma''_i, \quad \frac{\cos^2\gamma_i + \sin^2\gamma_i\cos\omega}{x_i}\right| = 0,$$

puisque le point M doit appartenir à la surface de Sartiaux (S'') du tétraèdre T''. Ensuite, comme

$$(2) \qquad |\cos\alpha_i, \quad \cos\beta_i, \quad \cos\gamma_i| = |\cos\alpha''_i, \quad \cos\beta''_i, \quad \cos\gamma''_i|,$$

($i = a, b, c$ ou un terne quelconque pris parmi a, b, c, d), car ces

déterminants représentent les sextuples des volumes des deux tétraèdres égaux (0, 0, 0), ($\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$) et (0, 0, 0), ($\cos\alpha''_i$, $\cos\beta''_i$, $\cos\gamma''_i$). On a donc aussi l'équation

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \cos\alpha_i, & \cos\beta_i, & \cos\gamma_i, & \dfrac{\cos^2\gamma_i + \sin^2\gamma_i\cos\omega}{x_i} \end{vmatrix} = 0,$$

qui, en raison de (1), peut être remplacée par

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \cos\alpha_i, & \cos\beta_i, & \cos\gamma_i, & \dfrac{\sin^2\gamma_i}{x_i} \end{vmatrix} = 0.$$

Si les $\sin\gamma_i$ ne sont pas égaux, les équations (1) et (4) représentent deux surfaces distinctes dont la courbe Σ d'intersection constitue le lieu cherché des points M, et il est clair que les droites MM'_i rencontrent les plans des faces du tétraèdre T sous un même angle. D'où cette proposition : *les perpendiculaires menées d'un point* M *de la courbe* Σ *sur les plans* B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C' *des faces d'un tétraèdre* T' *obtenu par rotation du tétraèdre* T *autour d'un axe arbitraire* Δ *de l'espace rencontrent les plans* BCD, CDA, DAB, ABC *en quatre points situés dans un même plan* (Plan podaire *généralisé*), qui étend au tétraèdre la propriété fondamentale de la droite de Simson *généralisée* d'un point de la circonférence circonscrite à un triangle.

178. Tétraèdres spéciaux. — Lorsque les $\sin\gamma_i$ sont égaux, les surfaces (1) et (4) se confondent et tous les points de la surface de Sartiaux S du tétraèdre T possèdent la propriété que les quatre points M''_i qui en proviennent sont situés dans un plan π. Les plans des faces de ces tétraèdres spéciaux T font un même angle avec un certain plan (P) et l'axe de rotation en cause est normal à ce plan.

Pour construire un tétraèdre de ce genre, il suffit de mener les plans parallèles à chacun des quatre plans tangents à un cône de révolution donné (C). L'axe Δ de rotation sera parallèle à l'axe Δ' du cône (C) et le plan (P) normal à Δ'. Dès lors, avec les notations du début, si la rotation de ce tétraèdre spécial T autour d'un axe parallèle à Δ passant par un point arbitraire M de la surface de Sartiaux du tétraèdre T amène le segment $\overline{MM'_i}$ en $\overline{MM'_i}$ et que la droite MM'_i perce le plan de la face correspondante de T en M''_i, l'angle $M'_iMM''_i = u$ conserve une grandeur constante et l'on a

$$\frac{MM''_i}{MM'_i} = \frac{MM''_i}{MM_i} = \frac{1}{\cos u}.$$

Le point M_i coïncide donc avec le transformé du point M'_i par la rotation effectuée, suivie d'une homothétie $\left(M, \frac{1}{\cos u}\right)$, et les points M''_i sont coplanaires, puisque les points M_i sont dans le plan podaire du point M par rapport au tétraèdre T.

La conclusion est la même pour un tétraèdre spécial T dont les plans des faces sont orthogonaux à quatre génératrices du cône (C). Lorsque, de plus, les plans des faces du tétraèdre T sont orthogonaux aux quatre génératrices communes à deux cônes de révolution (C) et (C′), de même sommet, dont les axes ne sont pas orthogonaux, (ou parallèles aux quatre plans tangents aux cônes suivant ces génératrices), il y a deux plans (P) et deux axes de rotation Δ perpendiculaires à ces plans. Enfin, quand les axes des cônes (C) et (C′) sont perpendiculaires, il existe trois plans (P) et trois axes de rotation parallèles aux bimédianes du tétraèdre T, qui est alors *équifacial*. En résumé, *les perpendiculaires menées par un point arbitraire* M *de la surface de* SARTIAUX *d'un tétraèdre* T ≡ ABCD *dont les quatre plans des faces font des angles égaux avec un, deux ou trois plans* (P), *sur les plans des faces* B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′ *du tétraèdre* T′ *transformé de* T *par une rotation du tétraèdre* T *autour d'un, deux ou trois axes normaux aux plans* (P), *rencontrent les plans* BCD, CDA, DAB, ABC *en quatre points situés dans un même plan.*

CHAPITRE IV

QUESTIONS PROPOSÉES SUR LA GÉOMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE

1. Déterminer le point dont les plus courts chemins qui le séparent de chacun des sommets d'un tétraèdre, après avoir touché la face opposée, soient égaux entre eux.

2. Partager la surface d'un tétraèdre en deux parties équivalentes par un plan passant par une arête et montrer que les six plans ainsi obtenus sont concourants.

3. Déterminer une section plane limitée par trois faces d'un tétraèdre qui partage, à la fois, la surface et le volume en deux parties équivalentes et montrer que son plan passe par le centre de la sphère inscrite.

4. Étant donné un tétraèdre, construire cinq sphères égales entre elles, dont l'une est tangente aux quatre autres, et chacune de celles-ci à trois faces du tétraèdre.

5. Déterminer un point M de l'arête BC d'un tétraèdre ABCD pour que les plans ABC, ABM touchent extérieurement deux sphères respectivement tangentes aux quatre plans des faces des tétraèdres ABCM, ACDM.

6. Étant donné un tétraèdre, construire quatre sphères égales entre elles, tangentes à une même sphère de rayon donné (ou à un même plan) et chacune à trois faces du tétraèdre.

7. Étant donné un tétraèdre ABCD, placer une sphère de rayon donné, de manière que le volume du tétraèdre polaire de ABCD, par rapport à cette sphère, soit le plus petit.

8. Si la hauteur d'un tétraèdre ABCD issue du sommet A est égale à la somme des trois autres, le centre de gravité et les points où les arêtes AB, AC, AD rencontrent les plans bissecteurs des dièdres opposés sont dans un même plan.

9. Étant donné un tétraèdre ABCD, inscrire dans les trièdres de sommets A, B, C, D les plus grandes sphères égales entre elles

(A), (B), (C), (D), de manière que l'on puisse placer entre les sphères (B) et (C) des sphères égales à celles-ci, inscrites au dièdre BC, chacune de ces sphères touchant les deux entre lesquelles elle est située, et ainsi de suite pour les sphères (C) et (A), (A) et (B), (A) et (D), (B) et (D), (C) et (D).

10. Étant donné des points arbitraires A′, B′, C′, D′ dans les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC d'un tétraèdre et les transformés (A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2), (A_3, B_3, C_3, D_3) des points A, B, C, D par les homothéties de même module k et de centres respectifs (D′, A′, B′, C′), (C′, D′, A′, B′), (B′, C′, D′, A′), les tétraèdres $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$ ont même centre de gravité. Généraliser.

11. La somme $\frac{\overline{AP}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{PC'}} + \frac{\overline{DP}}{\overline{PD'}}$ des rapports en lesquels un point P intérieur à un tétraèdre ABCD divise les céviennes AA′, BB′, CC′, DD′ de ce point n'est jamais moindre que 12, tandis que le produit de ces rapports n'est pas inférieur à 81.

12. Soient a et a', b et b', c et c' les points de rencontre des arêtes BC et DA, CA et DB, AB et DC avec un plan arbitraire; G_a, G_b, G_c, G_d les barycentres des triangles $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$, $a'b'c'$. Si l'on prolonge les segments AG_a, BG_b, CG_c, DG_d de deux fois leurs longueurs, soit $\overline{AA'} = 3\overline{AG_a}$, $\overline{BB'} = 3\overline{BG_b}$, $\overline{CC'} = 3\overline{CG_c}$, $\overline{DD'} = 3\overline{DG_d}$, les points A′, B′, C′, D′ sont coplanaires.

13. Si par les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre ABCD, on mène successivement les plans parallèles aux faces (B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′), aux faces (C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′, B′C′D′), aux faces (D′A′B′, A′B′C′, B′C′D′, C′D′A′), aux faces (A′B′C′, B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′) d'un tétraèdre A′B′C′D′, la somme algébrique des arêtes homologues des quatre tétraèdres ainsi déterminés est nulle.

14. Le point de Monge et le centre d'une des sphères tangentes aux quatre plans des faces peuvent se confondre sans que le tétraèdre fondamental soit équifacial. Discussion.

15. Soient A_1, B_1, C_1, D_1 les points où une droite d perce les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC d'un tétraèdre; A_2 et A_3, B_2 et B_3, C_2 et C_3, D_2 et D_3 les projections orthogonales des points A et A_1, B et B_1, C et C_1, D et D_1 sur un plan arbitraire donné. Les sphères ayant pour centres les milieux de AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 et passant par les points A_2 et A_3, B_2 et B_3, C_2 et C_3, D_2 et D_3 appartiennent à un même faisceau.

16. Soient M et N, S et T, U et W les milieux des arêtes BC et DA, CA et DB, AB et DC d'un tétraèdre. Les plans radicaux des sphères (M) et (N), (S) et (T), (U) et (W) décrites sur les mêmes

arêtes comme diamètres, divisent harmoniquement la distance des centres des sphères restantes.

17. Soient A′, B′, C′, D′ les points de contact des faces d'un tétraèdre quelconque ABCD avec les sphères exinscrites dans les trièdres tronqués du tétraèdre. Les triangles podaires de ces points par rapport aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC sont semblables.

18. Les plans des faces d'un tétraèdre T′ de grandeur constante, assujettis à rester parallèles à ceux des faces d'un tétraèdre fixe $T \equiv A_1A_2A_3A_4$, forment avec les trièdres de celui-ci quatre tétraèdres T_1, T_2, T_3, T_4. Pour quelle position de T′, la somme des carrés des rapports d'homothétie des tétraèdres T_1, T_2, T_3, T_4 au tétraèdre T est-elle la plus petite?

19. Le volume du tétraèdre A′B′C′D′ formé par les plans parallèles aux faces d'un tétraèdre ABCD menés par les sommets d'un quadrangle gauche $\alpha\beta\gamma\delta$ ayant ses côtés égaux et parallèles aux médianes du tétraèdre ABCD vaut huit fois le volume de celui-ci et les tétraèdres A′B′C′D′, $\alpha\beta\gamma\delta$ ont le même centre de gravité.

20. Les six plans bissecteurs des trois dièdres d'un tétraèdre suivant les arêtes d'une même face, pris quatre par quatre, forment quinze tétraèdres circonscrits à un même paraboloïde de révolution.

21. Si les plans tangents à la sphère circonscrite aux sommets A, B, C, D et les plans polaires de ceux-ci par rapport à une sphère donnée se rencontrent dans les plans des faces opposées, le tétraèdre ABCD est orthocentrique, et réciproquement.

22. Des parallèles de direction arbitraire menées par les sommets A′, B′, C′, D′ d'un tétraèdre A′B′C′D′ coupent les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC d'un tétraèdre ABCD homothétique au premier en A_1, B_1, C_1, D_1. Si k est le rapport d'homothétie, on a la relation

$$V_1 = -k^2(2k+1)V$$

entre les volumes V_1 et V des tétraèdres $A_1B_1C_1D_1$ et ABCD.

23. On donne un tétraèdre ABCD et un point M. La parallèle menée par M à une arête rencontre les plans des faces qui ne contiennent pas cette arête aux points P et Q. La somme des produits MP.MQ pour les six arêtes, égale la puissance de M par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre.

24. Étant donné un tétraèdre ABCD et un point arbitraire P, montrer que : 1° les plans radicaux d'une sphère quelconque passant par P avec les sphères PBCD, PCDA, PDAB, PABC coupent respectivement les plans BCD, CDA, DAB, ABC suivant quatre droites coplanaires. 2° Si un plan arbitraire coupe les plans BCD, CDA,

DAB, ABC suivant quatre droites Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d, les plans (P, Δ_a), (P, Δ_b), (P, Δ_c), (P, Δ_d) coupent les sphères PBCD, PCDA, PDAB, PABC respectivement suivant quatre cercles d'une même sphère passant par P.

25. On donne un tétraèdre ABCD et un point arbitraire P; on désigne par P_{ab} la puissance du point A par rapport à la sphère décrite sur BP comme diamètre, et l'on demande de déterminer les points P qui satisfont respectivement aux conditions suivantes :

1° $P_{ab} = P_{bc} = P_{cd} = P_{da}, \qquad P_{ba} = P_{cb} = P_{dc} = P_{ad};$

2° $P_{ab} + P_{ac} + P_{ad} = P_{bc} + P_{bd} + P_{ba}$
$= P_{cd} + P_{ca} + P_{cb} = P_{da} + P_{db} + P_{dc}.$

26. Étant donné un tétraèdre ABCD : 1° Lieu des points M tels que la somme des puissances du sommet A pour les sphères décrites sur MB, MC, MD comme diamètres est constante. 2° Trouver le point M pour que les sommes des puissances des quatre sommets A, B, C, D pour les trois sphères correspondantes soient les mêmes pour les quatre sommets et montrer que M coïncide avec le symétrique du centre de gravité par rapport au centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

27. Étant donné un tétraèdre ABCD et un point arbitraire M : 1° la somme des puissances des sommets respectivement, par rapport aux trois sphères décrites sur (MB, MC, MD), (MC, MD, MA), (MD, MA, MB), (MA, MB, MC) comme diamètres, est égale à la somme des carrés des arêtes. 2° Construire le point M quand les sommes des puissances des sommets A, B, C, D relativement aux ternes des sphères précitées, sont proportionnelles à des nombres donnés α, β, γ, δ.

28. Dans un quadrangle gauche ACBD, les plans perpendiculaires en A à AC, en C à CB, en B à BD, en D à DA forment un tétraèdre $A_1C_1B_1D_1$ de centre de gravité G_1. Les puissances de A pour la sphère (G_1C) décrite sur G_1C comme diamètre, de C pour la sphère (G_1B), de B pour la sphère (G_1D), de D pour la sphère (G_1A) sont égales.

29. Dans un tétraèdre ABCD dont les sommets A, B, C sont les inverses par rapport à une sphère arbitraire, de centre D, des sommets d'un triangle rectangle donné, le tétraèdre ABCD et son tétraèdre tangentiel sont, chacun, inscrit à l'autre.

30. Dans un tétraèdre, le rapport des distances du point de Monge et du centre de la sphère circonscrite à la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées faisant entre elles l'angle θ, est égal à $\cos\theta$.

31. Construire un tétraèdre orthocentrique ABCD dont la hauteur DD_h est tangente à la sphère circonscrite et montrer que le centre de la *seconde* sphère des douze points est situé dans le plan de la face ABC.

32. Dans un tétraèdre $T \equiv ABCD$, les plans BCD, CDA, DAB, ABC détachent dans le tétraèdre tangentiel quatre tétraèdres et les plans radicaux des sphères (α), (β), (γ), (δ), inscrites à ces tétraèdres, associées à la sphère circonscrite au tétraèdre T, déterminent un tétraèdre $T' \equiv A'B'C'D'$. 1° Le centre radical des sphères (α), (β), (γ), (δ) coïncide avec le centre d'une des sphères quadritangentes du tétraèdre T'. 2° Les droites AA', BB', CC', DD' concourent en un point dont les distances aux plans des faces du tétraèdre T sont proportionnelles aux carrés des rayons des cercles circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC.

33. Les droites AG, BG, CG, DG qui joignent les sommets d'un tétraèdre ABCD au centre de gravité recoupent la sphère circonscrite en A', B', C', D' et les plans perpendiculaires aux droites en ces derniers points déterminent un tétraèdre $A'_1B'_1C'D'_1$ 1° Les tétraèdres ABCD, $A'_1B'_1C'_1D'_1$ ont même centre de gravité et sont hyperboloïdiques. 2° L'axe non focal de la quadrique de révolution inscrite à $A'_1B'_1C'_1D'_1$, de foyer G, est égal au diamètre de la sphère orthoptique de la sphère de Monge de l'ellipsoïde de Steiner inscrit au tétraèdre ABCD.

34. Si des parallèles à trois arêtes concourantes d'un tétraèdre, menées par un même point, rencontrent les plans des faces en six points à distance finie situés sur une même sphère, celle-ci enveloppe une quadrique de révolution. Généraliser.

35. Six points a, b, c, a', b', c' étant pris sur les arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC d'un tétraèdre, les plans radicaux de la sphère ABCD associée aux sphères $Abca'$, $Bcab'$, $Cabc'$, $Da'b'c'$ coupent les plans BCD, CDA, DAB, ABC suivant quatre génératrices d'un même hyperboloïde, si les droites aa', bb', cc' sont concourantes et réciproquement.

36. Dans un tétraèdre ABCD, le volume du tétraèdre antipodaire du centre de gravité G équivaut à quatre fois celui du tétraèdre antipodaire de l'un quelconque des sommets A, B, C, D par rapport aux tétraèdres GBCD, GCDA, GDAB, GABC respectivement.

37. Dans un tétraèdre ABCD, si un point P est le centre de gravité de son tétraèdre antipodaire, ses coordonnées barycentriques sont inversement proportionnelles aux carrés de ses distances aux sommets A, B, C, D, et réciproquement.

38. Dans un tétraèdre ABCD, les droites qui joignent les sommets

aux points d'intersection V et W des six sphères de similitude de quatre sphères données de centres A, B, C, D coupent la sphère circonscrite aux sommets de deux tétraèdres égaux.

39. Des sommets A, B, C, D d'un tétraèdre comme centres, on décrit les sphères dont les carrés des rayons sont égaux respectivement au tiers de la somme des carrés des arêtes aboutissant au sommet considéré. La sphère orthogonale à ces quatre sphères est concentrique à la sphère des douze points du tétraèdre.

40. Les sphères S_a, S_b, S_c, S_d ont pour centres les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre et les carrés de leurs rayons sont égaux à la demi-somme des carrés des arêtes de la face opposée au sommet considéré; les sphères S'_a, S'_b, S'_c, S'_d ont pour centres les symétriques A_1, B_1, C_1, D_1 de A, B, C, D par rapport au centre G de gravité du tétraèdre et A_1A, B_1B, C_1C, D_1D pour rayons; soient C_a l'intersection de S_a et S''_a, C_b, C_c, C_d celles de S_b et S'_b, S_c et S'_c, S_d et S'_d. Les cercles C_a, C_b, C_c, C_d sont sur une sphère S, de centre G, passant par les intersections de la sphère DE LONGCHAMPS avec la sphère anticomplémentaire de la sphère ABCD et qui coïncide avec la sphère de MONGE de l'ellipsoïde de STEINER circonscrit au tétraèdre ABCD.

41. Les plans tangents en A, B, C, D à la sphère (O) circonscrite à un tétraèdre ABCD forment un second tétraèdre A'B'C'D' et les droites AA', BB', CC', DD' sont des génératrices d'un hyperboloïde (H_1); les intersections des faces homologues des deux tétraèdres sont les génératrices d'un second hyperboloïde (H_2); enfin, les droites joignant les sommets A, B, C, D du premier tétraèdre aux points de LEMOINE des faces opposées sont sur un troisième hyperboloïde (H_3). 1° Les trois hyperboloïdes sont conjugués à un même tétraèdre dont les distances des sommets aux plans des faces du tétraèdre ABCD sont proportionnelles, en valeur absolue, aux rayons des cercles circonscrits à ces faces. 2° Cas où le tétraèdre ABCD est isodynamique.

42. Si un tétraèdre orthocentrique T et un tétraèdre T' se correspondent dans une homologie dont le centre est, à la fois, l'orthocentre de T et le centre de gravité de T', le plan d'homologie est perpendiculaire à la droite d'EULER OG du tétraèdre T. Généraliser.

43. Déterminer un tétraèdre orthocentrique connaissant les aires des faces.

44. Sur les hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique, d'orthocentre H, on marque arbitrairement des points M, N, P, Q. Les six plans menés par l'un des points H, M, N, P, Q perpendiculairement aux arêtes du tétraèdre dont les quatre autres points sont les sommets, rencontrent les arêtes opposées en six points coplanaires.

45. On considère un tétraèdre ABCD trirectangle en D inscrit à une sphère Γ de rayon R. 1° On peut construire un triangle ayant pour côtés les distances des trois sommets d'une même face contenant le sommet D au diamètre de la sphère Γ aboutissant au sommet restant. 2° Si S est l'aire de ce triangle et x, y, z les mesures des arêtes DA, DB, DC du tétraèdre, $xyz = 4RS$.

46. Des sommets A, B, C, D d'un tétraèdre orthocentrique comme centres, on décrit quatre sphères (A), (B), (C), (D) de même rayon qui coupent respectivement les arêtes des faces opposées aux points $(\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2, \alpha_3, \alpha'_3)$, ..., $(\delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2\ \delta_3, \delta'_3)$. Les milieux des segments $(A\alpha_1, A\alpha'_1, A\alpha_2, A\alpha'_2, A\alpha_3, A\alpha'_3)$, ..., $(D\delta_1, D\delta'_1, D\delta_2, D\delta'_2, D\delta_3, D\delta'_3)$ sont 24 points d'une même sphère S_1. Des centres de gravité des faces du tétraèdre comme centres, on décrit les sphères orthogonales à la sphère S_1 qui coupent ces faces suivant des cercles C_a, C_b, C_c, C_d. Ces quatre cercles appartiennent à une même sphère S_2. Lieu de l'intersection des sphères S_1, S_2 lorsque le rayon des sphères (A), (B), (C), (D) varie.

47. Soient AA_h, BB_h, CC_h, DD_h les hauteurs, G le centre de gravité, H l'orthocentre d'un tétraèdre orthocentrique ABCD. Les cercles circonscrits aux triangles AGA_h, BGB_h, CGC_h, DGD_h se coupent en un second point qui est l'intersection de la droite GH avec le plan radical de la sphère circonscrite et de la *seconde* sphère des douze points.

48. Dans un tétraèdre orthocentrique, les droites d'Euler des triangles des faces coupent les plans radicaux de la sphère circonscrite et des sphères décrites sur les médianes comme diamètres en quatre points coplanaires.

49. Dans un tétraèdre orthocentrique ABCD dont les hauteurs sont AA_h, BB_h, CC_h, DD_h et H′ l'inverse de l'orthocentre H par rapport à la sphère circonscrite (O, R), les droites AH′, BH′, CH′, DH′ percent la sphère (O, R) en A_1, B_1, C_1, D_1. Les tétraèdres ABCD et $A_1B_1C_1D_1$ sont semblables et le volume du premier équivaut à 27 fois celui du second.

50. Dans un tétraèdre orthocentrique, si deux points conjugués isogonaux sont conjugués par rapport à la sphère circonscrite, leur sphère podaire est orthogonale à la sphère du faisceau de la sphère circonscrite et de la sphère conjuguée dont le centre est le complémentaire de l'orthocentre.

51. Étant donné un tétraèdre orthocentrique ABCD et deux points variables M et M′ diamétralement opposés sur la sphère circonscrite, les parallèles à AM, BM, CM, DM et à AM′, BM′, CM′, DM′ menées par l'orthocentre H, coupent respectivement les faces en quatre

points situés dans des plans π et π'. 1° Ces plans enveloppent une quadrique de révolution Q inscrite au tétraèdre et concentrique à la *seconde* sphère des douze points. 2° Les plans π et π' se rencontrent en une droite Δ dans le plan directeur de Q relatif au foyer H. 3° La corde de contact tourne autour de H en restant perpendiculaire au plan (H, Δ).

52. Dans tout tétraèdre équifacial, le tétraèdre podaire du centre de la sphère inscrite est équifacial et ceux des centres des sphères exinscrites sont trirectangles aux orthocentres des faces.

53. Si les droites joignant les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre aux points A_1, B_1, C_1, D_1 situés dans les plans des faces opposées sont concourantes et que les droites joignant les mêmes sommets aux conjugués isogonaux A_2, B_2, C_2, D_2 de A_1, B_1, C_1, D_1 dans les triangles des faces correspondantes sont aussi concourantes, le tétraèdre est isodynamique, et réciproquement.

54. Dans un tétraèdre où la différence des carrés des arêtes opposées est la même pour les trois couples : 1° Trois médianes sont égales et la droite d'Euler OG est perpendiculaire à l'une des faces. 2° L'une des hauteurs passe au symétrique de l'orthocentre de la face opposée par rapport au centre du cercle circonscrit. 3° La somme ou la différence des cosinus de deux dièdres opposés du tétraèdre tangentiel est la même pour les trois couples de ces dièdres.

55. Étant donnés deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D', si par les sommets A, B, C, D on mène les plans parallèles a, b, c, d à une direction m et par A', B', C', D' les plans parallèles a', b', c', d' à une direction m' de manière que les droites (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') soient situées dans un même plan (P), celui-ci pivote autour d'un point fixe lorsque les directions m, m' varient.

56. Dans un tétraèdre les droites passant par le pôle harmonique du plan mené par le centre de gravité normalement à la droite d'Euler OG et s'appuyant respectivement sur deux arêtes opposées rencontrent ces arêtes en six points d'une même sphère.

57. Si les carrés des arêtes d'un tétraèdre ABCD vérifient les relations

$$a^2 + ka'^2 = b^2 + kb'^2 = c^2 + kc'^2,$$

k étant un coefficient arbitraire :

1° Le pied de la hauteur DD_h est sur la droite d'Euler O_dH_d de la face ABC et $O_dD_h = \frac{O_dH_d}{k}$.

2° La droite qui joint le centre de la sphère circonscrite (O, R) au

point Q de la médiane DG_d tel que $\frac{OG_d}{QD} = \frac{k}{3}$ est perpendiculaire au plan ABC et les segments AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 passant par Q et terminés aux faces opposées du tétraèdre sont égaux.

3° La projection orthogonale G'_d du centre de gravité G du tétraèdre sur le plan ABC est telle que $\frac{O_dG'_d}{O_dG_d} = \frac{3(k+1)}{4k}$.

4° Si l'on désigne par α et α', β et β', γ et γ' les dièdres opposés du tétraèdre tangentiel du tétraèdre ABCD, on a

$$\cos\alpha' + |k|\cos\alpha = \cos\beta' + |k|\cos\beta = \cos\gamma' + |k|\cos\gamma.$$

5° Si l'on marque sur DO_d le point D_1 tel que $O_dD_1 = k.O_dD$, le tétraèdre $ABCD_1$ est orthocentrique. 6° Cas particulier où $k = -1$.

58. Sur les arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC d'un tétraèdre ou leurs prolongements, des segments $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ et $\alpha'_1\alpha'_2$, $\beta'_1\beta'_2$, $\gamma'_1\gamma'_2$ conservent des longueurs constantes et glissent arbitrairement. Les plans radicaux des sphères $A\beta_1\gamma_1\alpha'_1$ et $A\beta_2\gamma_2\alpha'_2$, $B\alpha_1\gamma_1\beta'_1$ et $B\alpha_2\gamma_2\beta'_2$, $C\alpha_1\beta_1\gamma'_1$ et $C\alpha_2\beta_2\gamma'_2$, $D\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$ et $D\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2$ déterminent par leurs intersections un tétraèdre fixe $A_1B_1C_1D_1$ formant avec ABCD un couple de Möbius. Discussion.

59. Si le plan directeur de l'un des foyers d'une quadrique de révolution circonscrite à un tétraèdre orthocentrique est tangent à la sphère conjuguée, la sphère orthoptique de celle-ci passe par le foyer considéré.

60. Si les plans passant par les arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC d'un tétraèdre isodynamique et par un point arbitraire P d'une de ses médianes rencontrent les arêtes opposées en M', N', Q', M, N, Q respectivement, les axes radicaux des ternes de sphères

(ABCM', ACDQ, ABDN), (BCDQ, BACN', BADM),
(CBDN, CABQ', CDAM), (DBCM', DCAN', DABQ')

sont concourants.

61. Dans un tétraèdre isodynamique ABCD, les rayons des sphères de Tücker passant, chacune, par un sommet sont proportionnels aux distances des plans des faces au centre radical des sphères circonscrites aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC et orthogonales aux sphères de centres A, B, C, D dont les rayons sont proportionnels à ceux des cercles circonscrits aux faces opposées.

62. Déterminer les sphères centrées aux sommets A, B, C, D d'un tétraèdre, de manière que leur centre radical soit celui des sphères circonscrites aux faces BCD, CDA, DAB, ABC qui les coupent orthogonalement.

63. Si dans un tétraèdre ABCD le tétraèdre formé par les points de rencontre A′, B′, C′, D′ de la sphère circonscrite avec les céviennes d'un point P est homothétique au tétraèdre podaire de P, l'axe focal de la quadrique de révolution inscrite de foyer P, passe par le centre de la sphère circonscrite.

64. Dans un tétraèdre T, les sphères décrites sur les cercles orthoptiques des ellipses de STEINER inscrites aux triangles des faces BCD, CDA, DAB, ABC comme grands cercles sont orthogonales aux sphères (A), (B), (C), (D) ayant pour diamètres les distances du point de MONGE aux sommets. Les plans polaires des centres de gravité des faces par rapport aux sphères correspondantes (A), (B), (C), (D) rencontrent-elles les plans des mêmes faces suivant quatre droites hyperboloïdiques? — Cas où le tétraèdre T est orthocentrique.

65. Dans quel tétraèdre ABCD, les droites AA_n, BB_n, CC_n, DD_n qui joignent les sommets aux points potentiels d'ordre n des faces BCD, CDA, DAB, ABC concourent-elles en un point P? Lieu de P quand n varie.

66. Soient I, I_a, I_b, I_c, I_d, I_1, I_2, I_3 les centres des sphères tangentes aux quatre plans des faces d'un tétraèdre ABCD. Si l'on considère des forces dirigées des centres de ces sphères vers les faces du tétraèdre et respectivement égales aux inverses des rayons correspondants, ces 32 forces se font équilibre.

67. Les plans $B_hC_hD_h$ et $G_bG_cG_d$, $C_hD_hA_h$ et $G_cG_dG_a$, $D_hA_hB_h$ et $G_dG_aG_b$, $A_hB_hC_h$ et $G_aG_bG_c$ déterminés par les orthocentres et les centres de gravité des faces d'un tétraèdre orthocentrique ABCD, se coupent suivant quatre droites Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d. Démontrer que les plans (A, Δ_a), (B, Δ_b), (C, Δ_c), (D, Δ_d) sont perpendiculaires à la droite qui joint l'orthocentre et le centre de gravité du tétraèdre.

68. Les six plans radicaux des sphères décrites sur les cercles orthocentroïdaux des faces d'un tétraèdre comme grands cercles passent par les milieux des arêtes. Même propriété quand on remplace les cercles orthocentroïdaux par les cercles des neuf points, les cercles conjugués et les cercles orthoptiques des ellipses de STEINER inscrites ou circonscrites aux faces du tétraèdre.

69. Étant données quatre sphères (O_a), (O_b), (O_c), (O_d), tangentes trois à trois, dont les centres sont dans un plan (P), et les sphères (O'_a), (O'_b), (O'_c), (O'_d), tangentes respectivement aux sphères [(O_b), (O_c), (O_d)], [(O_c), (O_d), (O_a)], [(O_d), (O_a), (O_b)], [(O_a), (O_b), (O_c)], les points de rencontre A, B, C, D des diamètres des sphères (O_a), (O_b), (O_c), (O_d) perpendiculaires au plan (P), respectivement avec les sphères (O_a), au-dessous de P, (O_b), (O_c), (O_d), au-dessus de (P), sont les sommets d'un tétraèdre orthocentrique dont les hauteurs AA_h,

BB_h, CC_h, DD_h passent par les points A_1, B_1, C_1, D_1 où les diamètres des sphères (O'_a), (O'_b), (O'_c), (O'_d), perpendiculaires au plan (P), rencontrent ces sphères, au-dessus de ce plan.

70. Soient A_1, B_1, C_1, D_1 les points qui divisent les céviennes AA', BB', CC', DD' d'un point arbitraire P, par rapport à un tétraèdre ABCD, de sorte que

$$\frac{AA'}{A'A_1} = \frac{BB'}{B'B_1} = \frac{CC'}{C'C_1} = \frac{DD'}{D'D_1} = m,$$

et A_2, A_3, A_4 les points où les droites A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1 percent le plan BCD. Les triangles A_2CD, A_3DB, A_4BC ont des aires équivalentes. Cas où $m = 2$.

71. Si les centres de quatre sphères quadritangentes sont situés sur la sphère circonscrite, le tétraèdre est équifacial et réciproquement.

72. Si les plans BCP, CDP, BDP, ADP, ACP, ABP, passant par les arêtes d'un tétraèdre ABCD et par un point arbitraire P, coupent les arêtes opposées DA, AB, AC, BC, BD, CD en N, U, S, M, Q, W, les axes radicaux des ternes de sphères (ABCN, ACDU, ABDS), (BCDU, BACQ, BADM), (CBDS, CABW, CADM), (DBCM, DACQ, DABW), forment un quadruple hyperboloïde.

73. Si les puissances des sommets A, B, C, D d'un tétraèdre T par rapport à des sphères S, S_1, S_2, S_3, S_4 sont proportionnelles aux nombres (l^2, m^2, n^2, p^2), $(-l^2, m^2, n^2, p^2)$, $(l^2, -m^2, n^2, p^2)$, $(l^2, m^2, -n^2, p^2)$, $(l^2, m^2, n^2, -p^2)$, le centre radical de S_1, S_2, S_3, S_4 et celui des sphères des faisceaux formés par S avec les plans BCD, CDA, DAB, ABC et passant respectivement par A, B, C, D, coïncident avec le pôle dans T du plan radical des sphères ABCD et S.

74. Aux sommets d'un tétraèdre ABCD, on construit les vecteurs $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ de grandeurs données et portés par des droites parallèles. Déterminer la direction de celles-ci pour que A', B', C', D' soient coplanaires. — Trois des vecteurs peuvent-ils être coplanaires ? Discuter.

75. Dans un tétraèdre, si A, B, C, D et a, a', b, b', c, c' désignent les mesures des aires BCD, CDA, DAB, ABC et des dièdres suivant les arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC, le quadruple de la somme

$$\sum\left(B.\,C\cos^2\frac{a'}{2} + D.\,A.\cos^2\frac{a}{2}\right)$$

a même mesure que le carré de la surface totale.

76. Soient un tétraèdre $T \equiv ABCD$ et les droites a, b, c, d menées par un point P de l'espace parallèlement à quatre directions

données. Les plans BCD, CDA, DAB, ABC sont rencontrés par a en (l_1, m_4, n_3, p_2), par b en (l_2, m_1, n_4, p_3), par c en (l_3, m_2, n_1, p_4), par d en (l_4, m_3, n_2, p_1). Il existe, en général, une position du point P et une seule pour laquelle chacun des quaternes (l_1, m_1, n_1, p_1), (l_2, m_2, n_2, p_2), (l_3, m_3, n_3, p_3), (l_4, m_4, n_4, p_4) soit coplanaire. — Cas où a, b, c, d sont parallèles aux médianes de T.

77. Si S_a, S_b, S_c, S_d sont les aires des faces opposées aux sommets A, B, C, D d'un tétraèdre de volume V et si α, β, γ, δ sont les angles qu'une droite quelconque fait avec les plans des mêmes faces, on a

$$\Sigma \overline{BC}^2 \, S_b S_c \sin\beta \sin\gamma = -9 \, V^2$$

(R. Blanchard)

78. Si les directions des hauteurs d'un tétraèdre appartiennent à 1, 2 ou 3 cônes de révolution, il manque 1, 2 ou 3 sphères exinscrites dans les combles du tétraèdre, et réciproquement. L'axe de chaque cône est parallèle à l'intersection des plans bissecteurs intérieurs de deux dièdres.

(A. Marmion)

79. Si un tétraèdre a deux dièdres opposés supplémentaires, le tétraèdre des centres de ses sphères exinscrites a deux dièdres opposés droits. Si un tétraèdre a deux dièdres opposés égaux, le tétraèdre des centres de la sphère inscrite et des trois sphères des combles a deux dièdres opposés droits. Un tétraèdre ne peut avoir deux couples de dièdres opposés supplémentaires.

(A. Marmion)

80. Si M est un point de la sphère podaire de deux points P, P′ isogonaux par rapport à un tétraèdre, les sphères de centres P, P′ et passant par M coupent chaque face du tétraèdre suivant des cercles orthogonaux.

(A. Marmion)

81. Deux tétraèdres orthogonalement affins sont orthologiques gauches.

(M. Monseau)

Question 43.

Déterminer un tétraèdre orthocentrique, connaissant les aires des quatre faces.

Solution par A. Marmion [1].

La question a été traitée analytiquement par Lagrange (*Mém. Acad. Berlin*, 1773, p. 160; *Œuvres*, t. III, p. 662) sous la forme suivante : *Déterminer le tétraèdre de volume maximum dont les aires des faces sont données.* Les formules auxquelles il arrive montrent en effet que le tétraèdre est orthocentrique, ainsi que le fait remarquer P. Serret (*Journ. de Liouville*, 1862, p. 377), qui démontre géométriquement la propriété mais sans s'occuper de la détermination du tétraèdre. Lagrange arrive pour cette détermination à une équation du quatrième degré, montre qu'elle a *au moins* une racine réelle positive, calcule les arêtes en fonction de cette racine, mais ne s'occupe pas des conditions dans lesquelles ces arêtes peuvent appartenir à un tétraèdre. Enfin, Iyengar (*The Mathematics Student*, 1947, p. 104) résout le même problème, arrive à une équation du quatrième degré qui se prête bien à la discussion et montre que si chaque aire donnée est inférieure à la somme des trois autres il y a un tétraèdre réel et un seul répondant à la question. (En réalité il y a deux tétraèdres symétriques.)

On sait que quatre vecteurs $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ perpendiculaires aux faces d'un tétraèdre ABCD, dirigés vers l'extérieur et ayant pour longueurs les aires de ces faces ont une somme nulle, c'est-à-dire sont équipollents aux côtés d'un quadrilatère gauche $A_1B_1C_1D_1$. On voit que chacune des aires doit être inférieure à la somme des trois autres.

Le volume du tétraèdre ABCD est égal au sixième du produit scalaire d'un des vecteurs d'un trièdre (D par exemple) par le moment ou produit vectoriel des deux autres vecteurs du même trièdre. (Ad. Mineur, *Géométrie vectorielle*, I, p. 55.)

$$(1) \qquad 6 \text{ vol. } DABC = \bar{a} \,\mathcal{M}\, \bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \Delta,$$

a_x, a_y, a_z, ..., étant les composantes des vecteurs $\bar{a} = \overline{DA}$, $\bar{b} = \overline{DB}$, $\bar{c} = \overline{DC}$ sur trois axes rectangulaires. Dans cette expression, et *en ne considérant le volume qu'en valeur absolue*, on peut remplacer les vecteurs $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ non seulement par trois vecteurs d'un autre trièdre, mais aussi par trois vecteurs équipollents à trois arêtes non coplanaires quelconques du tétraèdre. Par exemple, si l'on remplace

[1] *Mathesis*, 1953, p. 69 (Question 3253 proposée par V. Thébault).

$\overline{DC} = \bar{c}$ par $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$, on a, puisque $\mathfrak{M}\bar{b}\bar{b}$ est nul, $\mathfrak{M}\bar{b}(\bar{c} - \bar{b}) = \mathfrak{M}\bar{b}\bar{c}$.

Les vecteurs $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ perpendiculaires chacun à une face de ABCD et égaux à l'aire de cette face sont les demi-moments ou demi-produits vectoriels de deux arêtes du tétraèdre ABCD. Avec ces quatre vecteurs on peut former six quadrilatères gauches, et les tétraèdres de mêmes sommets que chacun de ces quadrilatères ont tous même volume V_1 égal au sixième du produit scalaire de l'un de ces vecteurs par le moment de deux autres, par exemple $\bar{\alpha}\mathfrak{M}\bar{\beta}\bar{\gamma}$, où l'on peut supposer

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\,\bar{b}\bar{c}, \qquad \bar{\beta} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\,\bar{c}\bar{a}, \qquad \bar{\gamma} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\,\bar{a}\bar{b}.$$

Les composantes de $\mathfrak{M}\bar{b}\bar{c}$, $\mathfrak{M}\bar{c}\bar{a}$, $\mathfrak{M}\bar{a}\bar{b}$ suivant les axes coordonnés étant les premiers mineurs de Δ (*loc. cit.* p. 52) et le déterminant des premiers mineurs d'un déterminant du troisième ordre étant égal au carré de celui-ci, on a

$$(2) \qquad 6\,V_1 = \frac{1}{8}(6\,V)^2 \quad \text{ou} \quad V_1 = \frac{3}{4}V^2.$$

La recherche du maximum de V se ramène donc à celle du maximum de V_1.

On sait que le volume d'un tétraèdre est aussi égal aux $\frac{2}{3}$ du produit des aires de deux faces par le sinus du dièdre compris, divisé par la longueur de l'arête de ce dièdre (Dostor, N. A. 1867, p. 413) :

$$(3) \qquad V_1 = \frac{2}{3}\left[\frac{\text{Surf}\,(A_1B_1C_1) \times \text{Surf}\,(A_1D_1C_1)}{A_1C_1}\right]\sin\varphi,$$

en appelant φ l'angle du dièdre A_1C_1. Cet angle étant indépendant de l'expression entre crochets, pour que V_1 soit maximum, il faut que φ soit droit. Le même raisonnement appliqué aux faces $A_1B_1D_1$, $C_1B_1D_1$ montre que le dièdre formé par ces deux faces est également droit. Or, de

$$A_1B_1 \perp ABC,\ B_1C_1 \perp BCD,\ C_1D_1 \perp CDA,\ D_1A_1 \perp DAB,$$

on tire

$$(4) \quad AB \perp A_1B_1D_1,\ BC \perp A_1B_1C_1,\ CD \perp B_1C_1D_1,\ DA \perp C_1D_1A_1.$$

Par suite, $AB \perp CD$, $BC \perp DA$, ce qui montre que *le tétraèdre* ABCD *le volume maximum pour des faces d'aires données est orthocentrique.* Pour le tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ correspondant, le coefficient de $\sin\varphi$ dans

l'expression (3), qui ne dépend que de la variable $A_1C_1 = x$, doit être maximum, ce qui donnera une condition pour déterminer x. En élevant au carré, l'expression

$$F(x^2) = \frac{[x^2-(\alpha+\beta)^2][x^2-(\alpha-\beta)^2][x^2-(\gamma+\delta)^2][x^2-(\gamma-\delta)^2]}{x^2}$$

doit être maximum. Posant $x^2 = t$, on doit avoir

$$(5) \quad \frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{1}{t-(\alpha+\beta)^2} + \frac{1}{t-(\alpha-\beta)^2} + \frac{1}{t-(\gamma+\delta)^2} + \frac{1}{t-(\gamma-\delta)^2} - \frac{1}{t} = 0.$$

Soient $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$ les quantités $(\alpha-\beta)^2$, $(\gamma-\delta)^2$, $(\alpha+\beta)^2$, $(\gamma+\delta)^2$ rangées par ordre de grandeur croissante, les deux premières étant les carrés des différences. Il y a une racine de l'équation dans chacun des intervalles $-\infty$, 0; t_1, t_2; t_2, t_3; t_3, t_4. Comme x^2 doit être supérieur à $(\alpha-\beta)^2$ et $(\gamma-\beta)^2$, et inférieur à $(\alpha+\beta)^2$ et $(\gamma+\delta)^2$ (pour que les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_1D_1C_1$ puissent exister), la seule racine qui convienne est celle de l'intervalle t_2, t_3. La valeur de x correspondante permettra de construire les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_1D_1C_1$ et il suffira d'en faire tourner un autour de A_1C_1 jusqu'à ce que le dièdre formé par les faces soit droit. Il y a deux positions correspondant à des rotations de $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ à partir de la position où les plans coïncident. On aura ainsi deux quadrilatères $A_1B_1C_1D_1$ et $A_1B_1C_1D_1'$ symétriques par rapport à un plan.

Étant donné un quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$, les conditions de perpendicularité (4) montrent que les côtés du quadrilatère gauche ABCD sont perpendiculaires aux faces A, B, C, D du tétraèdre. Ils doivent donc être proportionnels à ces faces et dirigés tous vers l'extérieur ou tous vers l'intérieur. En prenant le facteur de proportionnalité k, le volume serait, en vertu de (2),

$$V' = k^3 \cdot \frac{3}{4} V_1^2 = k^3 \cdot \frac{27}{64} V^4.$$

Pour que $V' = V$, il faut que le facteur de proportionnalité soit

$$k = \frac{4}{3V} = \frac{2}{\sqrt{3V_1}}.$$

Le quadrilatère gauche $A_1B_1C_1D_1$ donnera ainsi deux quadrilatères ABCD symétriques par rapport à un point, suivant qu'on prend les

perpendiculaires aux faces dirigées vers l'extérieur ou vers l'intérieur. Comme la symétrie par rapport à un point ou par rapport à un plan donne deux figures égales, les deux quadrilatères ABCD donnés par $A_1B_1C_1D_1$ seront égaux aux premiers. En définitive, on aura deux tétraèdres ABCD symétriques.

La seule condition de possibilité est celle de pouvoir former un quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$, c'est-à-dire, ainsi que nous l'avons déjà indiqué, que chacune des aires des faces soit inférieure à la somme des trois autres.

NOTE. — Les relations (2) que PAINVIN trouve à l'aide des déterminants (N. A. 1862, p. 420), découlent de considérations géométriques élémentaires [1].

En effet, si AH et A_1H_1 représentent une des hauteurs des tétraèdres ABCD et $A_1B_1C_1D_1$, on obtient, d'abord,

$$V_1 = \frac{1}{3} A_1H_1 . \frac{1}{2} C_1B_1 . C_1D_1 \sin (C_1B_1, C_1D_1),$$

ensuite,

$$V_1 = \frac{1}{6} A_1H_1 . B . C . \sin a' = \frac{1}{6} A_1H_1 . \frac{3}{2} a' . V = \frac{1}{4} a' . V . A_1H_1,$$

d'après la formule classique

$$\sin c = \frac{3}{2} . \frac{c . V}{C . D},$$

et enfin les égalités

$$V_1 = \frac{1}{4} V . A . A_1H_1 = \frac{3}{4} V^2,$$

car

$$A_1H_1 = A_1B_1 \sin (BCD, AD) = A . \frac{AH}{AD} = A . \frac{AH}{a'}.$$

[1] Communiquées par A. BALLICIONI.

BIBLIOGRAPHIE

2. Cl. Servais, BB, 1924 (10e, 11e, 12e communications).
13. J. Neuberg, *Tohoku Mathematical Journal*, 1913, p. 103.
14. W. E. Byrne, AM, 1953, p. 52.
15. J. Neuberg, M. 1891, p. 50, question 706.
— M. 1914, p. 279, question 1939.
17. R. Deaux, M. LIX (1950), p. 88.
19. R. Deaux, M. LXI (1952), p. 97.
21. R. Blanchard, M. LIX (1950), p. 290.
27. 28. A. Ballicioni.
33. R. Bouvaist, SB. 1937, p. 161.
43. Cl. Servais, BB. Un groupe de trois tétraèdres, pp. 55 à 70.
45. F. de Brun, M. 1910, p. 115 (second exemple).
47. R. Bouvaist, M. LIV (Supplément, p. 25).
68. A. Marmion, M. LVIII (1949), p. 42; A. de Majo, IRM. t. 3, 1947, p. 88.
72. A. de Majo, AM. vol. 57, 1950, p. 663.
75. A. Marmion, M. 1953, p. 49.
96. J. Neuberg, BB (1884), Mémoire sur le tétraèdre, p. 17.
116. R. Bouvaist, M. LV (1946), p. 354.
117. R. Blanchard, M. LVI (1947), p. 156.
123. [1]. N. A. Court. On the Apollonian Spheres of a Tetrahedron [Tohoku Mathematical Journal, 39 (1934), p. 264-268].
123. [2]. P. Delens. Sur la géométrie du tétraèdre [Mathesis 51 (1937), p. 119-127 et 444-456; 52 (1938), p. 62-79].
125. [3]. P. Delens. Sur quelques acquisitions de la géométrie du tétraèdre [Journal de Mathématiques pures et appliquées (9) 18 (1939), p. 303-321].
125. [4]. J. W. Peters. A configuration associated with a Tetrahedron [National Mathematics magazine, Louisiana 14, nov. 1939, n° 2].
129. [5]. Cyparissos Stephanos. Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres [Bulletin des Sciences mathématiques (2), 3 (1879), p. 424-456].
129. [6]. G. Veronese. Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e di superficie di secundo ordine [Atti della Reale Accademia dei Lincei (3) 4 (1879-1880), p. 132-149].
141. P. Delens, M. 1937, 448.

147. J. Neuberg, BB. (1884), Mémoire sur le tétraèdre, p. 36.
151. R. Bouvaist, M. LIV, (Supplément, p. 17).
152. R. Bouvaist, M. LIV, (Supplément, p. 19).
164 à 167. R. Blanchard, M. LVIII (1949), p. 330.
168 à 170. R. Blanchard, M. LVII (1948), p. 37.
171 [1]. R. Goormaghtigh, M. 1938, p. 230.
177. J. Andersson.