Examens oraux des concours d'entrée aux grandes écoles

École polytechnique

Algèbre.

1. – Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_{n-2} & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$; déterminer valeurs propres et polynôme caractéristique.

2. – Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ où

$$(\forall i) \quad a_{i,i+1} = a, \qquad a_{i,i-1} = \frac{1}{a} \qquad \text{et} \qquad a_{ij} = 0$$

dans les autres cas; montrer que A est diagonalisable.

3. – Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $r = \operatorname{rg} A$, $B = {}^t\!AA$; montrer que $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$, et que le polynôme caractéristique de B est de valuation $n - r$.

4. – $A \in M_n(\mathbb{Z})$ est inversible dans $M_n(\mathbb{Z})$ si, et seulement si, $\det A = \pm 1$. Trouver quels sont les ordres possibles des éléments de $GL_2(\mathbb{Z})$.

5. – Soit $A \in M(m, n; \mathbb{R})$, $B \in M(n, m; \mathbb{R})$ et $C = AB$; que dire de det C si $n < m$? Montrer que, pour $n \geqslant m$

$$\det C = \sum_{r_1 < r_2 < \cdots < r_m} \det A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ r_1 & r_2 & \dots & r_m \end{pmatrix} \times \det B \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

où $M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ représente la matrice extraite d'une matrice M en ne conservant que les lignes d'indices $i_1, i_2, \dots, i_m$ et les colonnes d'indices $j_1, j_2, \dots, j_m$.

Soit $B \in M(p, n; \mathbb{R})$ où $p \geqslant n$ et $A = {}^t\!BB$, montrer que

$$\det A = \sum_{r_1 < r_2 < \cdots < r_n} \left[\det B \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \right]^2.$$

6. – Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calculer A^n.

7. – Soit $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ où $(\forall i)\ a_{ii} = a$, et pour $i \neq j$, $a_{ij} = b$ ($(a, b) \in K^2$ donnés); déterminer A^{-1}, ainsi que les valeurs propres de A.

8. – Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ où

$$(\forall i) \quad a_{ii} = a, \qquad a_{i,i+1} = b, \qquad a_{i+1,i} = c,$$

et $a_{ij} = 0$ sinon.

A est-elle diagonalisable? Déterminer les valeurs propres.

***9.** – 1° Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix},$$

comparer det M et $\det(A^2 - B^2)$.

2° Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de matrices de $M_m(\mathbb{R})$ commutant 2 à 2; on note $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ la matrice-blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

montrer que

$$\det A = \det\left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \dots A_{\sigma(n)n} \right).$$

10. – Montrer que, si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est non inversible, alors

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad (\forall x \in \mathbb{C})$$
$$0 < |x| < \varepsilon \Rightarrow A + xI \text{ inversible.}$$

Soit A, B quelconques dans $M_n(\mathbb{C})$; montrer que AB et BA ont même polynômes caractéristique.

11. – Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$; donner dimension et base de

$$E = \{M \in M_n(\mathbb{C}) / AM = MA\}$$

lorsque

- A admet n valeurs propres distinctes;
- A est diagonalisable.

Que peut-on dire dans le cas général?

12. – On pose $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$; pour tout $x \in \mathbb{R}$ on considère la forme linéaire sur E, $f_x : P \to P(x)$.

1° Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$, n réels distincts; montrer que $(f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ est une base de E^*.

2° Soit P_n une suite d'éléments de E convergeant simplement vers une fonction g; montrer que $g \in E$. Ce résultat reste-t-il si $E = \mathbb{R}[X]$?

13. – Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ on suppose qu'existent $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(U, V) \in M_n(\mathbb{C})^2$ tels que

$$A = \lambda U + \mu V, \qquad A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V,$$
$$A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V;$$

montrer que

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad A^p = \lambda^p U + \mu^p V;$$

montrer que, si X est vecteur propre de A on a

- soit $UX = VX = 0$,
- soit $UX = 0$ et $VX = X$,
- soit $UX = X$ et $VX = 0$.

14. – Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \operatorname{Aut}(E)$; on note

$$F_u = \{x \in E / u(x) = x\} \quad \text{et} \quad \tilde{E} = E/F_u$$

l'espace quotient; que dire de la matrice de $\tilde{u}$, induit par u sur $\tilde{E}$.

15. – Soit E un C-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$ tel que

$$u^2 - u + \mathrm{Id} = 0;$$

calculer det u.

16. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ une famille d'endomorphismes ψ_{ij} non tous nuls vérifiant

$$\forall (i, j, k, l) \quad \psi_{ij} \circ \psi_{kl} = \delta_{jk} \psi_{il}.$$

Trouver une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E vérifiant

$$\forall (i, j, k) \quad \psi_{ij}(\varepsilon_k) = \delta_{jk} \varepsilon_i.$$

17. — Soit E un K-espace vectoriel de dimension 2, et f, g dans L(E) vérifiant $f^2 = g^2 = 0$; déterminer le rang de $(f, g, f \circ g, g \circ f)$.

18. — Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ semblable à une matrice diagonale réelle; montrer que M peut s'écrire comme produit de deux matrices hermitiennes dont l'une est définie positive.

19. — Soit A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $AA^* = BB^*$; signification pour $n = 1$; pour n quelconque montrer qu'il existe U unitaire telle que $B = AU$.

***20.** — Soit C et D dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que D diagonale et $C^*C = D^2$; montrer qu'il existe U unitaire telle que $C = UD$. Soit A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A^*A = B^*B$, montrer qu'existe U unitaire telle que $B = UA$. Montrer que,

$$(\forall A \in M_n(\mathbb{C})) \quad (\exists U \text{ unitaire}) \quad (\exists H \text{ hermitienne}) \quad A = UH,$$

et si A a pour valeurs propres (λ_i) montrer qu'il existe H hermitienne dont les valeurs propres sont les $|\lambda_i|$.

***21.** — Soit $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$, déterminer

$$s_n = \sup \left\{ \sum_{i \leqslant j} a_{ij} / M = [a_{ij}] \in O(n) \right\}$$

et déterminer une équivalent de s_n quand $n \to +\infty$.

***22.** — Soit A, B deux matrices unitaires dans $M_n(\mathbb{C})$, on note

$$(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \quad \text{et} \quad (\beta_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$$

les valeurs propres de A et B respectivement. Montrer que, si γ est valeur propre de AB alors

$$\mathrm{CVX}(\alpha_i) \cap \mathrm{CVX}(\gamma\beta_j) \neq \varnothing$$

où $\mathrm{CVX}(\alpha_i)$ est l'enveloppe convexe dans le plan de Cauchy. Étudier une éciproque.

***23.** — Soit $M = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux, montrer que

$$(\forall (i, j)) \quad |a_{ij}| \leqslant c \Rightarrow |\det M| \leqslant c^n n^{n/2}.$$

Généraliser ce résultat à M inversible quelconque en considérant

$$B = M^t M = [b_{ij}] \quad \text{et} \quad C = |x_i b_{ij} x_j|,$$

où $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sera choisi pour que $\det C \leqslant 1$.

24. — Soit H, K deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$, hermitiennes définies positives telles que

$$\mathrm{Sp}\, H = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \qquad \mathrm{Sp}\, K = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$$

avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$. Montrer que les valeurs propres de HK sont réelles et que

$$\mathrm{Sp}\, HK \subset [\lambda_1\mu_1, \lambda_n\mu_n].$$

25. — Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique, définie positive; $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure enclidienne naturelle, déterminer pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{2(x|y) - (A(y)|y)\}$$

en déduire que, si A et B sont symétriques définies positives

$$A > B \Rightarrow B^{-1} > A^{-1}$$

(par définition $A > B \Leftrightarrow A - B$ définie positive).

***26.** — Soit E hermitien (dimension finie) et $f \in L(E)$ non inversible; relation entre $\dim \operatorname{Ker} f^*$ et $\dim \operatorname{Ker} f$. Montrer qu'existe $g \in L(\operatorname{Ker} f, \operatorname{Ker} f^*)$ telle que

$$(\forall (x, y) \in \operatorname{Ker} f^2) \quad (g(x)|g(y)) = (x|y).$$

Soit $h = f^* \circ f$, que dire de h ? On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres strictement positives distinctes de h, et $\lambda_0 = 0$. Si $E_i = \operatorname{Ker}(h - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ et si p_i est le projecteur orthogonal de E sur E_i, on note

$$u = g \circ p_0 + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f \circ p_i.$$

Montrer $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$.

27. — Soit $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ où $(\forall i)$ $b_{ii} = 0$, et

$$(\forall (i, j)) \quad i < j \Rightarrow b_{ij} = 1, \quad i > j \Rightarrow b_{ij} = -1;$$

déterminer polynôme caractéristique et valeurs propres de B.

Soit $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$, on note

$$c = \frac{1}{2} \sup_{i,j} |a_{ij} - a_{ji}|,$$

montrer que, pour toute valeur propre $a + ib$ de A on a

$$|b| \leqslant c \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n}.$$

28. — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, F_1 un sous-espace vectoriel de dimension finie, F_2 un sous-espace contenant strictement F_1; montrer que

$$(\exists g \in F_2) \quad \|g\| = 1 \text{ et } (\forall f \in F_1) \quad \|g - f\| \geqslant 1.$$

29. — Soit E un espace euclidien de dimension finie et $f \in L(E)$ auto-adjoint, à valeurs propres strictement positives, que dire (maximum, minimum, continuité) de

$$\varphi(x) = \frac{(f(x)|x)^2}{\|f(x)\|^2 \cdot \|x\|^2}.$$

30. — Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$, montrer que

$$\lim_{n \infty} (A^n) = 0 \Leftrightarrow (\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\, A) \quad |\lambda| < 1;$$

on pose $\rho(A) = \sup \{|\lambda| / \lambda \in \mathrm{Sp}\, A\}$.

Soit $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\forall (i, j)$ $a_{ij} > 0$, et $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$; on suppose $\forall (i, j)$ $|b_{ij}| \leqslant a_{ij}$, montrer que $\rho(B) \leqslant \rho(A)$.

Analyse.

31. — Trouver la limite pour $n \infty$, et un équivalent, pour

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

***32.** — Soit (A_n) une suite de matrices symétriques dans $M_p(\mathbb{R})$ et $B \in M_p(\mathbb{R})$ symétrique; on suppose

$$A_0 < A_1 < \cdots < A_n < \cdots < B.$$

($M < M'$ si $M' - M$ est associée à une forme quadratique positive) montrer que (A_n) converge.

33. — Soit E préhilbertien de dimension quelconque; montrer que, pour $(A, B, C) \in E^3$ et M milieu de [B, C] on a

$$d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = 2d(A, M)^2 + \frac{1}{2} d(B, C)^2.$$

Soit F un fermé de E, supposé complet, montrer que

$$(\forall M \in E)(\exists P \in F) \quad d(M, P) = \inf_{Q \in F} d(M, Q),$$

P étant unique.

34. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque, muni d'un produit scalaire, et $E' \subset E^*$ l'ensemble des formes linéaires continues sur E; montrer que, si on note $\varphi_x : y \mapsto (x|y)$, on a

$$(\forall x \in E) \quad \varphi_x \in E'.$$

Soit $\varphi : E \to E', x \mapsto \varphi_x$; chercher $\|\varphi\|$, montrer que φ est injective, surjective; φ^{-1} est-elle continue?

35. — Soit E, F deux Banach réels et $f : E \to F$ continue telle que

$$(\exists M > 0) \quad (\forall (x, y) \in E^2)$$
$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M;$$

on définit $g_n : E \to F$ par

$$g_n(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x).$$

Étudier convergence, convergence uniforme de (g_n); soit $g = \lim (g_n)$, montrer que g est linéaire.

36. — Soit E un espace euclidien et $\hat{E}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels; pour $F \in \hat{E}$ on note p_F le projecteur orthogonal sur F, et pour $(F, G) \in \hat{E}^2$ on pose $d(F, G) = \|p_F - p_G\|$. Montrer que d est une distance sur $\hat{E}$, que $\hat{E}$ est borné de diamètre 1. Montrer que

$$d(F, G) < 1 \Rightarrow \dim F = \dim G.$$

Interprétation géométrique en dimension 2.

***37.** — Déterminer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, dérivable en O, vérifiant

$$f'(0) = \lambda \quad \text{et} \quad (\forall x) \;\; f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f^2(x)}.$$

38. — Soit

$$E = \{f \in \mathscr{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) / (\forall x \in [0, 1]) \;\; f''(x) \leqslant 1\}$$

montrer que

$$f \in E \Rightarrow f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \leqslant \frac{1}{4};$$

trouver $f \in E$ vérifiant l'égalité.

39. — Soit $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ montrer que

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists K) \quad (\forall (x, y) \in [0, 1]^2)$$
$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + K(x - y)^2$$

40. — Soit $\lambda > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, dérivable dans $v(0)$ telle que

$$(\forall x) \quad f(2x) = 2f(x)^2 - 1;$$

montrer que f' est dérivable en 0, et que $f''(0) = -\lambda^2$.
Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, puis f.

41. — Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $t_a \in L(E)$ tel que $t_a f(x) = f(x + a)$. Donner des sous-ensembles de E, de dimension finie, stables par t_a. Soit F un sous-espace de dimension 2 stable par t_a; si (f_n) est une suite dans F convergeant simplement vers f, alors $f \in F$ et la convergence est uniforme.

42. — Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$(\forall g \in \mathscr{C}^k([a, b], \mathbb{R}), \quad \int_b^a fg = 0;$$

montrer que $f = 0$.

43. — On pose, pour $0 < \alpha < \beta$,

$$f(x) = \int_{x^\alpha}^{x^\beta} \frac{dt}{\operatorname{Log} t};$$

domaine de définition, continuité, limites aux bornes, dérivabilité, graphe de f.

44. — Donner limite et équivalent, lorsque $\varepsilon \to 0_+$, de

$$I(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1 + t^2)(\varepsilon + t^2)}}.$$

45. — Montrer que $4t^3 - 3t + 9 = 0$ admet une racine rationnelle; étudier (continuité, dérivabilité) la fonction

$$x \mapsto f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 3t + 9}}.$$

46. — Étudier la fonction f:

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}} \, dt.$$

47. — Calculer, après avoir montré leur existence, les intégrales

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx) \, dt,$$

$$S = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx) \, dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt$.

48. — Ensemble de définition et continuité de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2} \, dt.$$

49. — Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l';$$

étudier l'existence et calculer éventuellement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x + 1) - f(x - 1)] \, dx.$$

***50.** — Soit

$$E = \{f \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0, f(1) = 1\};$$

calculer

$$\inf_{f \in E} \int_0^1 |f(t) - f'(t)| \, dt.$$

51. — Trouver $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec f'' bornée sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + t) - f(x)| \, dx = o(t) \quad (t \to 0).$$

52. — Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$; montrer que

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x [f(t) - m]\, dt \right| \leqslant \inf_{s \in \mathbb{R}} \int_a^b |f(t) - s|\, dt.$$

53. — Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on lui associe $\varphi(f)$ par

$$\varphi(f) : x \mapsto \varphi(f)(x) = \int_0^x f(t) \sin(x - t)\, dt.$$

Montrer que

$$(\forall f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \quad \varphi(f) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R});$$

φ est-elle injective? déterminer image et vecteurs propres.

54. — Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$; on suppose l'existence, pour tout $y > 0$, de

$$\hat{f}(y) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-ty}\, dt,$$

on suppose de plus l'existence de

$$l = \lim_{y \to 0,} \hat{f}(y) = l < +\infty.$$

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = l \Leftrightarrow \int_0^{\mathrm{T}} t f(t)\, dt = o(\mathrm{T}) \quad (\mathrm{T} \to +\infty).$$

55. — Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positive, continue, nulle hors de $[-\alpha, +\alpha]$ et telle que

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi(t)\, dt = 1.$$

Pour $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère

$$f_n : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_n(t - x)\, dt$$

où $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$; étudier convergence simple, puis uniforme de (f_n); montrer que

$$\varphi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Rightarrow f_n \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Soit ψ:

$$\psi(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant 1,$$
$$\psi(x) = \exp \frac{-1}{1 - x^2} \quad \text{pour} \quad |x| < 1;$$

montrer que $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que toute fonction de classe $\mathscr{C}^0$ est limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

***56.** — Soit f: $\mathrm{B}'(0, 1) (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$; on suppose que $f(0) = \sup\limits_{\mathrm{M} \in \mathrm{B}'(0, 1)} |f(\mathrm{M})|$ et que

$$(\forall \mathrm{M} \in \mathrm{B}(0, 1)) \quad (\forall \mathrm{R} > 0)$$
$$\mathrm{B}'(\mathrm{M}, \mathrm{R}) \subset \mathrm{B}'(0, 1) \Rightarrow f(\mathrm{M}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{R}} \int_{\|\mathrm{MP}\| = \mathrm{R}} f(\mathrm{P})\, ds,$$

montrer que f est constante.

57. — Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et

$$g : r \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos\theta, r \sin\theta)\, d\theta;$$

que dire de g? Donner un développement limité en 0, d'ordre n.

58. — Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$(\forall x) \quad f(x, 0) = 0;$$

montrer qu'existe $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(x, y) = y g(x, y).$$

59. — Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \mapsto f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(1 + \sum_1^n a_k x^k\right)^2 dx;$$

montrer l'existence d'un minimum atteint; calculer ce minimum.

60. — Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, étudier la différentiabilité de

$$g : (x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

$((x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y)$ et $g(x, x) = f'(x)$.

***61.** — Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de signature (p, q) et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $\mathrm{A} = [a_{ij}] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, on définit l'opérateur différentiel

$$\Delta = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

sur $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Déterminer la matrice A telles que

$$(\forall f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})) \quad (\forall u \in \mathrm{Aut\,Q})$$
$$\Delta f \circ u = \Delta(f \circ u).$$

62. — Déterminer la différentielle de

$$f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{M} \mapsto \det \mathrm{M}.$$

63. — 1° Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathscr{C}^1$, 2π-périodique, montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt \in \mathbb{Z}.$$

2° Soit $h : \mathrm{B}(0, 1) \mapsto \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{L}^1$ et

$$u : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

défini par

$$u(\rho, \theta) = h(\rho e^{i\theta});$$

montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \in \mathscr{C}^0([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3° Montrer que

$$(\forall \rho \in [0, 1[) \quad \mathscr{I}(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \theta}(\rho, \theta)}{u(\rho, \theta)}\, d\theta = 0.$$

64. — Calculer $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} \frac{dx\, dy}{(1 + 4x^2 + y^2)^2}$ où

$$\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 \geqslant 2x,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

65. — Soit

$$\mathrm{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2\},$$

calculer

$$\iiint_{\mathrm{B}} \cos x\, dx\, dy\, dz;$$

en déduire pour α, β, γ réels non tous nuls.

$$\mathrm{I}(\alpha, \beta, \gamma) = \iiint_{\mathrm{B}} \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, dx\, dy\, dz.$$

66. — Soit

$$E = \{u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (\Sigma u_n^2) \text{ converge}\};$$

montrer que E est complet pour la norme

$$\|u\| = \sqrt{\sum_0^\infty u_n^2}.$$

67. — Étudier la série de terme général

$$u_n = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

68. — Donner la partie entière de $\sum_{n=1}^{109} n^{-2/3}$.

69. — Étudier la série de terme général

$$u_n = \mathrm{Arc\,cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+^*).$$

70. — Soit $P_n = X^n - nX + 1$; montrer l'existence d'une plus grande racine réelle notée u_n; étudier

$$\{\alpha \in \mathbb{R} / \Sigma |u_n|^\alpha \text{ converge}\}.$$

71. — Soit (a_n) et (b_n) deux suites dans $\mathbb{R}^*$; on suppose la convergence de $\left(\Sigma \frac{a_n}{b_n}\right)$ et de $\left(\Sigma \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2\right)$, étudier la convergence de $\left(\Sigma \frac{a_n}{a_n + b_n}\right)$.

72. — Soit (a_n) à termes réels positifs telle que (Σa_n) converge; montrer que $(\Sigma a_n^{1-\frac{1}{n}})$ converge.

***73.** — Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\left(\sum_1^\infty a_n^2\right)$ converge et

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_1^n a_k;$$

montrer que

$$\sum_1^\infty A_n^2 \leqslant 4 \sum_1^\infty a_n^2.$$

74. — Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs, et $S_n = \sum_0^n u_k$; étudier la convergence de $\left(\Sigma \frac{u_n}{(S_n)^\alpha}\right)$.
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que
$(\forall (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \quad (\Sigma |b_n|^2 \text{ convergente} \Rightarrow \Sigma a_n b_n \text{ convergente})$
montrer que $(\Sigma |a_n|^2)$ est convergente.

***75.** — Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $X_n = \frac{E(n!x)}{n!}$ (partie entière), déterminer $\lim_{n\infty} X_n$. Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\exists (c_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}) \quad x = \sum_1^\infty \frac{c_n}{n!}$$

avec $(\forall n \geqslant 2) 0 \leqslant c_n \leqslant n - 1$ et $0 \leqslant c_n \leqslant n - 2$ pour une infinité d'indices.

76. — Étudier la série de terme général

$$u_n = 1 - \mathrm{th}\,\sqrt{\mathrm{Log}\, n}.$$

Étudier (définition, continuité) la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=1}^\infty (\mathrm{th}\,\sqrt{\mathrm{Log}\,(n + x)} - \mathrm{th}\,\sqrt{\mathrm{Log}\, n}).$$

77. — On considère la série de fonctions $(\Sigma u_n(x))$ où

$$u_n(x) = (x - 1)\, \mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \mathrm{Log}\left(1 + \frac{x - 1}{n}\right).$$

Domaine de convergence, dérivabilité de la somme. On pose

$$f(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$$

et

$$g(x) = f(x) + x - x\, \mathrm{Log}\, x;$$

étudier les variations de g.

78. — Soit $f \in \mathscr{C}^\infty([-a, a], \mathbb{R})$; donner un développement de Taylor en 0. On suppose f paire; montrer que, si

$$(\forall n) \quad (\forall x) \quad f^{(2n)}(x) \geqslant 0,$$

alors la série de Taylor en 0 converge vers f sur $]-a, +a[$.

79. — Calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(n+1)t}\, dt \quad (n \in \mathbb{N});$$

montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2\, dt}{e^t - 1} = 2 \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}.$$

80. — Soit (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n};$$

calculer $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$ pour $(\lambda_n) = (n + 1)$, puis

$$(\lambda_n) = (2n + 1).$$

81. — Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé; une suite (a_n) est telle que $a_n = 1$ s'il existe $m \in \mathbb{N}$, $n = m^k$, $a_n = 0$ sinon. On lui associe $f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$; déterminer le rayon de convergence, étudier $\lim_{x \to 1_-} f(x)$. Montrer

$$\frac{f(x)}{1 - x} = \sum_0^\infty E(n^{1/k}) x^n$$

(E : partie entière).

***82.** — Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, de rayon de convergence infini; on pose

$$M(r) = \sup_{|z| = r} |f(z)|.$$

On suppose que ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$ fixé)

$$(\exists k > 0) \quad (\forall r) \quad r \geqslant \rho \Rightarrow M(r) \leqslant e^{kr};$$

montrer que

$$(\exists N) \quad (\forall n) \quad n > N \Rightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{ke}{n}.$$

83. — Soit $f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{ch}\, x}$: f est-elle développable en série entière autour de 0, donner un majorant du rayon de convergence.

84. — 1° Soit $n \in \mathbb{N}$ impair; montrer que

$$(\forall\theta)\quad \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2 k\alpha}\right) \quad \left(\text{où } \alpha = \frac{\pi}{n}\right).$$

2° Montrer que $e^z = \lim\limits_{n\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

3° Déduire de ce qui précède que

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right).$$

85. — Soit E euclidien de dimension finie, et $u \in L(E)$. Montrer que $\sum\limits_0^\infty \frac{u^n}{n!}$ converge; montrer que (u^* : adjointe de u) $\|u^*\| = \|u\|$ puis que $(e^u)^* = e^{(u^*)}$.

***86.** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ assez petit, montrer

$$\det(I + \lambda A) = \exp\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \lambda^k \operatorname{tr}(A^k)\right].$$

87. — Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π-périodique; on pose

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$$

et

$$P_r(f, \theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta};$$

montrer l'existence de $P_r(f, \theta)$ $(0 < r < 1)$ et

$$\lim_{r\to 1_-} P_r(f, \theta) = f(\theta)$$

la convergence étant uniforme en θ.

88. — La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant développable en série entière au voisinage de 0, montrer l'existence d'une fonction φ, solution de

$$2xy' = y^2 + g(x)y - 1,$$

développable en série entière autour de 0 et telle que $\varphi(0) = 1$.

89. — Résoudre l'équation différentielle

$$2x(1 + y'^2) - y'^3 = 0.$$

90. — Établir l'allure, au voisinage de l'origine, des solutions de l'équation différentielle

$$y' = \frac{ax + by}{cx + dy},$$

$(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $ad - bc = 1$.

91. — Résoudre l'équation différentielle

$$yy'' + 4y^3 - 2y'^2 = 0.$$

***92.** — On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)}\qquad y'' + e^{-t^2}y = \sin t;$$

soit f une solution bornée sur $[1, +\infty[$ et telle que $\int_1^{+\infty} f^2$ soit convergente; montrer que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

93. — Déterminer des solutions, développables en série entière autour de 0, de l'équation différentielle

$$x(1 - x)y'' = a(y + xy') \quad (a \in \mathbb{R}).$$

94. — Soit (E) $y'' + p(x)y = 0$ où $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue, dérivable, croissante avec

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty.$$

Montrer que toute solution de (E) est bornée.

95. — Soit $p \in \mathscr{C}(]A, +\infty[, \mathbb{R})$, on lui associe

$$\text{(E)}\qquad y'' + p(x)y = 0,$$

on suppose qu'existent m, M tels que

$$(\forall x > A)\quad 0 < m \leqslant p(x) \leqslant M.$$

1° Montrer que l'ensemble des zéros d'une solution de (E) est dénombrable.

2° Soit $x_0 \in]A, +\infty[$, montrer que toute solution de (E) s'annule sur $\left[x_0, x_0 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}\right]$.

3° Montrer que la distance entre deux zéros consécutifs de y, solution de (E), est au moins $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

***96.** — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u : \mathbb{R} \to L(E)$ dérivable en tout point, montrer l'équivalence entre

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \forall(x, y),\ u(x + y) = u(x) \circ u(y) \\ (\forall x)\quad \det(u(x)) = 1 \end{cases}$$

et

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} u(0) = \mathrm{Id}_E,\ \operatorname{tr} u'(0) = 0 \\ (\forall x)\quad u'(x) = u'(0) \circ u(x). \end{cases}$$

***97.** — Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, telle que $df(0) = 0$ et $A = [a_{ij}]$ définie négative $\left(\text{où } a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(0)\right)$.

1° Montrer qu'existent deux réels positifs a et r tels que

$$(\forall x \in B(0, r))$$
$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \leqslant -a\|x\|^2.$$

2° Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ solution de

$$u'(t) = \operatorname{grad} f(u(t)) \quad \text{et} \quad u(0) = x_0$$

avec $x_0 \in B(0, r)$; montrer que u a une limite nulle quand $t \to +\infty$.

98. — Soit p, q deux fonctions, sommes de séries entières de même rayon $R > 1$

$$p(x) = \sum_0^\infty p_n x^n, \qquad q(x) = \sum_0^\infty q_n x^n$$

et telles que

$$(\exists M > 0)\quad (\forall x)$$
$$|x| < R \Rightarrow |p(x)| < M \quad \text{et} \quad |q(x)| < M.$$

Montrer que l'équation différentielle

$$xy'' = yp(x) + xy'q(x)$$

admet une solution développable en série entière telle que $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

99. — 1° On considère $x : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe suffisante et on lui associe p :

$$p(t) = 3x(t)\sin t - x^2(t)\cos^2 t - x'(t)\cos t$$

et φ :

$$\varphi(t) = \cos t \exp\left(\int_a^t x(u)\cos u\,du\right).$$

Donner une équation différentielle du second ordre vérifiée par φ.

2° Soit $p \in \mathscr{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = 0$$

et

$$\int_0^{+\infty} |p'(t)|\, \mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$

Montrer que si y est solution de

$$y'' + [1 + p(t)]y = 0,$$

alors y' et y'' sont bornées.

3° Que dire du cas présenté en 1°.

Géométrie.

100. — Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne on considère

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2 - 2ay,\ 2xy - 2ax).$$

1° f est-elle différentiable ? donner différentielle et rang; déterminer $\operatorname{Ker} f'(\mathrm{M})$.

2° On considère le cercle $\mathrm{S}(x^2 + y^2 = a^2)$; à $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{S}$ on associe

$$\mathrm{D}_0 = (\mathrm{M}_0, \overrightarrow{u_0}) \quad \text{où} \quad \overrightarrow{u_0} \in \operatorname{Ker} f'(\mathrm{M}_0).$$

Chercher M_0 tel que D_0 soit tangente à S en M_0.

3° Déterminer l'image de S par f; tracer cette image.

***101.** — On note $\mathscr{P}$ le plan euclidien, montrer que

$$\mathrm{D} = \{(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3) \in \mathscr{P}^3 / \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 \text{ alignés}\}$$

est fermé. Soit K_1, K_2, K_3 trois compacts de $\mathscr{P}$ tels qu'aucune droite ne rencontre à la fois ces trois compacts; montrer que, parmi les cercles qui rencontrent à la fois K_1, K_2, K_3, il y a un cercle de rayon maximum et un cercle de rayon minimum.

102. — L'espace euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé; on considère le cylindre de génératrices parallèles à (Oz) et dont la base dans (Oxy) est le cercle d'équation polaire $r = a \cos \theta$. Déterminer le volume de la partie commune à ce cylindre et à la sphère de centre O et de rayon a.

103. — Dans un repère orthonormé du plan euclidien on considère les deux disques dont les frontières sont les cercles d'équations

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1;$$

on appelle D la partie commune à ces deux disques, calculer

$$\iint_{\mathrm{D}} (3x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

104. — Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien on considère la nappe paramétrée

$$(\rho, \theta) \mapsto \left(x = \frac{\rho \cos \theta}{\sqrt{2}},\ y = \frac{\rho \sin \theta}{\sqrt{2}},\ z = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right);$$

trouver sur cette nappe les arcs de classe $\mathscr{C}^2$ dont le plan osculateur est en tout point normal à la nappe.

Dépôt légal : n° 158.
LIBRAIRIE VUIBERT

PHOTOCOMPOSITION - IMPRIMERIE : DURAND S.A.
B.P. n° 6 - 28600 LUISANT - (37) 34-14-87
Commission paritaire : 64 759.

Le Directeur de la publication :
J. ADAM