Chapitre IV

Exercices supplémentaires

Ex. 145. *Partiel 11 mai 1989 Question de cours* *./exossup/exo-1/texte.tex*

Montrer que la famille de fonction méromorphes

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2}$$

est normalement sommable sur toute bande verticale de largeur finie.
Comparer la somme f à la fonction méromorphe

$$z \longmapsto \frac{\pi^2\cos(\pi z)}{(\sin(\pi z)^2)}.$$

Ex. 146. *Examen 9 Juin 1989 I* *./exossup/exo-2/texte.tex*

Soit k un nombre complexe donné tel que $|k|>1$.
On désigne par $\mathscr{G}$ l'ensemble des fonctions f vérifiant les deux conditions suivantes :

i) f est méromorphe sur $\mathbb{C}^\star$ et non identiquement nul.

ii) ii existe un nombre complexe $\lambda(f)$, dépendant de f, tel que

$$f(kz) = \lambda(f)f(z)$$

pour tout $z\in\mathbb{C}^\star$ qui n'est pas un pôle de f.

1.- Montrer que $\mathscr{G}$ est un groupe multiplicatif.

2.- On suppose que $f\in\mathscr{G}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}^\star$.
En utilisant un développement convenable de f, montrer qu'il existe $n\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in\mathbb{C}^\star$, tels que

$$f(z) = cz^n.$$

3.- Pour $r>0$, on désigne par Ω_r la couronne compacte

$$\Omega_r = \{z\in\mathbb{C}\ ;\ r\leqslant |z|\leqslant |k|r\}.$$

Étant donnés $r>0$, $f\in\mathscr{G}$, montrer qu'il existe $\rho\in\mathbb{R}$ vérifiant $r\leqslant\rho\leqslant|k|r$, tel que f n'ait ni zéro, ni pôle, sur le bord de la couronne Ω_ρ.
Étudier la différence

$$\int_{C^+(0,\ |k|\rho)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z - \int_{C^+(0,\ \rho)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

En déduire que f a le même nombre de zéros que de pôles dans la couronne Ω_ρ, à condition de les compter avec leur multiplicité.

4.- Montrer que les produits infinis

$$p(z) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k^n}\right)\ ;\ q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{zk^n}\right)$$

convergent uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^\star$.
En déduire que $\varphi(z) = p(z)\times q(z)$ définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^\star$ dont on précisera les zéros.

5.- Soit $f \in \mathscr{G}$ et Ω_ρ une couronne du type précisé en 3. Soient $a_1, \ldots, a_p$ et $b_1, \ldots, b_p$ les zéros et les pôles de f dans Ω_ρ (comptés avec leur multiplicité).
Montrer que la fonction ψ définie par

$$\psi(z) = \frac{\varphi\left(\frac{z}{a_1}\right) \times \cdots \times \varphi\left(\frac{z}{a_p}\right)}{\varphi\left(\frac{z}{b_1}\right) \times \cdots \times \varphi\left(\frac{z}{b_p}\right)}$$

appartient à $\mathscr{G}$.
Calculer $\lambda(\psi)$. Montrer que f s'exprime simplement en fonction de ψ.

Ex. 147. ———— *Partiel 11 mai 1989* *./exossup/exo-3/texte.tex*

Partie I

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U voisinage du disque compact $\overline{D}(0, r)$.
On suppose que pour tout $z \in \overline{D}(0, r)$

$$(r - |z|)\left|f'(z)\right| \leqslant r\left|f'(0)\right|.$$

1.- Que dire de f quand $f'(0) = 0$? Désormais on suppose $f'(0) \neq 0$.

2.- Montrer qu'en chaque point z du cercle $|z| = \frac{r}{2}$, on a :

$$\left|f'(z) - f'(0)\right| \leqslant 3\left|f'(0)\right|.$$

3.- En déduire des majorations du type

$$\left|f'(z) - f'(0)\right| \leqslant K\,|z| \;\; ; \;\; \left|f(z) - f(0) - zf'(0)\right| \leqslant K\frac{|z|^2}{2},$$

pour tout $z \in \overline{D}\left(0, \frac{r}{2}\right)$, K étant une constante que l'on précisera en fonction de r et $f'(0)$.

4.- Montrer qu'en chaque point z du cercle $|z| = \frac{r}{6}$, on a :

$$|f(z) - f(0)| \geqslant \frac{r}{12}\left|f'(0)\right|.$$

5.- En évaluant une intégrale du type

$$\int_{C^+\left(0, \frac{R}{6}\right)} \frac{f'(z)}{f(z) - Z}\,\mathrm{d}z,$$

montrer que l'image $f(U)$ contient le disque centré en $f(0)$ de rayon $\frac{r}{12}\left|f'(0)\right|$.

Partie II

Soit f une fonction entière non constante, $\overline{D}(a, R)$ un disque compact fixé, avec $f'(a) \neq 0$.
Pour $z \in \overline{D}(a, R)$, on désigne par $d(z)$ la distance de z à la frontière du disque, c'est-à-dire $d(z) = R - |z - a|$.
On pose

$$\rho = \sup\left\{d(z)\left|f'(z)\right| \;\; ; \;\; z \in \overline{D}a, R\right\}.$$

1.- Prouver que $\rho > 0$.

2.- Montrer qu'il existe $z_0 \in D(a, R)$ tel que

$$\rho = d(z_0)\left|f'(z_0)\right|.$$

On pose $r = d(z_0)$. Pour $z \in \overline{D}(z_0, r)$, on désigne par $\delta(z)$ la distance de z à la frontière du disque $\overline{D}(z_0, r)$, soit

$$\delta(z) = r - |z - z_0|.$$

3.- Pour $z \in \overline{D}(z_0, r)$, comparer $\delta(z)\left|f'(z)\right|$ et $\delta(z_0)\left|f'(z_0)\right|$.

4.- En utilisant les résultats de la première partie, montrer que l'image $f(\mathbb{C})$ contient un disque de rayon arbitrairement grand.

Ex. 148. ——— *Partiel 13 avril 1989* *./exossup/exo-4/texte.tex*

Soit $D=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|<1\}$ le disque unité, $\mathscr{O}(D)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans D.
On désigne par $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions de $f\in\mathscr{O}(D)$ ayant les propriétés suivantes :

i) f est injective.

ii) $f(0)=0$.

iii) $f'(0)=1$.

1.- Montrer que la fonction f définie ci-dessous appartient à $\mathscr{S}$

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}.$$

Écrire le développement de f en série de Taylor en 0.

2.- Étant donnée $f\in\mathscr{S}$, on pose

$$F(z)=\frac{1}{f(z)}.$$

a) Préciser le nombre et la nature des singularités de F dans le disque D.
Montrer que F peut s'écrire sous la forme

$$F(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n.$$

Que peut-on dire du rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$?

b) En utilisant une formule de Stokes, montrer que l'intégrale

$$I_r=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_r^+}\overline{F(z)}F'(z)\,\mathrm{d}z$$

est pour $0<r<1$, un réel négatif ou nul.
Calculer I_r en fonction des coefficients b_n et de r.

On pourra remarquer que si $z\in C_r^+$, alors $z\overline{z}=r^2$.

En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\,|b_n|^2\leqslant 1.$$

c) D'après ce qui précède, on a $|b_1|\leqslant 1$. Peut-on trouver $f\in\mathscr{S}$ avec $|b_1|=1$?

d) Montrer qu'il existe $g\in$
CaligS telle que

$$\forall z\in D,\qquad f(z^2)=g^2(z).$$

Pour cela, on écrira d'abord que $f(z)=z\phi(z)$, puis $\phi(z)=h^2(z)$.

Cela étant, on pose

$$G(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n\qquad\text{et}\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n.$$

Préciser les coefficients a_0 et a_1. Calculer β_1 en fonction de a_2, et en déduire une majoration de $|a_2|$.
Examiner le cas particulier 1.

e) Si $\omega\notin f(D)$, soit h la fonction définie par

$$h(z)=\frac{f(z)}{1-\frac{f(z)}{\omega}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n.$$

Montrer que $h\in\mathscr{S}$, calculer α_2 en fonction de a_2 et ω.

En déduire, que si $f\in\mathscr{D}$, alors $f(D)$ est un ouvert contenant le disque $D\left(0,\,\dfrac{1}{4}\right)$.

Ex. 149. *Partiel 13 avril 1989* *./exossup/exo-5/texte.tex*

Soit $a > 0$ un réel donné, et n un entier positif.
On pose

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Calculer $I_1(a)$ et $I_2(a)$ par la méthode des résidus.

Ex. 150. *./exossup/exo-6/texte.tex*

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante sur U.
On note A l'ensemble des z de U tels que $f(z)$ soit un nombre réel, et on considère un point z_0 de A.

1.- Montrer, en appliquant le principe du maximum aux fonctions $z \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(z)}$ et $z \longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(z)}$ que tout voisinage de z_0 contient des points de A_+ et de A_-, où A_+ (resp. A_-) est l'ensemble des z de U vérifiant $\mathbf{Im}(f(z)) > 0$ (resp. $\mathbf{Im}(f(z)) < 0$).

2.- On suppose que la partie réelle du nombre dérivée $f'(z_0)$ est non nulle.
Montrer qu'il existe un voisinage V de z_0, un intervalle I de $\mathbb{R}$, et une application φ de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathbb{R}$, telle que $V \cap A$ soit l'ensemble des nombres complexes de la forme $x + \mathrm{i}\varphi(x)$ avec x appartenant à I.

Ex. 151. *./exossup/exo-7/texte.tex*

Soient $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$, $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z|| \leqslant 1\}$ et $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$, U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{D}$.
f est une application de $\mathscr{O}(U)$ vérifiant :

i) $f(0) = 0$.

ii) $f'(0) = 1$.

iii) Pour tout $z \in \Gamma$, $\left|f'(z) - 1\right| \leqslant k$, où k est un nombre réel fixé tel que $0 < k < 1$.

1. Montrer qu'il existe une application holomorphe φ dans U telle que, pour tout $z \in U$ on ait :
$$f'(z) = 1 + z\varphi(z).$$
En déduire, que si $|z| \leqslant 1$, on a :
$$\left|f'(z) - 1\right| \leqslant k\,|z|. \tag{(1)}$$
et
$$|f(z) - z| \leqslant \frac{k}{2}|z|^2. \tag{(1)}$$
En déduire, en majorant $|f(z_2) - f(z_1) - (z_2 - z_1)|$ que f est injective sur $\overline{D}$.

2. Soient z_0 un élément de D, $Z = f(z_0)$.
Montrez que, pour tout $z \in U$, on a :
$$f(z) - Z = (z - z_0)g(z),$$
où g est une fonction holomorphe dans U, vérifiant $g(z_0) = f'(z_0)$, et qui ne s'annule pas sur $\overline{D}$.
En déduire qu'il existe un ouvert U' de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{D}$, et une application h holomorphe sur U' telle que :
$$\forall z \in U' - \{z_0\} \quad \frac{zf'(z)}{f(z) - Z} = \frac{h(z)}{z - z_0},$$
avec $h(z_0) = z_0$.
Quelle est la valeur de l'intégrale
$$\int_\Gamma \frac{zf'(z)}{f(z) - Z}\,\mathrm{d}z\ ?$$

3. On pose $R = \dfrac{2-k}{4}$. Montrer que pour tout z tel que $|z| = 1$, on a $|f(z)| \geqslant 2R$.
En déduire que pour tout Z tel que $|Z\langle R$, il existe un élément z_0 de D vérifiant $f(z_0) = Z$.

Raisonner par l'absurde, et appliquer le principe du maximum à la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{f(z) - Z}$.

4. Déduire de la question précédente, que f est une bijection de D sur une partie V de $\mathbb{C}$ contenant le disque $D(R) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < R\}$.
   Montrer que l'application réciproque de f, $f^{-1} : V \to D$, est définie par :

$$f^{-1}(Z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} f'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - Z} \,\mathrm{d}t.$$