Algèbre éclectique, Un bouquet de thèmes et d'exercices pour le M1
Gentiana Danila, Jean-Denis Eiden et Rached Mneimné
Calvage et Mounet, 2021, ? ? ? pages.

La présente recension n'est pas une délicatesse que je fais à l'un ou l'autre de mes amis que sont les auteurs du livre dont il est question ici. Elle m'est dictée par le réel plaisir que j'ai eu à examiner cet ouvrage de mathématiques, qui rassemble des thèmes et des exercices issus du programme d'Algèbre du M1, et disons pour être franc, du M1+, voire M1++. Les auteurs n'en perdent pas pour autant la tête et restent parfaitement dans un habit modeste, en partageant leurs secrets de fabrication tout en nous invitant franchement et généreusement dans leur *atelier d'orfèvrerie*, où se déclinent à foison de jolies idées, de beaux résultats et de belles démonstrations. Mais, attention ! Ce n'est pas une réplique des *Raisonnements divins*, de Martin Aigner et Günther Show.

L'introduction se lit (ou se dévore) avec plaisir. Elle raconte le projet, les pensées qui ont animé ses auteurs ; on y trouve des conseils, livrés avec détachement et grâce, sans trop y croire. Cela n'est pas sans rappeler le cas de figure du futur médecin à la retraite, qui déjà conseille plus qu'il ne soigne. Puis, arrive un aperçu et une description de chaque chapitre. C'est ce que nous ferons pour notre part ci-après en cherchant à ne pas trop répéter ce qui est dit dans la partie liminaire du livre lui-même.

Il est composé de treize chapitres ; de conception différente, le dernier d'entre eux rassemble en fait des textes d'examen intéressants et formateurs, posés en M1 à Paris, et dont la plupart sont corrigés. Chacun de ces chapitres aurait pu constituer à lui seul tout un opuscule sur le thème annoncé dans son titre. Non pas qu'ils soient autonomes, mais ils peuvent se lire indépendamment, modulo quelques petits efforts. Un avant-propos permet aux auteurs de fixer les notations de l'ensemble, et de rappeler les théorèmes à venir, le tout dans une langue sophistiquée et méditée. Le ton est donné : le livre est fait dans de la dentelle fine.

▷ Le livre démarre avec un chapitre visiblement important aux yeux des auteurs, en l'occurrence *Les anneaux d'endomorphismes des groupes abéliens*. Ce chapitre cherche essentiellement à donner au lecteur une vue de la théorie des modules différente de ce que la littérature usuelle a adopté en la matière, à savoir des espaces vectoriels sur un anneau, en place d'un corps. Un module M sur l'anneau R est en fait une *action* de l'anneau R sur un groupe abélien, à savoir son primordial groupe abélien $(M, +)$ sous-jacent. Dans cette approche, un élément quelconque $a \in R$ agit sur les éléments de M, autrement dit en respectant la loi $+$ omniprésente ; penser en effet au $K[X]$-module E_u défini par la donnée d'un endomorphisme u de l'espace vectoriel E. Plusieurs exercices sont traités, dont la détermination des anneaux de cardinal p^2 (et leur minutieuse étude) et l'introduction de l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques comme l'anneau des endomorphismes du groupe U_{p^∞} de toutes les racines $(p^k)^{\mathrm{e}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$ (en attendant de le voir comme limite projective des anneaux $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$). J'ai noté l'examen original de la situation où l'anneau $\mathrm{End}(M)$ des endomorphismes de $(M, +)$ est un corps, comme c'est le cas avec $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec p premier) ou le groupe additif $\mathbb{Q}$ des rationnels. C'est l'occasion de rencontrer les groupes indécomposables et les groupes divisibles (version groupes des modules injectifs).

▷ Le chapitre suivant est plus élémentaire et traite des groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Ce chapitre contient deux parties distinctes, une première (élémentaire) qui examine des choses bien connues qu'il ne s'agit pas là d'énumérer, et dont plusieurs auteurs ont fait le tour, et une seconde qui examine les groupes finis dont les 2-Sylow sont cycliques (et où l'on découvre entre autres que de tels groupes ne peuvent jamais être simples) ; on y dissèque pour commencer un exemple d'un tel groupe, qui est d'ordre 72. Et, pourtant, on trouve dans la partie élémentaire des choses qui n'existent pas ailleurs. La première, qui est d'ailleurs si vraie et de si bon sens, nous apprend que tout ce qui relève de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est déjà encodé dans le groupe abélien sous-jacent. La deuxième est l'usage non frileux des treillis pour mener l'étude de ces groupes et de leurs sous-groupes, détermination des p-Sylow, du sous-groupe dérivé, du socle ou du Frattini, etc. Cette partie élémentaire débouche sur l'étude des quatre produits semi-directs $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et l'étude du groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, dont les 2-Sylow (d'ordre 16) sont de cette sorte.

▷ Le chapitre III est consacré aux anneaux généraux. Tout d'abord, la notion d'idempotents, le nilradical et le radical de Jacobson sont présentés, puis de nombreux exemples d'anneaux commutatifs sont étudiés : les anneaux principaux, les anneaux locaux, noethériens, artiniens, semi-simples, et tout y passe (ou presque). On termine avec l'étude des anneaux de fractions (notamment la localisation dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) et du spectre premier de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[X]$. Un appendice examine, avec de jolis dessins à l'appui, la démonstration de Zagier en une (longue) phrase du théorème des deux carrés.

▷ Le chapitre IV est l'occasion d'une pause. Il est consacré à un texte d'examen de niveau L3 autour de l'anneau $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$. Le corrigé est impeccable, et constitue une excellente préparation (mais aussi un terrain d'entraînement) au chapitre II.

▷ Les choses se corsent avec les deux chapitres suivants, consacrés respectivement aux polynômes symétriques et à la théorie algébrique des nombres. Il leur manque chacun une introduction, qui prépare à leur contenu, l'explique et le défende.

▷▷ On trouve dans le premier des deux un certain nombre de coquilles malheureuses (de toutes sortes), qui laissent croire que le chapitre n'a pas été suffisamment finalisé. C'est pourtant une véritable mine de calculs explicites et de choses peu connues des non-spécialistes. On trouve aussi une réelle volonté de la part des auteurs de dépasser la limite des deux ou trois résultats classiques sur les fonctions symétriques élémentaires σ_ℓ, les sommes de Newton, sur la notion de discriminant, et les quelques anciens et nouveaux calculs faisant intervenir le polynôme V de Vandermonde. L'approche est faite en terme d'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ou de son sous-groupe alterné $\mathfrak{A}_n$. Un polynôme P invariant sous l'action de ce dernier groupe s'écrit comme $P = S_1 + S_2 V$, où les S_i sont symétriques. Ainsi, une partie est consacrée aux déterminants de Vandermonde lacunaires, qui forment une bonne introduction aux polynômes de Schur, et aux deux formules de Jacobi-Trudy. Les polynômes de Schur (qui interviennent dans la théorie des représentations de $\mathfrak{S}_n$) sont traités ici pour eux-mêmes et sont introduits comme les quotients de déterminants alternants par le Vandermonde. Le chapitre se termine par la mise en évidence de quatre bases cousines de l'espace vectoriel de dimension 8 des polynômes homogènes de degré 7 en trois variables, et de leurs expressions en fonction des σ_ℓ.

▷▷ Le second de ces chapitres relève de la théorie algébrique des nombres. Les auteurs y étudient avec force exemples les corps de nombres et leurs anneaux d'entiers (qui sont des anneaux de Dedekind). La constante de Minkowski attachée à un tel corps est introduite et mise à l'œuvre, comme un véritable joujou, pour décortiquer une dizaine d'exercices non triviaux. Une démonstration de la loi de réciprocité quadratique arrive, en annexe, en fin de chapitre ; elle est due à Zolotarev, et est illustrée par un jeu de position avec des écoliers (ou soldats) répartis dans un quadrillage rectangulaire.

▷ Les chapitres VII et VIII traitent d'algèbre linéaire et plus particulièrement de réduction des endomorphismes. L'approche est variée, avec les $K[X]$-modules ou sans ceux-ci. Le lien entre ces approches est fait et disséqué. C'est l'occasion d'introduire le riche vocabulaire des R-modules : *module simple, semi-simple, cyclique, indécomposable, etc., radical, socle et tête d'un module* … Deux problèmes non triviaux sont l'occasion dans le chapitre VII de réfléchir sur les avantages particuliers des deux approches, le premier —qui fait la réduction des matrices M_A, pour $A \in \mathrm{M}(n, K)$, de la forme $M_A = \begin{bmatrix} 0_n & A \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{bmatrix}$— débouchera sur de nécessaires produits tensoriels inhérents à la situation, et l'autre problème traite des matrices de $\mathrm{M}(n, \mathbb{Z})$ telles que $M^3 = 2\mathrm{I_n}$, où l'on se sert du fait que $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ est principal.
Le chapitre VIII, intitulé *Un zeste d'algèbre linéaire*, nous offre une étude particulièrement bien faite de l'algorithme de Newton-Raphson, qui intervient dans la décomposition de Dunford d'une matrice (en semi-simple + nilpotent). Un autre problème (de type élémentaire, quoique assez subtil) examine l'écriture de deux matrices M_1 et M_2 sous forme $M_1 = AB$ et $M_2 = BA$, appelées ici *matrices croisées*. De nombreux exercices, remarques et résultats parsèment ces chapitres et en font une véritable mine d'idées pour les débutants ou les spécialistes. On revient en particulier sur deux façons de calculer le cardinal du cône nilpotent sur un corps fini, que l'on accompagne de remarques pertinentes.

▷ Le chapitre IX est court et s'occupe des algèbres semi-simples. On y trouve les théorèmes de Burnside et de Wedderburn en rapport avec le sujet, traités en toute généralité (sur un corps algébriquement clos) de façon particulièrement claire et lucide.

▷ Les corps finis sont au cœur du chapitre X. C'est un sujet traité dans tous les textes sur la théorie de Galois, mais les soixante-douze pages consacrées au sujet sont là aussi dans un style et dans un parfum très originaux, et de surcroît utiles pour enfin manipuler avec aise les éléments de ces corps et y faire des calculs explicites. L'étoile kellerienne apparaît ici pour illustrer avec une symétrie rotationnelle le treillis des sous-groupes du groupe abélien élémentaire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La structure du groupe commutatif $\mathrm{SO}(2, \mathbb{F}_q)$ est également étudiée avec soin.

▷ La botanique fine des petits groupes arrive en chapitre IX. Les petits groupes et leurs subtilités sont un sujet (controversé) qui attire les uns et rebute d'autres. J'invite ceux qui veulent s'y plonger à ne pas y rester longtemps en apnée. L'idée originale de ce chapitre est de mettre la main sur un groupe fini dont les 2-Sylow sont cycliques ou diédraux, et d'en déduire un groupe de taille double, appelé *le binarisé de G*, et ayant un unique sous-groupe d'ordre 2 lequel redonne en quotient le groupe dont on est parti. Cela permet de mettre un peu d'ordre dans un petit sous-bois de la grande forêt des groupes de petites tailles. De ce très long chapitre, qui s'étale sur plus de quatre-vingt-dix pages, j'ai distingué plutôt les jolis graphes, dont celui de Petersen, que l'on découvre tapis au sein du treillis des sous-groupes du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$. Ici, comme ailleurs, les dessins, exécutés souvent par Alain Debreil (auteur du fort joli livre *Groupe finis, et treillis de leurs sous-groupes*) avec un grand soin, sont très beaux et justifient à eux seuls que l'on acquiert ce livre dans sa bibliothèque. Quelques fleurs apparaissant dans la géométrie du Cube sont aussi à admirer.

$\triangleright$ Le dernier chapitre, qui déborde largement sur le chapitre des problèmes, couvre la correspondance de Galois sur $\mathbb{Q}$. C'est un chapitre particulièrement pédagogique, clair et qui met en évidence la correspondance comme application équivariante entre deux treillis sur lesquels agit le groupe des automorphismes d'un corps de nombres, un du côté des sous-groupes et un autre du côté des sous-corps. Les exemples non triviaux, d'autres bien sûr que le suranné groupe de Galois $\mathcal{D}_4$, sont là pour nous faire réfléchir et divertir à la fois, par exemple le produit $\mathcal{D}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le groupe abélien $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$, le groupe $\mathfrak{S}_4$, le groupe $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ et pourquoi pas le groupe des homothéties-translations du plan affine sur $\mathbb{F}_3$!

On voit, à l'issue de ce survol, que le livre qui concerne cette recension sort des sentiers battus, et qu'il laissera une empreinte décisive sur la façon dont on étudiera pendant un temps l'algèbre du M1. Pour les auteurs, qui ont dû en ciselant leur ouvrage partager ensemble beaucoup de bonheur, *le but était tout simplement dans le chemin* ! Du côté du lecteur actif, c'est un livre d'algèbre éclectique à recommander avec beaucoup de confiance à tout étudiant ou enseignant curieux, de bon niveau. Enfin, les rédacteurs de sujets de concours y trouveront de quoi satisfaire leur quête de matériel peu commun, en vue d'épreuves originales et instructives.

Olivier Brunat, Université de Paris, site des Grands moulins