Calendrier de l'Avent 2022 des mathématiques.net

Thème de l'année : analyse et théorie des nombres

Rédaction : Rémi

4 décembre 2022

Selon une idée proposée par Quentino37, le site les-mathématiques.net se voit doté cette année d'un calendrier de l'Avent sous la forme d'une série de 24 exercices proposés par les membres de la communauté participant au forum sur la base du volontariat. Les membres se sont proposés de prendre en charge chacun un ou plusieurs exercices. Le jour dit, un énoncé est donc soumis selon le thème choisi - cette année : analyse et théorie des nombres - avec pour principe supplémentaire que les exercices doivent être de plus en plus difficile au fur et à mesure que l'on progresse dans le calendrier. Chaque exercice devra être résolu le jour même.

Calendrier

1 Exercice 1

1.1 Enoncé [Proposé par JLapin] :

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)$

Vers les solutions de l'exercice 1 $\longrightarrow$ 1.2

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

1.2 Solutions :

1.2.1 Proposition de Noobey :

En passant à l'exponentielle, la somme de 0 à n se réécrit

$$\exp\Big(\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!^2}$$

. Ensuite on utilise le développement asymptotique de la série harmonique et la formule de Stirling et ça devrait fonctionner...

1.2.2 Proposition de raoul.S

On sait, voir Wiki, que $\gamma = \displaystyle\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n}) = I+P$ où I et P sont les sommes des termes impairs et pairs respectivement. Ce que l'on cherche est donc I.

Toujours sur Wiki on remarque qu'un certain Sondow a montré en 2005 que $\ln(\dfrac{4}{\pi}) = I-P$. Par conséquent en sommant les deux expressions on élimine le P et on trouve $2I = \gamma+\ln(\dfrac{4}{\pi})$ et pour finir $I = \dfrac{\gamma}{2}+\ln(\dfrac{2}{\sqrt{\pi}})$.

1.2.3 Proposition de solution entièrement rédigée

Retour au calendrier ⟶ p. 3

2 Exercice 2

2.1 Enoncé [Proposé par Calli] :

On note φ la fonction indicatrice d'Euler. Soit $x \in]1, \infty[$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{x^n - 1}$.

Vers les solutions de l'exercice ⟶ 2.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

2.2 Solutions :

2.2.1 Proposition de Noobey :

On pose $y = \dfrac{1}{x}$ on cherche donc à calculer

$$S(y) = \sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n) y^n}{1-y^n} = \sum_{n\geq 1}\sum_{p\geq 1} \varphi(n) y^{pn}$$

(Puis comme tout est positif, on peut sommer n'importe comment)
Le coefficient de degré k est donné par l'ensemble des couples (p,n) tels que $pn = k$

$$S(y) = \sum_{k=1} (\sum_{n|k} \varphi(n)) y^k = \sum_{k=1}^{\infty} k y^k = y/(1-y)^2$$

2.2.2 Proposition de Gebrane :

On utilise développement en série entière de $\frac{1}{1-x^n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \sum_{k=0}^{\infty} x^{nk}$$

le coefficient de $x^p \quad (p > 1)$ dans la somme ci dessus est $\sum_{d|p} \varphi(d) = p$,donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{1-x^n} = \sum_{p=0}^{\infty} p x^p = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Remarque de Calli : Attention, ta première égalité est fausse car $x > 1$ (et non $|x| < 1$). Tu trouves quand même le bon résultat, mais parce qu'il y a une deuxième erreur ensuite qui "compense" la première.

2.2.3 Proposition de JLapin :

Soit $x > 1$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{x^n - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(n) x^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} x^{-nk} = \sum_{(n,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \phi(n) x^{-nj} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n|m} \phi(n) x^{-m} = \sum_{m=1}^{+\infty} m x^{-m} = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

2.2.4 Proposition de solution entièrement rédigée

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

3 Exercice 3

3.1 Enoncé [Proposé par Bibix] :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\tan\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{4(-1)^k}{2k+1}x\right)\right)$.

Vers les solutions de l'exercice 3 $\longrightarrow$ 3.2

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

3.2 Solutions :

3.2.1 Proposition de Calli :

Soit $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \arctan\left(\dfrac{x}{2k+1}\right)$. Comme je n'ai aucune idée a priori du résultat et pas d'inspiration particulière, je vais calculer la dérivée seconde de f puis primitiver deux fois. Tout d'abord

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan\left(\frac{x}{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2 + x^2}.$$

Pour le justifier, on peut regrouper les termes deux par deux et vérifier que $\frac{2k-1}{(2k-1)^2+x^2} - \frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2} = O(\frac{1}{k^2})$ avec un O localement uniforme en x. Ensuite, en posant $y = ix$ on a

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - y^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{y+2k+1} - \frac{1}{y-(2k+1)} \right).$$

Puis on redérive :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{(y-(2k+1))^2} \overset{(*)}{=} \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\sin}{\cos^2}\right)\left(\frac{\pi}{2} y\right).$$

Pour justifier l'égalité $(*)$, on remarque que ses deux membres sont méromorphes sur $\mathbb{C}$, que leurs pôles sont les entiers relatifs impairs, qu'au voisinage de tout pôle p ils valent $\frac{1}{2(y-p)^2} + O(1)$, qu'ils sont 2π-périodiques et qu'ils tendent vers 0 quand $|\Im(y)| \to \infty$. Ainsi, leur différence est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée, donc elle est constante (nulle ici). On a justifié $(*)$. Ensuite, on primitive :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right)^{-1} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} \mathrm{i}x\right)^{-1}$$

avec une constante de primitivation nulle en évaluant en 0 ou en prenant la limite $x \to \infty$. Puis, sachant que la primitive de $\dfrac{1}{\cos t}$ est $\log\tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{\mathrm{i}}{2} \log\tan\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{i}x + \frac{\pi}{4}\right) + c \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2} \log\left(\frac{1+\mathrm{i}e^{\pi x/2}}{1-\mathrm{i}e^{\pi x/2}}\right) + c \\
&= \arg(1+\mathrm{i}e^{\pi x/2}) + c \\
& \quad\ \text{car } 1+\mathrm{i}e^{\pi x/2} \text{ et } 1-\mathrm{i}e^{\pi x/2} \text{ sont conjugués} \\
&= \arctan(e^{\pi x/2}) + c
\end{aligned}$$

En évaluant en $x = 0$ on voit que $c = -\dfrac{\pi}{4}$. Enfin le résultat demandé est $\tan f(4x) = \tanh(\pi x)$ par la formule de $\tan(a-b)$.

3.2.2 Proposition de Bibix :

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

4 Exercice 4

4.1 Enoncé [Proposé par Julia Paule] :

Soient p et q deux nombres premiers $\geqslant 3$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le morphisme $f_p : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{F}_q^*, x \mapsto x^p$ soit un automorphisme.
Cas particulier : pour $q \equiv -1 \pmod p$ résoudre l'équation $x^p = a$ dans $\mathbb{F}_q^*$.

Vers les solutions de l'exercice 4 ⟶ 4.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

4.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

5 Exercice 5

5.1 Enoncé [Proposé par Manu] :

Vers les solutions de l'exercice 5 $\longrightarrow$ 5.2

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

5.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

6 Exercice 6

6.1 Enoncé [Proposé par Calli] :

Vers les solutions de l'exercice 6 ⟶ 6.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

6.2 Solutions :

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

7 Exercice 7

7.1 Enoncé [Proposé par JLapin] :

Vers les solutions de l'exercice 7 ⟶ 7.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

7.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

8 Exercice 8

8.1 Enoncé [Proposé par etanche] :

Vers les solutions de l'exercice 8 ⟶ 8.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

8.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

9 Exercice 9

9.1 Enoncé [Proposé par Calli] :

Vers les solutions de l'exercice 9 $\longrightarrow$ 9.2

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

9.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

10 Exercice 10

10.1 Enoncé [Proposé par Namiswan] :

Vers les solutions de l'exercice 10 ⟶ 10.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

10.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

11 Exercice 11

11.1 Enoncé [Proposé par Boécien] :

Vers les solutions de l'exercice 11 ⟶ 11.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

11.2 Solutions :

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

12 Exercice 12

12.1 Enoncé [Proposé par Calli] :

Vers les solutions de l'exercice 12 ⟶ 12.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

12.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

13 Exercice 13

13.1 Enoncé [Proposé par Namiswan] :

Vers les solutions de l'exercice 13 $\longrightarrow$ 13.2

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

13.2 Solutions :

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

14 Exercice 14

14.1 Enoncé [Proposé par Calli] :

Vers les solutions de l'exercice 14 $\longrightarrow$ 14.2

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

14.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

15 Exercice 15

15.1 Enoncé [Proposé par John_john] :

Vers les solutions de l'exercice 15 $\longrightarrow$ 15.2

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

15.2 Solutions :

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

16 Exercice 16

16.1 Enoncé [Proposé par Calli] :

Vers les solutions de l'exercice 16 ⟶ 16.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

16.2 Solutions :

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

17 Exercice 17

17.1 Enoncé [Proposé par bd2017] :

Vers les solutions de l'exercice 17 ⟶ 17.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

17.2 Solutions :

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

18 Exercice 18

18.1 Enoncé [Proposé par Bibix] :

Vers les solutions de l'exercice 18 ⟶ 18.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

18.2 Solutions :

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

19 Exercice 19

19.1 Enoncé [Proposé par Calli] :

Vers les solutions de l'exercice 19 ⟶ 19.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

19.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

20 Exercice 20

20.1 Enoncé [Proposé par harazi] :

Vers les solutions de l'exercice 20 ⟶ 20.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

20.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

21 Exercice 21

21.1 Enoncé [Proposé par Gebrane] :

Vers les solutions de l'exercice 21 ⟶ 21.2

Retour au calendrier ⟶ p. 3

21.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3

22 Exercice 22

22.1 Enoncé [Proposé par Fin de partie] :

Vers les solutions de l'exercice 22 $\longrightarrow$ 22.2

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

22.2 Solutions :

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

23 Exercice 23

23.1 Enoncé [Proposé par Poirot] :

Vers les solutions de l'exercice 23 $\longrightarrow$ 23.2

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

23.2 Solutions :

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

24 Exercice 24

24.1 Enoncé [Proposé par Fin de partie - Gebrane - Poirot] :

Vers les solutions de l'exercice 24 $\longrightarrow$ 24.2

Retour au calendrier $\longrightarrow$ p. 3

24.2 Solutions :

Retour au calendrier ⟶ p. 3