

Conjecture de Collatz.

DEFINITIONS

On appelle **suite de Syracuse** une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier strictement positif ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et l'on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers strictement positifs dont chacun ne dépend que de son prédécesseur.

HYPOTHESE

La **conjecture de Syracuse**, encore appelée **conjecture de Collatz**, **conjecture d'Ulam**, **conjecture tchèque** ou **problème $3x + 1$** , est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.

Cette hypothèse est fausse.

Pour le démontrer, il suffit de trouver un nombre entier auquel appliquer la suite de Syracuse et qui n'atteint pas 1.

Démonstration.

Dans la première partie, nous établirons une suite de Syracuse qui produit un résultat globalement croissant.

Dans la deuxième partie, nous prouverons qu'une certaine formulation de X, entier naturel, corresponde à cette suite globalement croissante.

Dans la troisième partie, nous explorerons la condition nécessaire pour que notre démonstration soit juste.

Enfin, dans la quatrième partie, nous montrerons que ce X existe bel et bien.

Première partie.

1. Imaginons un nombre entier impair quelconque, soit x auquel on applique la suite de Syracuse et qui, à chaque opération donne un résultat qui alterne entre pair et impair :

Soit x, entier impair

qui donne dans la suite de Syracuse $3x+1$ pair

qui donne dans la suite de Syracuse $(3x+1)/2$ impair

qui donne dans la suite de Syracuse $3((3x+1)/2) + 1$ pair, soit $(9x+5)/2$

qui donne dans la suite de Syracuse $(9x+5)/4$ impair

etc.

2. On observe et on peut facilement calculer/montrer que :
 $x < (3x+1)/2 < (9x+5)/4$ etc.

X impair devient $3x+1$ plus grand que X
 $3x+1$ pair devient $(3x+1)/2$ plus petit que $3x+1$ mais plus grand que X
 $(3x+1)/2$ impair devient $(9x+5)/2$ plus grand que tous les précédents.
 $(9x+5)/2$ pair devient $(9x+5)/4$ plus petit que $(9x+5)/2$ mais plus grand que $3x+1$ et donc que X.
 Etc.

3. **DONC** si nous trouvons ce nombre entier impair auquel on applique la suite de Syracuse, et qui, à chaque opération dans la suite de Syracuse alterne entre impair et pair, le résultat sera globalement croissant et de ce fait ne peut atteindre 1.

Deuxième partie.

1. Soit un nombre entier de la forme :

$$x = (3^y * 2^{n-y} - 1)$$

X est donc impair pour $y < n$

2. Appliquons à x la suite de Syracuse :

$$\begin{aligned} X \text{ devient } 3x+1 \text{ pair, soit } & 3(3^y * 2^{n-y} - 1) + 1 \\ & 3(3^y * 2^{n-y} - 1) + 1 = 3^{y+1} * 2^{n-y} - 3 + 1 \\ & = 3^{y+1} * 2^{n-y} - 2 = 2 * (3^{y+1} * 2^{n-y-1} - 1) = \\ & 2 * (3^{y+1} * 2^{n-(y+1)} - 1) \text{ qui est un entier pair.} \end{aligned}$$

3. Appliquons à ce résultat la suite de Syracuse :

$$2 * (3^{y+1} * 2^{n-(y+1)} - 1) \text{ devient } (3^{y+1} * 2^{n-(y+1)} - 1)$$

4. Soit $y' = y+1$

$$(3^{y+1} * 2^{n-(y+1)} - 1) = (3^{y'} * 2^{n-y'} - 1), \text{ entier impair de la forme du point 1.}$$

Troisième partie.

1. Si $x = (3^y * 2^{n-y} - 1)$ et que $y = n$,
 Alors $x = 3^y * 1 - 1$, x est donc pair.
2. X devient dans la suite de Syracuse $(3^y - 1)/2$ qui est soit pair (pour y pair), soit impair (pour y impair).

CONCLUSION : $y < n$ pour que nous restions dans notre choix de départ (point 1. De la première partie : Imaginons un nombre entier impair quelconque, soit x auquel on applique la suite de Syracuse et qui, à chaque opération donne un résultat qui alterne entre pair et impair)

Quatrième partie.

1. Au regard de la deuxième partie, où y devient $y' = y+1$:
 y' doit donc être strictement inférieur à n , pour que nous soyons toujours dans notre choix de départ.
Autrement dit, si n existe tel que $y < n$ alors $(3^y * 2^{n-y} - 1)$ est croissant.
2. \mathbb{N} étant un ensemble infini, il y aura toujours un nombre entier n supérieur à un nombre entier y .

CONCLUSION : nous pouvons trouver ce nombre X qui correspond à notre choix de départ et qui dans la suite de Syracuse produise un résultat croissant.

L'HYPOTHESE EST DONC FAUSSE. CQFD