Ce qui n'est pas dans le programme de mathématiques du lycée.

Ce qui n'est pas dans le programme de mathématiques du lycée

les ensembles

Préface

En France, le programme de mathématiques au lycée en section S[1] est difficile. Pourtant, ce programme concerne seulement une fraction de ce qui était enseigné dans les filières mathématiques il y a quelques décennies. Comment se fait-il que la réduction de ce programme a amplifié la difficulté pour les élèves au lieu de la diminuer ? Est-ce parce que les élèves de maintenant sont génétiquement inférieurs sur le plan intellectuel que la génération précédente ? Est-ce parce que les techniques pédagogiques efficaces ont été oubliées ou interdites par la loi ? Est-ce parce que les professeurs d’aujourd’hui sont moins capables d’enseigner que leurs prédécesseurs ?

Nous sommes convaincus que c’est la réduction même du programme qui est en grande partie responsable pour cette difficulté. *Les notions qui permettent de comprendre profondément la matière ont été enlevées.* Imaginez-vous que pour « alléger le programme de lecture », on n’apprend que les 13 premières lettres de l’alphabet. Est-ce que la lecture va devenir plus simple ou plus difficile ?

La finalité de l'enseignement des mathématiques est multiple :

- c'est un domaine de connaissances particulières
- c'est une activité formatrice de la pensée
- c'est un outil pour résoudre des problèmes

1 Depuis la réforme Blanquer, c’est la spécialité mathématiques.

Les entités qui nous gouvernent ont décidé depuis quelques décennies que dans l'enseignement secondaire, les deux premières finalités seront progressivement abandonnées dans une vision d'efficacité utilitariste. La plupart des élèves du secondaire ne deviendront pas des spécialistes dans ce domaine de connaissances. L’activité formatrice pour la pensée est vite taxée d’élitisme abjecte et réactionnaire. Ainsi, seulement l'outil pour résoudre des problèmes, jugé utile pour l'activité économique du pays, semble trouver grâce. Mais on constate que cela ne fonctionne pas très bien quand on enseigne les mathématiques uniquement comme un outil pour la résolution de problèmes, car c'est un outil abstrait qui devient difficile à comprendre et donc à utiliser quand on reste dans le flou concernant les notions qui en font partie. On maîtrise mieux un outil quand on comprend comment il fonctionne. Or, comprendre comment les mathématiques fonctionnent nécessite justement un peu de connaissances structurées qui font partie des chapitres bannis.

Ce texte veut ré-introduire les notions oubliées afin de rendre les mathématiques de nouveau compréhensible. Il ne faut pas énormément de connaissances supplémentaires : dans une centaine de pages de format A5, l'essentiel de ce qu'il faut savoir est traité. Ce texte ne remplace, en aucun cas, le cours du lycée. Il le complémente, afin de rendre les notions qui y sont mentionnées, claires et nettes, et donc faciles à comprendre et utiliser.

Le germe de ce texte à vu sa naissance quand j'ai voulu aider mon fils dans l'apprentissage de son cours de mathématiques.

Je me suis trouvé dépourvu de moyens pour expliquer quelque notion que ce soit. Tout ce que je pouvais imaginer comme cheminement d’explication manquait de bases dans le programme qu'on lui avait enseigné. Au départ, je voulais seulement l'aider à comprendre ce qu'était une « variable » ; la lettre qu'on utilise au lieu du nombre dont on veut parler. J'ai aussi voulu lui montrer ce qu'était une fonction, et ce qu'était un nombre réel. Je me suis rendu compte que je ne pouvais pas expliquer ces choses sans introduire beaucoup d'autres notions qu'il ignorait. Ce texte est le lointain héritier de ces explications maladroites que j'ai dû improviser à un certain moment.

Je suis, personnellement, un « enfant des maths modernes ». J'ai eu la chance inouïe, sans m'en rendre compte, d'avoir eu un professeur de mathématiques hors norme quand j'étais lycéen moi-même. Monsieur Roland Vandenbroucke était son nom. Il m'a enseigné les mathématiques d'une façon simple, profonde, compréhensible et claire comme cela me semblait « évident ». Je me rends compte à quel point cet enseignement, qui me semblait tout-à-fait « normal » à l'époque, était hors norme dans son intelligence et sa construction. Avec ce texte, je voudrais rendre un peu de cette clarté perdue aux lycéens qui pourraient en tirer profit, et, par la même occasion, rendre hommage à mon ancien professeur de maths.

Patrick Van Esch

Table des matières

C'est quoi, les mathématiques ?

Les mathématiques sont l'étude de systèmes d'idées **abstraites** et **idéalisées** dont on accepte des vérités élémentaires (des **axiomes**) et dont on étudie les vérités supplémentaires qu'on peut en déduire par un **argumentaire logique**.

Abstraction

L'abstraction n'est rien d'autre que **de voir l'essentiel et de se défaire de tout ce dont on n'a pas besoin pour penser.** C'est la capacité à distinguer ce qui est important, de ce qui ne compte pas et qui nous embrouille dans la pensée.

En grande section de maternelle et en CP, les enfants découvrent une notion fondamentale, qui est **le nombre naturel**, donc 1, 2, 3, …

Au départ, ce nombre est appris en faisant quelque chose de très concret : **compter des objets physiques**.

Il y a trois canards dans la mare, et il y a quatre pommes dans le pommier. « Combien de vaches vois-tu dans le pré ? » demande la maîtresse. « Un, deux, trois, quatre, cinq, six. Six vaches ! » répond l'enfant.

« J'ai trois pommes, et j'ajoute une pomme, combien de pommes j'ai maintenant ? » demande le maître. « J'ai quatre pommes ! » dit le premier de la classe. Les nombres naturels sont associés mentalement à une collection d'objets qu'on peut énumérer comme une poésie.

Mais sans le savoir, l'enfant est déjà entré dans une phase d'abstraction, et commence à faire des mathématiques. Effectivement, il aura compris de lui-même : quand il faut compter des objets, ça n'a aucune importance de savoir si c'est des vaches, des pommes, des canards ou des billes : quand on ajoute une vache à trois vaches, ça fait quatre vaches ; quand on ajoute une pomme à trois pommes, ça fait quatre pommes ; quand on ajoute un canard à trois canards, ça fait quatre canards.

L'enfant aura donc, intuitivement, compris que, quand on a trois objets quelconques, et on ajoute un objet en plus, ça fait quatre objets, **et la nature de l'objet n'a pas d'importance**. C'est toujours : quand on ajoute un à trois, ça fait quatre.

Il y a, cependant, une étape plus difficile mentalement. C'est d'aller de « trois objets, n'importe lesquels, plus un objet, font quatre objets » vers « trois plus un font quatre ». Car quand on enlève encore « objets, n'importe lesquels », on reste avec une « propriété qui ne s'applique à rien ». Alors, **cette propriété qui ne s'applique à rien devient une « idée mathématique »**.

On peut voir dans ce processus d'abstraction, deux étapes : une généralisation, et puis, l'abstraction propre.

Idéalisation

Historiquement, la géométrie était une chose très concrète. Les premières idées géométriques sont apparues dans les premières grandes civilisations agraires il y a plus que 6000 ans, et il s'agissait de mesurer et de déterminer les champs qu'on travaillait. Ensuite, la géométrie s'est avérée très utile dans les grandes constructions, comme les pyramides d’Égypte. C'était, si on veut, **l'art, la science et la technologie de la mesure de longueurs, surfaces et angles dans le monde de tous les jours**.

Seulement, en géométrie, on avait constaté des régularités qui n'étaient pas toujours évidentes. Une de ces régularités est ce qui est maintenant connu sous le nom de « théorème de Pythagore ». On pourrait se demander si c'est vrai pour tous les triangles rectangles imaginables. On peut se demander si c'est très précisément vrai, ou si c'est juste, dans beaucoup de cas, une bonne approximation.

Pour essayer d'y répondre, les anciens Grecs (à commencer par Thalès) ont fait évoluer la géométrie d'une technologie de mesures de longueurs, surfaces et angles dans le monde de tout les jours en un « jeu intellectuel ». Pour faire cela, ils ont dû considérer des **idéalisations** des notions géométriques. Là où « une surface », c'était un champs de blé ou le sol d'un temple, il fallait non seulement faire abstraction de ce superflu, mais aussi, il fallait l'idéaliser : la surface était *parfaitement* plate, délimitée par des lignes *infiniment* fines. Une « droite » n'était pas seulement une abstraction entre « ligne de vue », « corde tendue », « ligne sur un bout de papyrus », mais était une ligne parfaitement fine et droite, pouvant être prolongée *indéfiniment* au-delà de la feuille, du temple, du pays, et de la terre.

Ainsi, les Grecs ont introduit **des notions, non seulement abstraites, mais aussi idéalisées**. Elles ne correspondent pas tout à fait à des choses concrètes dans le monde de tous les jours. Alors que la notion de quatre est bien là dans « quatre vaches », la notion de « droite » n'est que suggérée par « corde tendue ». Le plan géométrique parfaitement plat n'est que suggéré par le champs de blé avec des bosses et des cailloux.

Est-ce que ces objets « idéaux » existent pour de vrai ? Peut-on inventer des objets «idéaux » comme on veut ? Comment savoir quelles sont les propriétés de ces objets idéaux ? Suffit-il de les énoncer ? Peut-on les prouver ? Ceci nous mène au troisième pilier des mathématiques : la logique.

Logique

On peut se poser la question si on peut déduire, purement par réflexion, des propos vrais. Il s'avère qu'il n'y a pas beaucoup de vérités qui en valent la peine et qu'on peut déduire par pure réflexion. Par contre, **il est possible de déduire des vérités à condition d'accepter d'autres vérités et de suivre des argumentaires logiques valables.** Les formes d'argumentaire de ce genre est l'objet d'étude de la **logique**. Une idée séduisante est alors : il suffit peut-être de prendre des idées évidentes comme point de départ, et de déduire tout ce qui en vaut la peine par raisonnement logique. C'est ce qu'on appelle **la méthode axiomatique**.

La liste des « vérités évidentes » est la liste des **axiomes**. En utilisant des arguments logiques, on déduit alors beaucoup d'autres vérités. Bien sûr, plus la liste d'axiomes est riche, plus il est facile de déduire d'autres vérités par des arguments logiques, mais aussi, moins le système est convainquant.

La géométrie d'Euclide

Euclide est la première personne dans l'histoire à avoir établi un tel système d'axiomes, d'arguments (appelés des preuves) et de conclusions irréfutables (appelés des théorèmes) pour les concepts idéalisés de la géométrie. En faisant cela, il a repris beaucoup d'argumentaires déjà connus, pour des théorèmes déjà connus, mais il est le premier à les avoir incorporés dans un système logique global, qui part d'une petite liste d'axiomes, et qui parvient, par des raisonnements logiques, à toute la géométrie connue de son époque.

Dans la réalité, Euclide a commis quelques erreurs dans ses raisonnements, et il a parfois utilisé une « vérité » nouvelle, qui était évidente, mais qui ne faisait pas partie de ses axiomes. L'erreur la plus connue apparaît déjà dans le premier théorème : quand il veut construire un triangle équilatéral, il suppose que deux cercles de rayon R, dont les centres sont à distance R, ont au moins un point commun. C'est vrai (ils en ont deux) mais ça ne suit pas de ses axiomes. Le piège dans lequel Euclide lui-même est tombé est la difficulté principale de son système : comme les notions idéalisées sont quand-même très proches de notre intuition et de notre imagination, on se laisse vite convaincre par un argument qui contient des « vérités cachés » et qui n'est donc pas logique, même s'il mène à une conclusion vraie.

Au-delà d'Euclide

Nous arrivons enfin au sujet de ce livre. Bien que l'étude d'Euclide soit bénéfique, elle n'enseigne pas « les mathématiques comme on les conçoit aujourd'hui ».

Historiquement, la nécessité d'aller au-delà d'Euclide s'est faite sentir à partir du 17-18ième siècle, quand de nouvelles notions sont entrées dans les mathématiques (essentiellement par la voie de la physique, et la mécanique de Newton en particulier), qu'on pourrait qualifier grossièrement de « l'infiniment petit » et que les mathématiciens appellent l'analyse.

Quand les mathématiques ne consistaient encore que de calculs avec des « nombres », et de la géométrie (d'Euclide), la quantité de notions abstraites était restreinte. L'idée abstraite de « nombre naturel » à partir de la notion de « compter des objets » pouvait émerger ; les quelques idées abstraites et idéalisées de « droite », « point », « cercle », … dans la géométrie d'Euclide étaient des idées abordables abstraitement par le fait qu'elles étaient relativement proches de « choses concrètes », comme des lignes sur un bout de papier, faites avec un crayon bien taillé.

Le monde des « idées abstraites mathématiques » se limitait donc à un nombre restreint de types de choses.

Seulement, les nouvelles notions mathématiques nécessaires pour incorporer les idées des théories physiques à partir du 17-18ième siècle ont donné lieu à une prolifération d'objets mathématiques dont la nature n'était pas toujours claire. Les mathématiciens ont continué de travailler avec ces notions peu claires comme Euclide l'avait fait avec les notions de droite, point et cercle, mais vers le 19ième siècle, ces façons de faire ont montré leurs limites. On concevait des objets de plus en plus bizarres pour arriver à des contre-sens. **Il fallait pouvoir décider si un objet mathématique pouvait se concevoir ou non.** Mais c'est quoi, alors, un « objet mathématique » ?

D'une certaine façon, il fallait mettre « une deuxième couche d'abstraction » dans les notions mathématiques. **Il fallait maintenant concevoir l'abstraction derrière les idées abstraites des mathématiques.** Il faillait voir ce qui était essentiel dans les notions de « nombre naturel », « point », « droite », … et se défaire du superflu.

Alors, quelle est cette idée magique, qui unifie toute notion mathématique en une seule idée ? C'est **un ensemble**. Tout objet mathématique, abstrait et idéalisé, est un ensemble. Ni plus, ni moins. Un nombre naturel, une droite, un point dans le plan, une fonction réelle, la division,….**toute chose en mathématiques est un ensemble.** Si l'ensemble existe, alors l'idée en question existe ; si l'ensemble n'existe pas, l'idée en question est erronée.

Idéalement, il faudrait un système logique axiomatique pour les ensembles même. Ce système existe, c'est la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel, mais il est difficilement abordable comme premier contact. **C'est, ironiquement, pourquoi la notion la plus importante pour donner les bases rigoureuses des mathématiques est souvent abordée de façon intuitive et non-formelle.** C'est ce que nous allons faire. Cette façon de faire s'appelle « la théorie naïve des ensembles de Cantor ».

Les ensembles

Les bases de la théorie naïve de Cantor

Élément, ensemble, ensemble vide

Intuitivement, un ensemble est une collection de « choses », qu'on nomme éléments. On ne se pose pas la question de la nature d'un élément. Toute chose existante est « un élément ».

Un ensemble est bien défini si on peut, pour tout élément (existant), dire s'il appartient, ou s'il n'appartient pas, à l'ensemble.

Un ensemble peut, à son tour, être un élément d'un autre ensemble, car la nature de l'élément n'ayant pas d'importance, il peut donc être un ensemble en soi. **Par contre, un ensemble ne peut pas être élément de lui-même.**

Deux ensembles sont égaux (le même), si, et seulement si, tout élément de l'un est aussi un élément de l'autre et vice versa.

Il y a un (seul) ensemble qui n'a pas d'éléments. C'est l'**ensemble vide.**

On peut définir des petits ensembles en faisant la liste des (noms des) éléments, séparés par des virgules, entre accolades. Si tous les éléments existent, alors l'ensemble qu'on vient d'écrire ainsi, existe aussi. L'ordre dans la liste n'a aucune importance. Il est présumé que les éléments dans la liste ne sont pas répétés ; s'il le sont, alors on peut ignorer l'apparence des doublons. L'ensemble *{5, 3, 5}* est donc en fait l'ensemble *{5,3}*, car le doublon de 5 ne compte pas.

L'ensemble vide n'ayant pas d'éléments, on l'écrit ainsi :

{}

La question se pose: **quels sont alors les éléments qui ne sont pas des ensembles ? Dans la théorie axiomatique des ensembles, il n'y en a, en fait, pas !**

Dans la théorie naïve des ensembles, **on se permet quand-même d'avoir des éléments « atomiques »** qui sont des notions mathématiques tellement bien connues, que ce n'est pas nécessaire de les reconstruire à partir de « rien », mais il est parfaitement possible de ne pas faire cela.

Il est aussi possible de considérer des noms pour des objets concrets du monde physique comme éléments atomiques. L'exemple typique est de considérer que le nom d'un élève d'une classe est un élément atomique. On peut alors construire l'ensemble de la classe, contenant ces noms. **Quand on fait cela, on ne se situe plus dans les mathématiques** (mais on fait toujours de la théorie d'ensembles).

Si on admet que les nombres naturels existent, on peut considérer l'ensemble : *{2,4,8,10,12}* par exemple. Il est toujours possible de donner un nom à un ensemble, et on peut l'appeler « l'ensemble *A* ».

On écrit « 8 est élément de *A*» avec le symbole $8 \in A$

Il faut distinguer nettement un élément, et l'ensemble qui *contient cet élément.* L'ensemble $A = \{a\}$ est un autre objet que a. L'ensemble $B = \{A\} = \{\{a\}\}$ est encore différent. Ceci sera mis à profit pour inventer les nombres naturels à partir de rien.

La théorie axiomatique des ensembles construit des ensembles à partir de l'ensemble vide : Il y a un ensemble, qui est donc l'ensemble vide. Il y a un ensemble, qui contient, comme unique élément, l'ensemble vide. On lui donne un nom : « *un* ». Donc « *un* », c'est l'ensemble suivant : *{ {} }*.

Il y a un autre ensemble, qui contient deux éléments : l'ensemble vide, et l'ensemble « *un* ». On l'appelle : « *deux* ». Donc, « *deux* », c'est l'ensemble suivant : *{ {}, un }*, qu'on peut encore écrire : *{ {}, {{}} }*.

Trois, ce sera l'ensemble qui contient l'ensemble vide, *un*, et *deux*: *trois* est donc *{ {}, un, deux}*. *Quatre* sera : *{{}, un, deux, trois}*. Etc...

A partir de cette technique, on voit relativement vite qu'on peut construire tous les nombres naturels, mais on ne s'imaginait pas le nombre « deux » comme étant ce drôle d'ensemble. Quand on y réfléchit bien, cependant, ce n'est pas si idiot que cela : un nombre naturel sera un ensemble qui contient autant d'éléments que le nombre en question : « vingt-sept » contiendra vingt-sept éléments : ses vingt-sept prédécesseurs.

Union, intersection, différence

Si on a deux ensembles existants *A* et *B*, alors les trois ensembles suivants existent aussi :

- **L'union de *A* et de *B*.** Un élément appartient à l'union de *A* et de *B*, si cet élément appartient à *A* ou si cet élément appartient à *B* (ou si cet élément est aussi bien un élément de *A* que de *B*).

- **L'intersection de *A* et de *B*.** Un élément appartient à l'intersection de *A* et de *B*, s'il est élément de *A* et aussi élément de *B*.
- **La différence *A* moins *B*** : Un élément appartient à *A* moins *B*, s'il est élément de *A*, et s'il n'est en même temps pas un élément de *B*.

On écrit ces ensembles respectivement :

$A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

Si l'ensemble *A* est $\{1,2,3\}$, et l'ensemble *B* est $\{2,3,4\}$, alors : $A \cup B$ est l'ensemble $\{1,2,3,4\}$; $A \cap B$ est l'ensemble $\{2,3\}$, $A \setminus B$ est l'ensemble $\{1\}$, et $B \setminus A$ est l'ensemble $\{4\}$.

Partie (sous-ensemble)

Un ensemble (appelons-le *A*) est une partie, ou un sous-ensemble d'un autre ensemble (appelons-le *B*), si tout élément de *A* est aussi un élément de *B*.

On écrit : $A \subset B$

Il en suit que **l'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble existant**.

Il en suit aussi que **tout ensemble est un sous-ensemble de lui-même**.

Ainsi, considérons l'ensemble *A* qui est le nom de $\{1, 2, 4, 5\}$.

Alors, *{1,5}* est une partie (un sous-ensemble) de *A*. *{1,2,4}* est aussi un sous-ensemble de *A*. Mais *{1,2,3}* n'est pas un sous-ensemble de *A*, car l'élément *3* appartient à l'ensemble, et n'appartient pas à *A*.

La difficulté conceptuelle peut venir de la confusion entre un élément et un sous-ensemble. Considérons l'ensemble *B*, qu'on écrit *{ {}, {2}, {8}}*. *B* a trois éléments, qui sont tous les 3 des ensembles. Ainsi, *2* n'est pas un élément de *B* ; *{2}* est un élément de *B*, mais *{2}* n'est pas un sous-ensemble de *B*. Par contre, *{ {2} }* est bien un sous-ensemble de *B* : l'unique élément de cet ensemble est *{2}*, qui est bien un élément de *B*. *{ {2}, {8} }* est aussi une partie de *B*. Notez que *{}* est bien une partie de *B*, mais pas parce que, par hasard, *{}* est aussi un élément de *B* !

Ensemble des parties d'un ensemble

Quand un ensemble existe, on peut concevoir aussi l'ensemble de toutes les parties de cet ensemble. Si l'ensemble d'origine porte le nom *A*, alors, on écrit l'ensemble des parties de *A* :

P(A)

Cet ensemble est bien défini, puisqu'on peut, sans ambiguïté, dire si un ensemble existant est un élément de *P(A)*. *P(A)* devient vite très grand : il y a beaucoup de parties possibles, même d'un petit ensemble. Par exemple, *P({1,2,3})* est l'ensemble suivant :

{ {}, {1}, {2}, {3}, {1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3} }

A est toujours une partie de lui-même, et donc *A* est toujours un élément de *P(A)*, ainsi que *{}*.

Partitions

Une partie *S* de *P(A)* est appelée une partition de *A*, quand chaque élément de *A* appartient à exactement un et un seul élément de *S* et quand *S* ne contient pas, comme élément, l'ensemble vide.

On peut comprendre pourquoi on appelle *S* une « partition » : on a « découpé » l'ensemble de départ *A* en morceaux sans manquer un élément et sans que les morceaux se chevauchent.

Appelons l'ensemble *{1,2,3,4,5,6}* l'ensemble *A*. Alors *{ {1}, {3,6}, {2,5,4} }* est une partition (nommée *S*) de *A*.

Effectivement :

- *1* appartient à un seul élément de *S* : *{1}*
- *2* appartient à un seul élément de *S* : *{2,5,4}*
- *3* appartient à un seul élément de *S* : *{3,6}*
- *4* appartient à un seul élément de *S* : *{2,5,4}*
- *5* appartient à un seul élément de *S* : *{2,5,4}*
- *6* appartient à un seul élément de *S* : *{3,6}*
- *S* ne contient pas l'ensemble vide
- *S* est une partie de *P(A)*

Par contre, *{1, 2, 3, {4,5,6}}* n'est pas une partition de *A*, car ce n'est pas une partie de *P(A)*. *{{1,2,3},{3,4,5,6}}* n'est pas une partition de *A*, car *3* appartient à deux éléments de cet ensemble. *{{1,2}, {5,6}}* n'est pas une partition de *A*, car *3* n'appartient pas à un élément de cet ensemble. *{{1},{2},{3},{4},{5},{6}}* est bien une partition de *A*, mais *{ {},{1},{2},{3},{4},{5},{6}}* ne l'est pas, car cet ensemble contient l'ensemble vide.

S'entraîner

1. Considérez les ensembles qui représentent des nombres dans la construction que nous avons vue :

« *zéro* » est *{}*

« *un* » est *{ {} }*

« *deux* » est *{ {}, un}*

« *trois* » est *{{},un,deux}*

- est-ce que *{ {} }* est un élément de « *deux* » ?
- est-ce que *{ {} }* est une partie de « *deux* » ?
- est-ce que « *deux* » est une partie de « *trois* » ?
- Quelle est l'union entre *deux* et *trois* ?
- Quelle est l'intersection entre *deux* et *trois* ?
- Quel ensemble est *trois \ deux* ?
- Trouvez *P(trois)*

2. Considérez l'ensemble *A* qui est *P({1,2,3})* et l'ensemble *B* qui est *P({2,3,4})*.

- Trouvez *P({1,2,3})* ∩ *P({2,3,4})*

- Trouvez $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}$
- Trouvez $P(\{2,3\})$ et comparez à la réponse du premier point : que pouvez-vous conclure ?

3. Qu'est-ce $P(\{\})$?

4. Qu'est-ce $P(P(\{\}))$?

5. Qu'est-ce $P(P(P(\{\})))$?

6. Considérez que l'ensemble A est $P(P(P(\{\})))$ et B est $P(P(\{\}))$.

- déterminez $A \cap B$
- déterminez $A \cup B$

7. Trouvez toutes les partitions de l'ensemble $\{1,2,3\}$

8. Que peut-on dire de l'intersection de deux éléments d'une partition d'un ensemble A ?

Les relations

Couple et produit

Nous introduisons l'association de deux éléments par la notion de couple. **Un couple, c'est deux éléments, mais où l'ordre est important : on distingue le premier élément et le deuxième élément.** Ainsi, $(1,2)$ est un couple, dont le premier élément est 1, et le deuxième élément est 2. Le couple $(2,1)$ est différent : ici, le premier élément est 2, et le deuxième élément est 1.

Ceci est différent de l'ensemble $\{1,2\}$. Dans l'ensemble $\{1,2\}$, on ne distingue pas d'ordre. On peut juste dire que *1* est un élément de cet ensemble et que *2* est un élément de cet ensemble mais la notion de « premier élément » n'existe pas pour un ensemble.

Il n'est pas nécessaire d'introduire une nouvelle notion pour le concept de « couple », car ce concept peut être construit avec des ensembles. Il en va ainsi :

Le couple *(5,8)* est l'ensemble *{{5},{5,8}}*.

C'est une façon astucieuse d'arriver à la seule propriété qui compte pour un couple : si le couple *(5,8)* est le même couple que *(a,b)*, alors il faut que *a* soit *5*, et *b* soit *8*. Eh bien, la seule façon pour que *{ {5}, {5,8} }* soit *{ {a}, {a,b} }*, est que *{5}* soit *{a}*, et que *{5,8}* soit *{a,b}*, d'où il suit que *5* est *a*, et *8* est *b*.

Cela reste valable aussi pour un couple avec deux éléments identiques : *(5,5)* est l'ensemble *{{5},{5,5}}* mais cet ensemble n'est pas correctement noté, car *{5,5}* est *{5}*, et *{{5},{5}}* est *{ {5} }*, car une répétition du même élément dans la liste « ne compte pas ». Ainsi, *(5,5)* est l'ensemble *{ {5} }*. Pour que *(5,5)* soit le couple *(a,b)*, *{ {5} }* doit être le même ensemble que *{ {a}, {a,b} }*. Ces deux ensembles sont les mêmes, si chaque élément de l'un appartient aussi à l'autre. Il faut donc que *{a,b}* appartienne à *{ {5} }*, et donc, que *{a,b}* soit le même ensemble que *{5}*. Il en suit que *a* et *b* doivent être *5*. Alors, le couple *(a,b)* est bien le couple *(5,5)*.

Si *A* est un ensemble, et *B* est un ensemble, alors l'ensemble produit $A \times B$ est l'ensemble de tous les couples dont le premier élément appartient à *A*, et le deuxième élément

appartient à *B*.

Par exemple, $\{1,2\}\times\{6{,}7{,}8\}$ sera l'ensemble de couples *{(1,6), (1,7), (1,8), (2,6), (2,7), (2,8) }*

Il faut noter que le produit $A\times B$ n'est pas la même chose que $B\times A$ (si *A* et *B* sont des ensembles différents).

L'ensemble produit existe, puisqu'on peut clairement déterminer si un élément appartient à cet ensemble : il suffit de constater que l'élément est un couple, et que le premier élément du couple appartient au premier ensemble du produit, et que le deuxième élément du couple appartient au deuxième ensemble du produit.

Relation

Une relation de *A* en *B* est un sous-ensemble de $A\times B$

En d'autres termes, une relation de *A* en *B* est un ensemble de couples dont le premier élément appartient à *A*, et le deuxième élément appartient à *B*. C'est effectivement ce qu'on peut comprendre par une « mise en relation » entre *A* et *B* : des éléments de *A* sont « connectés » à un ou plusieurs éléments de *B*.

Une illustration typique non-mathématique est : l'ensemble *A* est l'ensemble des enseignants d'un établissement ; l'ensemble *B* est l'ensemble des élèves du même établissement. On peut alors considérer une relation « … est professeur de …. ». Un couple sera un élément de cette relation, si le premier élément du couple est un professeur, le deuxième élément du couple est un élève, et si ce professeur est bien le professeur du dit élève.

La relation inverse d'une relation est l'ensemble des couples inversés ; c'est une relation de *B* en *A*.

Le couple *(a,b)* appartient à la relation inverse si et seulement si le couple *(b,a)* appartient à la relation d'origine.

Le **domaine** d'une relation *R* (partie de $A \times B$) est la partie de *A* dont chaque élément apparaît comme premier élément d'au moins un couple dans *R*. **L'image** de la relation est la partie de *B* dont chaque élément apparaît comme deuxième élément d'au moins un couple dans *R*.

L'ensemble de toutes les relations de *A* en *B* existe : ce n'est rien d'autre que *P(A×B)*.

Relations internes

Considérons le cas spécifique d'une relation *R* qui est une partie de $A \times A$; c'est alors **une relation interne à *A***.

On peut définir différentes propriétés possibles d'une relation interne :

- On dit qu'une relation *R* interne à *A* est **réflexive**, si, pour tout élément *a* de *A*, le couple *(a,a)* est un élément de *R*.
- On dit qu'une relation *R* interne à *A* est **anti-réflexive**, si aucun couple du type *(a,a)* est un élément de *R*.
- On dit qu'une relation *R*, interne à *A*, est **symétrique** si, pour tout couple *(a,b)* de *R*, il y a aussi le couple *(b,a)* qui fait partie de *R*.

- On dit qu'une relation *R*, interne à *A*, est **anti-symétrique**, si pour tout couple *(a,b)* de *R*, avec *a* différent de *b*, le couple *(b,a)* n'est pas un élément de *R*.
- On dit qu'une relation *R*, interne à *A*, est **transitive**, si, chaque fois que les deux couples *(a,b)* et *(b,c)* font partie de *R*, le couple *(a,c)* fait aussi partie de *R*.
- On dit qu'une relation *R*, interne à *A*, est **totale**, si, pour tout couple *(a,b)* de $A \times A$, *(a,b)* ou *(b,a)* ou les deux appartiennent à *R*.

Il y a des combinaisons de propriétés de relations qui font de ces relations des outils extrêmement importants.

Une relation *R* interne à *A*, qui est anti-symétrique, transitive et totale, est <u>un ordre total</u> de *A*. On peut choisir entre une version réflexive, et une version anti-réflexive.

Un exemple est la relation « est plus grand que » pour les nombres.

Une relation *R* interne à *A*, qui est symétrique, réflexive, transitive est <u>une équivalence</u> sur *A*.

Il s'avère que la notion d'équivalence sera un outil très important en mathématiques, car il permet de formaliser le processus d'abstraction et la fabrication de nouvelles notions en mathématiques.

S'entraîner

1. L'ensemble *A* est l'ensemble *{1,2}*. L'ensemble *B* est l'ensemble *{3,4}*. Trouvez toutes les relations de *A* en *B*.

2. Réfléchissez à la proposition suivante : l'ensemble de toutes les relations de *A* en *B* est $P(A \times B)$.

3. L'ensemble qu'on nomme *A* est l'ensemble *{1,2,3}*. L'ensemble qu'on nomme *B* est l'ensemble *{10,12,104,200}*. La relation qu'on nomme *R* est *{(1,10), (1,12), (2,200)}*. Quel est le domaine et quelle est l'image de *R* ? Est-il possible de trouver une relation de *A* en *B* avec seulement 4 éléments, tel que le domaine de cette relation est *A*, et l'image de cette relation est *B* ?

4. L'ensemble qu'on nomme *A* est *{1,2,3,4}*. Nous avons une relation *R*, interne à *A*, qui contient le couple *(1,2)*, le couple *(2,3)* et le couple *(3,4)*. Trouvez un *R* possible, si *R* est un ordre total réflexif sur *A*. Est-ce qu'il y a plusieurs possibilités pour *R* ?

5. L'ensemble qu'on nomme *A* est *{1,2,3}*. Trouvez tous les ordres totales anti-réflexifs sur *A*.

6. L'ensemble qu'on nomme *A* est *{1,2,3,4}*. *R* est une équivalence sur *A*, et on sait de *R* qu'elle contient les couples *(1,2)* et les couples *(3,4)*, et que le couple *(2,3)* ne fait pas partie de *R*. Est-il possible d'établir *R* de façon unique ou est-ce qu'il y a plusieurs possibilités pour *R* ?

7. L'ensemble qu'on nomme *A* est *{1,2}*. Trouvez toutes les équivalences sur *A*.

8. L'ensemble qu'on nomme *A* est *{1,2,3}*. Trouvez toutes les équivalences sur *A*.

Dessiner des ensembles et relations

Les ensembles sont une notion abstraite: ce sont des objets mathématiques. Il ne convient pas vraiment de les « dessiner ». Mais pour aider à la conceptualisation, on présente quelques dessins plus ou moins conventionnels qui illustrent les notions que l’on vient d'introduire. On peut les utiliser pour se familiariser avec ces notions de base.

Un ensemble est représenté par une sorte d'ovale. Les éléments d'un ensemble sont représentés par des points dans l'ovale. Dans figure A, on voit un ensemble bleu avec 3 éléments : l'élément noir, l'élément violet, et l'élément turquoise.

Dans la figure B, on voit que l'ensemble bleu a 3 éléments : l'élément noir, l'élément violet, et l'élément turquoise. L'ensemble vert a aussi 3 éléments : l'élément violet, l'élément turquoise et l'élément rouge. L'intersection de l'ensemble bleu et de l'ensemble vert est un ensemble qui contient 2 éléments : l'élément turquoise et l'élément violet. L'union de l'ensemble bleu et de l'ensemble vert contient 4 éléments : rouge, turquoise, violet, et noir. L'ensemble bleu moins l'ensemble vert est un ensemble qui contient 1 seul élément : le noir. L'ensemble vert moins l'ensemble bleu est un ensemble qui contient 1 seul élément : le rouge.

Dans la figure C, l'ensemble orange est une partie (un sous-ensemble) de l'ensemble bleu.

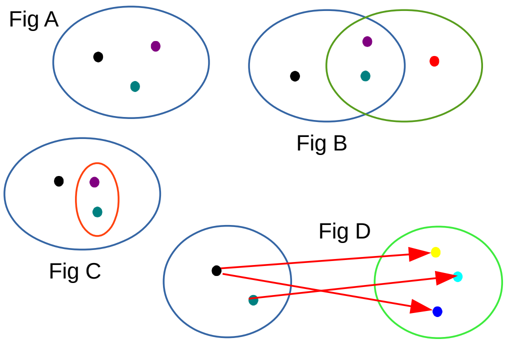

Illustration 1: Représentations graphiques de quelques notions d'ensembles.

Dans la figure D, un couple est représenté par une flèche entre deux points, les deux éléments dont est fait le couple. La flèche va du premier élément du couple, vers le deuxième. Une relation est donc représenté par « un jeu de flèches ». Les flèches rouges représentent une relation de l'ensemble bleu dans l'ensemble vert, et cette relation contient 3 couples.

Les fonctions

Définition

Une fonction *f* de l'ensemble *A* en l'ensemble *B* est une relation de *A* en *B*, tel que chaque élément du domaine n'apparaît que dans un seul couple de *f*.

Il faut donc retenir qu'en premier lieu, une fonction est une relation, c'est à dire, un ensemble de couples. Mais il y a une condition supplémentaire pour que cette relation soit une fonction : il faut qu'il n'y ait pas deux couples qui ont le même premier élément.

L'illustration classique est la fonction numérique : une fonction numérique « prend » un nombre, et « en produit » un autre ; souvent, cette notion est exprimée par « une formule de calcul » . Mais la notion de fonction est bien plus riche. Par exemple, on peut considérer que *D* est la fonction de l'ensemble des fonctions numériques en l'ensemble des fonctions numériques, qui associe, à une fonction *f*, sa fonction dérivée, *f'*. **Nous voyons donc que presque toute notion d'opération, d'expression, de calcul, de transformation d'un objet mathématique en un autre est, au fond, une fonction.**

Si *f* est une fonction, et *a* est un élément de son domaine, alors on peut écrire *f(a)*. ***f(a)* représente le deuxième élément du couple (unique) dont *a* est le premier élément.** Puisque *a* appartient au domaine de *f*, il y a des couples qui ont a comme premier élément, et puisque *f* est une fonction, ce couple est unique. Il y a donc exactement un seul couple dans *f*, qui a l'élément *a* comme premier élément : *(a, X)*. Alors *X* est ce qu'on écrit comme *f(a)*. *Il faut noter qu'il est essentiel, pour que f(a) existe, que a soit dans le domaine de f.* Une erreur fréquente est, pour une fonction *f* de *A* en *B*, de considérer *f(b)*, où *b* est un élément de *A*. Mais *b* n'appartient pas nécessairement au domaine de *f*, et alors, *f(b)* est une notation qui ne représente pas un élément.

f(a), s'il existe, appartient à l'image de *f*, et est donc un élément de *B*.

On donne le nom **d'application** à une fonction dont le domaine est tout l'ensemble de départ. Toute fonction est une application sur son propre domaine.

Toute fonction étant une relation, **l'ensemble de toutes les fonctions de *A* en *B* existe**, car c'est une partie de l'ensemble de toutes les relations de *A* en *B*. On le note : $\mathscr{F}(A \to B)$.

Injection, surjection, bijection

Ce qui caractérise une fonction, c'est le fait que tout élément du domaine n'apparaît qu'une seule fois comme premier élément dans les couples de la fonction. Mais on peut aussi s'intéresser à l'arrivée, au deuxième élément. On le fait seulement pour des applications.

Une application *f* de *A* en *B* est dite **surjective**, si tout élément de *B* apparaît comme deuxième élément dans *f*.

De la même façon que pour le cas de l'application, il suffit de limiter le deuxième ensemble à l'image de *f* pour que *f* devienne surjective.

La deuxième notion, **l'injectivité**, est très importante et toutes les fonctions ne peuvent pas simplement devenir injectives. **Une application *f* est injective, si, pour tout couple *(a,b)* qu'elle contient, il n'y a pas un deuxième couple qui a l'élément *b* comme deuxième élément.** En d'autres termes, pour une injection *f*, si $f(a) = f(c)$, alors $a = c$.

Une application de *A* en *B* qui est en même temps injective et surjective, est appelée « bijective ».

Une bijection associe, à chaque élément de *A*, exactement un seul élément de *B*. Une bijection dit en fait plus sur les ensembles *A* et *B*, que sur la fonction en question. **S'il y a une bijection entre *A* et *B*, on peut, si on le veut, représenter *A* par *B*.**

Pour des petits ensembles *A* et *B*, il peut seulement y avoir une bijection entre *A* et *B* si *A* et *B* ont le même nombre d'éléments.

Considérons l'ensemble avec le nom *A* : *{1,2,3}*, et l'ensemble avec le nom *B*, qui est *{7,8,9}*. Une bijection entre *A* et *B* est par exemple *{ (1,9), (2,7), (3,8) }*.

{ (1,9),(2,9),(3,8) } est une surjection de *{1,2,3}* en *{8,9}*.

{(1,9), (2,8),(3,6)} est une injection de *{1,2,3}* en *{6,7,8,9}*.

La propriété d'injection est importante aussi pour la raison suivante :

La relation inverse d'une application *f* est une fonction, si et seulement si *f* est injective.

Composition de fonctions

Si *f* est une fonction de *A* en *B*, et *g* est une fonction de *B* en *C*, il existe une nouvelle fonction, $g \circ f$, de *A* en *C*, de telle façon que si et seulement si *a* est dans le domaine de *f*, et *f(a)* est dans le domaine de *g*, alors *a* est dans le domaine de $g \circ f$ et $g \circ f(a)$ est *g(f(a))*. $g \circ f$ est la composition des fonctions *f* et *g*.

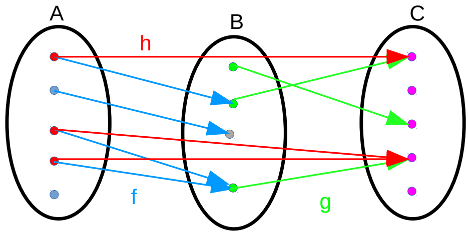

Illustration 2: La fonction composée (rouge) h = g ○ f consiste de ces couples d'éléments de A et de C, tel qu'il y ait une flèche bleue qui part du premier élément, et qui est suivi d'une flèche verte pour arriver au deuxième élément.

Prenons un exemple. L'ensemble A est $\{1,2,3,4\}$, l'ensemble B est $\{6, 7, 8\}$ et l'ensemble C est $\{10,11,12\}$. Considérons la fonction f qui est $\{ (1,6), (2,7), (3,8), (4,7) \}$ et la fonction g qui est $\{(7,11),(8,10)\}$

Alors, 1 n'appartient pas au domaine de $g \circ f$, car $f(1)$ est 6, mais 6 n'appartient pas au domaine de g. Par contre, $g \circ f\,(2) = g(f(2)) = g(7) = 11$; $g \circ f\,(3) = g(f(3)) = g(8) = 10$; $g \circ f\,(4) = g(f(4)) = g(7) = 11$. Donc $g \circ f$ est l'ensemble $\{ (2,11), (3,10), (4,11) \}$, une fonction de A en C.

Par un léger abus de notation, on considère aussi la composition suivante de fonctions : si f est une fonction de A en B, et g est une fonction de A en C, **alors $h = (f,g)$ est une fonction de A en $B \times C$**, dont le domaine est l'intersection des domaines de f et de g. Ainsi, pour un a dans cette intersection, $f(a)$ et $g(a)$ existent. Alors, par définition, $h(a) = (f(a), g(a))$.

Exemple : $f = \{(3,12), (4,16),(5,20)\}$ et $g = \{(3,9),(5,25),(7,49)\}$. Alors $(f,g) = \{(3, (12,9)), (5,(20,25))\}$. Effectivement, le domaine de f est $\{3,4,5\}$, et le domaine de g est $\{3,5,7\}$. Leur intersection est $\{3,5\}$, qui est donc le domaine de (f,g) selon la définition ci-dessus.

Fonction interne à un ensemble

Une fonction interne à un ensemble A, qui est une application, est appelée aussi **une transformation** de l'ensemble. Si cette transformation est bijective, on dit que c'est une **permutation** de A.

La fonction identique sur A est l'ensemble des couples (a,a) ; c'est une permutation.

Toute permutation a bien sûr une permutation inverse, et la composition d'une permutation et son inverse est la fonction identique sur A.

Une **involution** est une permutation qui est son propre inverse.

Considérons l'ensemble au nom de A, $\{1,2,3,4\}$. Une permutation f de A est $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$. f n'est pas une involution : $f \circ f$ est $\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$ qui n'est pas la fonction identique ; mais $g = f \circ f$ est bien une involution, car $g \circ g$ est $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ ce qui est bien la fonction identique.

S'entraîner

1. Nommez A, l'ensemble $\{1,2\}$ et B, l'ensemble $\{3,4\}$. Trouvez toutes les fonctions de A en B.

2. Si on donne le nom A à l'ensemble *{1,2,3}* et on donne le nom B à l'ensemble *{4,5}*, trouvez toutes les applications qui sont des surjections de A en B.

3. Si on donne le nom A à l'ensemble *{1,2}* et le nom B à l'ensemble *{4,5,6}*, donnez toutes les applications injectives de A en B.

4. Trouvez toutes les bijections de *{1,2,3}* en *{4,5,6}*.

5. Choisissez une bijection quelconque de *{1,2,3}* en *{4,5,6}* de l'exercice précédent, et appelez-la f. Considérez toutes les permutations p de *{1,2,3}*, et trouvez $f \circ p$ pour chaque permutation p. Comparez à la liste de l'exercice précédent. Que pouvez-vous conclure ?

6. Trouvez toutes les involutions de l'ensemble *{1,2,3}*.

7. Si on donne le nom A à *{1,2,3}*, le nom B à *{4,5}*, et le nom C à *{7,8,9}*, est-il possible de trouver une bijection entre A et C ? Est-il possible de trouver une fonction f de A en B, et une fonction g de B en C, tel que cette bijection est $g \circ f$?

8. Si on donne le nom A à *{1,2,3}*, le nom B à *{4,5,6,10}*, et le nom C à *{7,8,9}*, trouvez une bijection entre A et C. Est-il possible de trouver une fonction f de A en B, et une fonction g de B en C, tel que cette bijection est $g \circ f$?

Logique, variables et ensembles

La logique propositionnelle

Les propositions

La logique est l'étude des notions de « vrai » et de « faux ». On part de l'idée qu'il y a des affirmations qui sont vraies, et d'autres qui sont fausses et qu'on ne considère pas d'affirmations qui ne sont ni vraies, ni fausses, ou qui sont en même temps vraies et fausses. Dit comme ça, on a l'impression que c'est une vision simpliste du monde. Il y a beaucoup d'affirmations, justement, dont on ne peut pas dire qu'elles sont vraies ou fausses. « Il fait beau aujourd'hui » est une telle affirmation : d'abord, elle dépend où et quand elle est prononcée pour pouvoir dire qu'elle soit vraie ou fausse ; en suite, il y des cas où une personne va trouver qu'il fait beau, et une autre personne va trouver qu'exactement le même temps ne correspond pas à ce qu'il entend par « il fait beau ».

On définit une proposition comme une affirmation dont il est clair qu'elle est ou bien vraie de façon objective, ou bien fausse de façon objective, mais qu'elle ne peut pas être vraie et fausse en même temps, ni être ni vraie, ni fausse.

Comme nous allons nous intéresser seulement à des propositions concernant des objets mathématiques, l'objectivité sera moins contestable que dans le cas d'affirmations de jugements humains sur des valeurs subjectives.

Une affirmation « trois est un nombre impair » est bien une proposition (elle est vraie). L'affirmation « dix est un multiple de trois dans les nombres naturels » est aussi une proposition (elle est fausse).

Pour qu'une proposition puisse être vraie ou fausse « tout le temps », il ne faut pas que cette proposition dépende des circonstances. Il ne faut pas qu'elle dépende de quoi que ce soit, d'ailleurs. On dit qu'**une proposition est close.**

Notre phrase « il fait beau » dépend du jour et de l'endroit d'où on parle. Il peut faire beau aujourd'hui, et il peut faire du mauvais temps demain. Ce n'est pas une proposition close.

Une affirmation « le nombre *n* est impair » dépend du choix du nombre *n*. Ce n'est pas une affirmation close. Par contre, « le nombre trois est impair » est une proposition close.

Combiner des propositions

Il y a cinq façons standard de modifier ou de combiner des propositions :

- la négation (« ne pas »)
- la disjonction (« ou »)
- la conjonction (« et »)
- l'implication (« si.... alors ... »)
- l'équivalence (« …. si et seulement si … »)

Pour la logique, le contenu exact d'une proposition n'importe pas du tout, **c'est son statut de vérité qui est la seule chose**

qui compte. Si on donne un nom à une proposition, disons, *P*, alors la seule chose qui compte, c'est de savoir si *P* est « vrai », ou si *P* est « faux ».

Ainsi, **la négation d'une proposition *P*, qu'on écrit comme ~*P* ou** $\neg P$ **,** est une proposition elle-même, qui est vraie, si *P* était fausse, et qui est fausse si *P* était vraie. Et il n'y a rien d'autre à dire sur la négation. On peut ainsi résumer la négation dans **un tableau de vérité** :

P	**~*P***
Vrai	Faux
Faux	Vrai

Pour la disjonction, on a deux propositions de départ, qu'on nommera *P* et *Q*. On note la disjonction de *P* et de *Q* : ***P* ou *Q***.

Cette fois, il y a plus de possibilités, mais elles sont toutes dans le tableau de vérité :

P	***Q***	***P* ou *Q***
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

On voit que la disjonction correspond à ce qu'on comprend intuitivement par le mot « ou ».

De la même façon, la conjonction de *P* et de *Q*, qu'on écrit *P* et *Q*, est définie par le tableau suivant :

P	***Q***	***P* et *Q***
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

C'est bien ce qu'intuitivement, on entend par « et ».

L'implication de *P* et de *Q* s'écrit « *P* implique *Q* », et le tableau de vérité devient :

P	***Q***	***P* implique *Q***
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

Finalement, l'équivalence de *P* et de *Q* s'écrit « *P* équivaut *Q* », et le tableau devient :

P	***Q***	***P* équivaut *Q***
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Vrai

En logique propositionnelle, on l'aura compris, tout se démontre avec un tableau de vérité. Il suffit de considérer toutes les combinaisons de « vrai » et de « faux » pour toutes les propositions qui apparaissent dans le problème, et on trouve le résultat.

Par exemple, on peut considérer une expression logique complexe comme :

((P et *Q)* ou *P)* implique *(P* est équivalent à ~*Q)*

Il y a deux propositions qui apparaissent dans cette expression : *P* et *Q*. Il suffit d'analyser tous les cas :

1. *P* et *Q* sont faux. Alors (*P* et Q*)* est faux. Alors ((*P* et *Q*) ou *P*) est faux. On peut déjà conclure que l'expression, dans ce cas, est vraie.
2. *P* est faux, *Q* est vrai. (*P* et *Q*) est faux. ((*P* et *Q*) ou *P*) est faux. On peut aussi conclure que l'expression est vraie.
3. *P* est vrai, *Q* est faux. (*P* et *Q*) est faux. ((*P* et *Q*) ou *P*) est vrai. ~*Q* est vrai. (*P* est équivalent à ~*Q*) est vrai. Donc l'expression en total est vrai.
4. *P* est vrai, *Q* est vrai. (*P* et *Q*) est vrai. ((*P* et *Q*) ou *P*) est vrai. ~*Q* est faux. (*P* est équivalent à ~*Q*) est faux. Alors, l'expression en total est fausse.

On peut vérifier que l'expression est équivalente à ~*(P* et *Q)*.

Schémas logiques

La logique propositionnelle sert surtout à indiquer des formes d'argument logique, c'est à dire, des déductions logiques qui établissent la vérité d'une conclusion, quand on peut supposer la vérité des hypothèses. Il y en a beaucoup. **Tout schéma logique a une liste d'hypothèses et une conclusion.** Nous allons illustrer comment on établit la validité d'un schéma logique.

Le modus ponens est sans doute le schéma le plus connu et utilisé. Il a deux hypothèses. La première est « *P* implique *Q* » et la deuxième est « *P* ». La conclusion est « *Q* ».

Comment démontre-t-on ce schéma ? Dans le schéma apparaissent deux propositions « élémentaires », *P* et *Q*. Il faut considérer toutes les combinaisons de valeurs de vérité pour ces propositions élémentaires, et déduire les valeurs de vérité qui en suivent pour les hypothèses et pour la conclusion. *Il faut vérifier que chaque fois que toutes les hypothèses sont vraies, la conclusion est vraie, aussi.* Si c'est toujours le cas, le schéma logique est démontré.

P	***Q***	***P* implique *Q***	***P***	***Q***
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Vrai	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai
Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux

Nous voyons que, quand *P* et *Q* parcourent toutes les possibilités, les deux hypothèses sont seulement simultanément vraies pour la première ligne. Il s'avère que la conclusion est bien vraie dans ce cas, ce qui prouve la validité du schéma logique « modus ponens ».

Le modus tollens a aussi deux hypothèses, et une conclusion. Les deux hypothèses sont : « *P* implique *Q* » et « ~*Q* » ; la conclusion est « ~*P* ». Nous construisons le tableau :

P	***Q***	***P* implique *Q***	**~*Q***	**~*P***
Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Vrai	Faux	Faux	Vrai	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai
Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai

Nous constatons que la seule instance où les deux hypothèses sont vraies, correspond à la dernière ligne, et que la conclusion est vraie sur cette ligne, donc le schéma logique est validé.

Le modus ponens est le schéma de base de « l'utilisation d'un théorème ». Nous allons voir qu'un théorème est toujours formulé comme une implication (hypothèses impliquent conclusion). Le modus ponens nous permet de considérer un théorème, et de considérer la vérité des hypothèses, pour pouvoir conclure sur la vérité de la conclusion.

Le modus tollens est le schéma logique à la base de la « **réduction à l'absurde** ». Si on veut démontrer *U*, on considère ~*U* et on l'appelle *P*. On va ensuite démontrer une implication (un « théorème ») : *P* implique *Q*. Si *Q* est une « absurdité », une proposition fausse, alors on peut appliquer le modus tollens, qui nous dit qu'il en suit que *P* est faux (et donc, que *U* est vrai, ce qu'il fallait démontrer).

Il y a encore beaucoup de schémas logiques, nous allons en citer quelques-uns.

Le syllogisme hypothétique. Il y a deux hypothèses : « *P* implique *Q* » et « *Q* implique *R* » et une conclusion : « *P* implique *R* ».

Le syllogisme disjonctif : Il y a deux hypothèses : « *P* ou *Q* » et « ~*P* », et une conclusion : « *Q* »

Le dilemme constructif : Il y a trois hypothèses : « *P* implique *Q* », « *R* implique *S* » et « *P* ou *R* » ; la conclusion est « *Q* ou *S* »

Le dilemme destructif : Il y a trois hypothèses : « *P* implique *Q* », « *R* implique *S* » et « ~*Q* ou ~*S* » ; la conclusion est « ~*P* ou ~*R* »

La simplification : Il y a une hypothèse : « *P* et *Q* » et une conclusion : « *P* ».

La conjonction : Il y a deux hypothèses : « *P* » et « *Q* », et une conclusion : « *P* et *Q* »

L'addition : Il y a une hypothèse : « *P* » et une conclusion : « *P* ou *Q* »

La composition : Il y a deux hypothèses : « *P* implique *Q* » et « *P* implique *R* » ; la conclusion est « *P* implique (*Q* et *R*) »

Le théorème de De Morgan (1) : Il y a une hypothèse : « *~(P* ou *Q)* » et une conclusion : « ~*P* et ~*Q* »

Le théorème de De Morgan (2) : Il y a une hypothèse : « *~(P* et *Q)* » et une conclusion : « *~P* ou *~Q* »

La distribution (1) : hypothèse : « *P* et *(Q* ou *R)* » ; conclusion : « *(P* et *Q)* ou *(P* et *R)* »

La distribution (2) : hypothèse : « *P* ou *(Q* et *R)* » ; conclusion : « *(P* ou *Q)* et *(P* et *R)* »

L'introduction bi-conditionnelle : il y a deux hypothèses : « *P* implique *Q* » et « *Q* implique *P* » et une conclusion : « *P* est équivalent à *Q* ».

Théorèmes et preuves

Un théorème est une proposition qui prend la forme d'une implication[2] dans un système axiomatique. Un système axiomatique commence par une liste de propositions assumées vraies, suivi d'une liste de théorèmes avec leur preuve formelle.

Une preuve formelle est une liste de propositions, qui commence par une liste d'hypothèses. Après cette liste d'hypothèses, chaque ligne contient une proposition qui est la conclusion d'un schéma logique dont les hypothèses se trouvent en amont dans la liste, sont des théorèmes déjà prouvés, ou sont les axiomes du système qu'on étudie, pour finir sur une dernière ligne, qui est la proposition de conclusion. Une

2 Un théorème peut aussi prendre la forme d'une équivalence, mais alors c'est en fait deux théorèmes formulés en un : A implique B et B implique A. Finalement, un théorème peut, parfois, juste affirmer une proposition A, sans conditions. Par exemple « la racine carré de deux est un nombre irrationnel ». Alors, on peut le voir comme « vrai » implique A.

preuve formelle indique la validité d'**un théorème, qui est la proposition que la liste d'hypothèses implique la conclusion, dans le système en considération**.

Essentiellement, on dit qu'une preuve d'un théorème est une suite de propositions, tel que la vérité de chaque proposition suit d'un schéma logique valide dont les hypothèses sont démontrées ou acceptées vraies à ce point, ou présumées vraies dans le cadre du théorème (c.a.d. ce sont les hypothèses du théorème même).

Il est important de souligner qu'on peut seulement utiliser les propositions qui précèdent la proposition qu'on veut déduire et qu'*on n'a pas le droit d'utiliser les propositions qu'on démontrera après*. Effectivement, c'est une erreur souvent commise d'utiliser, comme hypothèse, une conclusion ultérieure. Ce schéma logique n'est pas valide et est une erreur tellement souvent rencontrée, qu'elle a un nom : **un argument circulaire.**

Un peu de notation

La conjonction est aussi notée $P \wedge Q$

La disjonction est aussi notée $P \vee Q$

L'implication est notée : $P \Rightarrow Q$

et l'équivalence : $P \Leftrightarrow Q$

Un schéma logique est parfois représenté par le symbole $\vdash$ qui sépare la liste des hypothèses de la conclusion.

On peut se poser la question quelle est **la distinction entre une**

implication (un théorème) et un schéma logique ? Les deux ont une liste d'hypothèses et une conclusion. Mais une implication est une proposition logique, et ne permet pas en soi, de construire une nouvelle proposition logique ; un schéma logique est une « manipulation autorisée » de propositions et permet de construire de nouvelles propositions à partir de propositions existantes. Un schéma logique est un outil de la logique qui marche toujours ; un théorème est une proposition dont la vérité dépend du système axiomatique dont il fait partie.

Tautologies et contradictions

Une proposition qui prend la forme d'**une expression logique qui est toujours vraie**, indépendamment des valeurs de vérité des propositions qui y apparaissent, est appelée : **une tautologie**.

Une tautologie connue est **la loi du tiers exclu** : *P* ou ~*P*. Si *P* est vrai ou *P* est faux, la proposition *(P* ou ~*P)* est vraie.

Une contradiction est la négation d'une tautologie.

Les tautologies sont les seules « vérités absolues » qu'on peut déduire de la logique pure. Mais elles ne nous apprennent que peu de choses.

S'entraîner

1. Démontrez au choix, quelques schémas logiques énoncés.

Un exemple de système axiomatique

Nous allons introduire un tout petit système axiomatique qui illustre les notions abordées. Comme nous nous sommes limités à la logique propositionnelle pour l'instant, c'est un système axiomatique qui se limite à des propositions closes, qu'il faudra énumérer. C'est la partie « définition » de notre système : nous introduisons les « notions atomiques » du système. Ensuite, nous allons énumérer les axiomes qui postulent donc des propositions vraies concernant ces notions atomiques. Finalement, nous pouvons utiliser ce système pour prouver des théorèmes concernant les notions atomiques.

Les propositions de notre système :

- *P1* : « Jean mange une pomme »
- *P2* : « Il y a une pomme en moins »
- *P3* : « Jean a mal au ventre »
- *P4* : « La sorcière empoisonne les pommes »

Notez que nous introduisons ces « notions atomiques », mais nous ne disons pas s'ils sont vrais ou faux. Ensuite seulement, nous allons introduire les axiomes, dont il faudra accepter la vérité :

Axiomes :

- $P2 \Rightarrow P1 \;\; (A1)$
- $P1 \wedge P4 \Rightarrow P3 \; (A2)$

Nous pouvons maintenant prouver un théorème :

Théorème : $P2 \wedge {\sim}P3 \Rightarrow {\sim}P4$

1. ***P2* ^ *~P3*** (hypothèse du théorème)

2. $P2$ (1. et simplification)

3. $\sim P3$ (1. et simplification)

4. $P1$ (2. et $A1$; modus ponens)

5. $\sim(P1 \wedge P4)$ (3. et $A2$; modus tollens)

6. $\sim P1 \vee \sim P4$ (5. et De Morgan)

7. $P1 \wedge (\sim P1 \vee \sim P4)$ (4. et 6. et la conjonction)

8. $(P1 \wedge \sim P1) \vee (P1 \wedge \sim P4)$ (7. et distributivité)

9. faux $\vee$ $(P1 \wedge \sim P4)$ (8. et contradiction)

10. $(P1 \wedge \sim P4)$ (9. et table de vérité de la disjonction)

11. $\boldsymbol{\sim P4}$ (10. et simplification) Q.E.D.

Le théorème, qui est formulé comme une implication, est prouvé en écrivant l'hypothèse sur la première ligne, et chaque ligne qui suit est une conclusion logique d'un schéma logique des lignes précédentes ou des axiomes. Sur la dernière ligne, nous avons la conclusion du théorème, ce qui termine la preuve (notée par « Q.E.D. »). Chaque ligne contient donc une proposition et sa justification (le schéma logique et les hypothèses).

Notez que nous ne savons pas si Jean mange une pomme. Nous savons que s'il y a une pomme en moins et Jean n'a pas mal au ventre, alors la sorcière n'a pas empoisonné les pommes.

Ensembles, prédicats et variables

Gros ensembles

Quand nous avons introduit les notions d'ensembles dans le chapitre précédent, dans les exemples, nous avons toujours considéré des ensembles tellement petits qu'on pouvait les définir en énumérant leurs éléments, comme *{1,2,5,8}*. Mais en mathématiques nous avons surtout besoin de gros ensembles qui contiennent tellement d'éléments qu'on ne peut pas envisager de faire cela ; la plupart des ensembles sera d'ailleurs de taille infinie. Il faut alors une autre façon pour définir un ensemble. Nous rappelons qu'un ensemble est bien défini quand on peut déterminer sans ambiguïté si un élément appartient à cet ensemble ou pas. Une façon de le faire est d'avoir une condition sur l'élément, c'est à dire **une façon systématique de fabriquer une proposition logique quand l'élément en question est donné.** Si la proposition est vraie, alors l'élément appartient à l'ensemble, et si la proposition est fausse, alors l'élément n'appartient pas à l'ensemble.

Jusqu'à la fin du 19ième siècle, on a cru qu'il suffisait de fabriquer une telle proposition pour que cela définisse un ensemble, mais quand on fabrique des propositions suffisamment tordues, on peut arriver à des contre-sens de cette façon. **Alors, l'utilisation de cette technique n'est permise que pour définir un sous-ensemble d'un ensemble dont l'existence est avérée d'une autre façon : par construction, ou par axiome.**

Ainsi, il faut donc avoir un ensemble, qu'on nommera *U*, qui est déjà défini et existant. Si on arrive à fabriquer une proposition *pour un élément de U quelconque*, cela nous permet de définir le sous-ensemble *A* de *U*, tel que les éléments de *A* sont les éléments de *U* pour lesquels cette proposition est vraie.

Pour illustrer ceci, considérons que nous acceptons que l'ensemble des nombres naturels existe, et que nous l'appelons $\mathbb{N}$. Alors, on peut définir un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, qui sera l'ensemble des nombres pairs. On a une façon de « fabriquer une proposition logique pour chaque nombre » : on l'écrit « … divisé par deux a comme reste zéro ». Ceci n’est pas, en soi, une proposition. Mais « 19 divisé par deux a comme reste, zéro » est bien une proposition (fausse, d’ailleurs). On peut facilement voir que notre « usine à propositions » va fabriquer une proposition logique différente pour chaque nombre ; parfois, cette proposition sera vraie, parfois elle sera fausse. Quand elle est vraie, le nombre en question fera partie de notre sous-ensemble de nombres pairs, quand elle est fausse, le nombre n’en fera pas partie.

Mais ceci illustre la nécessité d'avoir un « ensemble de départ ». Effectivement, si on veut savoir si l'élément « banane » appartient à l'ensemble des nombres pairs, nous avons un problème : la proposition fabriquée nous donne : « banane divisé par deux a comme reste, zéro ». Ceci n'est pas une proposition logique, mais du charabia. On ne sait pas du tout ce que veut dire, diviser une banane par deux et prendre le reste.

Notre usine à propositions logiques doit donc seulement fonctionner pour les éléments qui sont dans un « grand ensemble ».

A la fin du 19ième siècle, le mathématicien et philosophe, Bertrand Russell, avait découvert une faille énorme dans la façon de faire jusque là : **le paradoxe de Russell**.

Il va ainsi : **Donnons le nom *E* à l'ensemble dont les éléments sont les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes.**

A première vue, il semble que cet ensemble *E* est parfaitement bien défini : pour un candidat élément, un ensemble donné, la proposition « cet ensemble est un élément de lui-même » semble être une proposition logique tout-à-fait normale, car pour qu'un ensemble soit bien défini, il faut en pouvoir décider si un élément en fait parti. Donc, pour tout ensemble on peut dire s'il fait parti de lui-même ou non, n'est-ce pas ?

Eh bien, le paradoxe désarmant va ainsi : est-ce que *E* contient lui-même comme élément ?

Si E contient lui-même, il appartient à *E*, et cela veut dire que *E* est un ensemble qui ne contient pas lui-même. Mais on vient de dire le contraire. Si, par contre, *E* ne contient pas lui-même, par définition de *E*, *E* est un élément de *E*. Mais on vient de dire le contraire.

Le paradoxe de Russell illustre qu'on ne peut pas, en général, prendre une « usine à propositions » et considérer qu'il y a un ensemble qui va avec, ce qui était l'habitude jusque là. Les notions « usine à propositions » et « ensemble » sont des notions différentes – jusque là, on les avait confondues et on n'avait pas réalisé pleinement l'utilité de la notion d'ensemble. On avait cru qu'il suffisait d'inventer une « usine à propositions » et que cela définissait automatiquement un objet mathématique, mais on voit ici que cela peut mener à des contre-sens. La notion d'ensemble prend alors toute sa signification. C'est aussi pour cela qu'on peut utiliser cette technique seulement pour définir des sous-ensembles d'un ensemble qui existe déjà.

Prédicats et variables

Nous avons beaucoup parlé d' « usines à proposition ». Une « usine à proposition » s'appelle un **prédicat**. Un prédicat est, en quelque sorte, **une « proposition avec des trous dedans »**, et quand on remplit les trous avec des éléments, cela devient une proposition proprement dite.

Quand nous voulions définir les nombres pairs, nous avions écrit :

« … divisé par deux a comme reste zéro »

Le trou est au début, et c'est là qu'il faut mettre le nombre pour en faire une proposition concernant ce nombre.

Mais ce n'est pas comme ça qu'on écrit un prédicat en réalité. On ne laisse pas un trou, mais on met **un « indicateur de trou »**. Cet indicateur de trou est un nom (souvent une lettre), et elle s'appelle **une variable**.

On donne aussi un nom au prédicat et pour indiquer que, dans ce prédicat, nous avons utilisé une variable, on écrit le nom de cette variable entre parenthèses après le nom du prédicat.

Ainsi, quand nous choisissons le nom de *F* pour le prédicat, et nous choisissons le nom de *X* pour la variable, nous obtenons :

F(X) est « *X* divisé par deux a comme reste, zéro »

F(X) est un prédicat, son nom est *F*, et il utilise une variable au nom de *X*. Partout où *X* apparaît dans l'expression qui suit, il faut considérer que c'est un indicateur du trou qui indique l’emplacement où il faudra mettre l'élément quand le prédicat doit fabriquer une proposition logique.

Pour fabriquer une proposition à partir d'un prédicat et un élément donné, on écrit l'élément entre parenthèses, à la place de la variable, ce qui veut dire qu'on met cet élément dans l'expression à la place de la variable. C'est la règle de substitution.

F(5) fabrique donc une proposition : « 5 divisé par deux a comme reste, zéro » ; ce qui est une proposition fausse.

F(8) fabrique : « 8 divisé par deux a comme reste, zéro » ce qui est une proposition vraie.

Ce système est pratique quand il faut substituer l'élément en question à plusieurs endroits. Un exemple illustre ceci :

F(X) est « *X* est égal à deux fois *X* moins neuf»

Ce prédicat fabrique une proposition pour chaque nombre. Par exemple, *F(4)* fabrique : « 4 est égal à deux fois 4 moins neuf » ; ce qui est une proposition fausse.

F(9) fabrique : « 9 est égal à deux fois 9 moins neuf », ce qui est une proposition vraie.

On ne s'arrête pas là, et on peut introduire **plusieurs variables**, à condition d'utiliser des noms différents. Ainsi, on peut écrire :

F(X,Y) est « 3 fois *X* plus cinq fois *Y* est égal à (*X* plus *Y*) au carré »

Pour fabriquer une proposition avec un tel prédicat, il faut mettre deux éléments dedans, un à la place de *X*, et un autre à la place de *Y*. Ainsi, pour le prédicat ci-dessus, nous avons :

F(1,2) devient la proposition « 3 fois 1 plus cinq fois 2 est égal à (1 plus 2) au carré » ce qui est une proposition fausse (car 13 n'est pas égal à 9).

Quand on ne substitue qu'une seule variable, notre prédicat en deux variables ne devient pas une proposition, mais devient un prédicat en une seule variable. Ainsi, quand on met 2 à la place de *Y*, mais on laisse *X*, on obtient :

F(X,2) est « trois fois *X* plus cinq fois 2 est égal à (*X* plus 2) au carré », ce qui est un prédicat dans la variable *X*, qu'on pourrait nommer *G(X)*.

On appelle les variables dans un prédicat, **des variables libres.**

Notez qu'on peut utiliser les combinaisons de propositions logiques dans les prédicats. Il suffit qu'elles aient un sens quand le prédicat fabrique une proposition.

Par exemple, on peut considérer le prédicat suivant :

F(X) est « (*X* est plus petit que 5) implique (*X* au carré moins *X* est un multiple de 3) ».

Alors, *F(3)* devient « (3 est plus petit que 5) implique (3 au carré moins 3 est un multiple de 3) » ce qui est une proposition vraie. *F(8)* devient « (8 est plus petit que 5) implique (8 au carré moins 8 est un multiple de 3) » ce qui est aussi une proposition vraie, car « faux implique faux » est vrai.

Nous avons vu qu'une « usine à propositions » peut être limitée dans le genre d'objet qu'on met dedans : bien que « Quand on divise …. par deux, on obtient un reste 0 » est une « usine à proposition » quand on l'applique à un nombre naturel, cela ne forme pas une proposition quand on met « banane » dedans. **La ou les variables dans un prédicat doivent être limitées à des éléments d'un ensemble. On dit alors que *F(X)* est un prédicat sur cet ensemble.**

Gros ensembles, le retour

Nous avons maintenant, finalement, tous les outils pour définir un gros ensemble *A*, sous-ensemble d'un autre gros ensemble *U*.

Si *F(X)* est un prédicat qui s'applique aux éléments de *U*, on peut définir l'ensemble *A* :

$A = \{X \in U | F(X)\}$

On lit : « *A* est l'ensemble des éléments *X* de *U*, tel que *F(X)* »

Ceci spécifie déjà que *A* est un sous-ensemble de *U*, car tout élément de *A* est un élément de *U*. Ceci « protège » le prédicat, car *X* ne peut être qu'un élément de *U*, donc ce prédicat forme toujours une proposition logique quand on met cet élément à la place de *X* dans *F(X)*. Le souci avec *F*(banane) n'arrivera pas.

Notez qu'on est parfaitement libre de changer le nom de la variable *X* :

$A = \{W \in U | F(W)\}$

Ainsi, un prédicat, qui a un sens sur un ensemble *U*, définit un sous-ensemble de *U*.

Il y a une relation très proche entre les opérations qu'on peut faire avec les sous-ensembles de *U*, et les combinaisons de propositions logiques. Il ne faut pas s'en étonner : jusqu'à la fin du 19ième siècle, on confondait les deux notions.

Définissons deux ensembles *A* et *B*, parties de *U* :

$A = \{W \in U | F(W)\}$

$B = \{W \in U | G(W)\}$

où *F(W)* et *G(W)* sont deux prédicats sur l'ensemble *U*.

Alors, nous avons :

$A \cap B = \{W \in U | F(W) \wedge G(W)\}$

$A \cup B = \{W \in U | F(W) \vee G(W)\}$

$U \setminus A = \{W \in U | \neg F(W)\}$

$A \subset B$ si et seulement si $F(W) \Rightarrow G(W)$ pour tout $W \in U$

Exemple. Considérons : *F(X)* est « *X* est un multiple de 3 » et *G(X)* est « *X* est un multiple de 5 », deux prédicats qui sont définis sur l'ensemble des nombres naturels ℕ. *A* est alors l'ensemble qui contiendra 0, 3, 6, 9, … et *B* sera l'ensemble qui contiendra 0, 5, 10, 15, 20 … . L'union des deux ensembles sera défini par le prédicat « *X* est un multiple de 3 ou *X* est un multiple de 5 ». L'intersection sera défini par le prédicat « *X* est un multiple de 15 ».

L'ensemble des solutions d'un problème est maintenant facilement exprimé. Considérez l'ensemble *U* dans lequel nous cherchons une solution, et que **le problème se pose sous forme de prédicat** : *F(X)*, c.a.d. nous cherchons les solutions pour lesquelles *F(X)* est vrai. *F(X)* peut, par exemple, prendre la forme d'une équation : *F(X)* est « $X^5 - X - 25 = 0$ ». Alors, l'ensemble des solutions est simplement : $S=\{X\in U|F(X)\}$

Si l'ensemble qu'on veut définir a des éléments avec une certaine structure (par exemple, c'est un couple), on peut assigner plusieurs variables aux « morceaux de l'élément » et le prédicat peut alors s'exprimer en ces variables. C'est typiquement ce qu'on fait **pour définir des relations** :

$$R=\{(X,Y)\in A\times B|F(X,Y)\}$$

Ici, la relation *R*, sous-ensemble de $A \times B$, a comme éléments, des couples, et on décrit ces couples avec deux variables, *X* et *Y*, *X* étant un élément de *A*, et *Y* étant un élément de *B*. Le prédicat sera un prédicat avec les deux variables *X* et *Y*.

Par exemple, la fonction numérique, traditionnellement notée : $f(x) = x^2 + 3$, est correctement définie comme :

$$f = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|y=x^2+3\}$$

Nous avons utilisé un prédicat avec deux variables, x et y, sur les nombres réels (pour l'instant, on accepte cette notion intuitive), ce prédicat étant $y = x^2 + 3$. Quand on met un nombre réel à la place de x, et on met un nombre réel à la place de y, ce prédicat devient une proposition logique. Par exemple, quand on met 12 à la place de y et 3 à la place de x, cela devient : « $12 = 3^2 + 3$ », ce qui est une proposition vraie, et donc, $(3,12)$ est un élément de f ; ou encore : $f(3) = 12$. Il faudrait encore démontrer que f est une fonction : que, si (a,b) et (a,c) appartiennent à f, alors $b = c$. On le voit car si (a,b) appartient à f, alors $a^2 + 3 = b$, et si (a,c) appartient à f, alors $a^2 + 3 = c$, dont on déduit que $b = c$.

Considérez la relation :

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^3 + 3x + 5\}$$

R est une relation, et représentera une courbe elliptique. Par contre, R n'est pas une fonction, car pour tout élément (a,b) de R, il y aura aussi $(a,-b)$ dans R.

S'entraîner

1. Écrivez les prédicats qui définissent les ensembles A, B et C, tel que A contient les nombres 0,3,6,9,12,…, que B contient les nombres 1,4,7,10,13,…. et que C contient les nombres 2,5,8,11,14,… ; écrivez les définitions de ces ensembles comme sous-ensembles de l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$.

2. Définissez l'ensemble des nombres naturels qui sont une solution de l'équation $(X-10)^2 = 36$.

3. Exprimez, en utilisant l'ensemble des solutions, que

l'équation $X^2 + 9 = 0$ n'a pas de solutions dans les nombres naturels.

4. Définissez l'ensemble I des nombres naturels impairs. Faites la même chose pour l'ensemble P des nombres naturels pairs. Est-ce que $\{P,I\}$ est une partition des nombres naturels ? On rappelle que les éléments d'une partition doivent avoir leurs intersections, 2 à 2, vides, et que l'union de tous les éléments de la partition doit donner l'ensemble sur lequel la partition est définie.

5. Considérez les ensembles A, B et C du premier exercice. Est-ce que $\{A,B,C\}$ est une partition des nombres naturels ?

6. La droite (d) a comme équation cartésienne : $5x+3y +8 =0$. Écrivez cette droite comme relation R, interne aux nombres réels. Le cercle unitaire est constitué des points qui satisfont $x^2 + y^2 = 1$. Écrivez ceci comme une relation Q interne aux nombres réels. Écrivez l'ensemble qui est constitué des points d'intersection de ce cercle et de cette droite, en utilisant des combinaisons d'ensembles de P et de Q. Écrivez cet ensemble aussi avec un seul prédicat (combiné).

Logique des prédicats

Les quantificateurs

Nous avons vu l'utilisation de prédicats dans la définition d'un ensemble. Mais on peut aussi utiliser des prédicats en dehors de la définition explicite d'un ensemble, et **fabriquer une proposition à partir d'un ensemble existant et d'un prédicat.**

Il existe le quantificateur universel et le quantificateur existentiel (et une variante sur ce dernier, le quantificateur unique). **Un quantificateur associe un nom de variable à un ensemble existant.**

Le quantificateur universel s'écrit $\forall X \in A : F(X)$

Il signifie que *X* prend tous les éléments dans l'ensemble *A* (il associe donc la variable *X* à l'ensemble *A*) et que la proposition, fabriquée en mettant chaque élément dans le prédicat *F*, est vraie. En d'autres termes, *F(X)* est vrai pour tout élément *X* de l'ensemble *A*. Il faut bien sûr que le prédicat soit défini sur l'ensemble *A*.

L'expression totale est une proposition logique qui ne contient plus *X* comme variable libre.

Il en suit bien sûr que si *F(X)* était le prédicat définissant *A*, que cette proposition est vraie.

Il en suit aussi que si *A* est l'ensemble vide, *{}*, alors cette proposition est toujours vraie.

Le quantificateur existentiel s'écrit : $\exists X \in A : F(X)$

Il signifie qu'il existe des éléments dans *A* tel que, si on remplace *X* par ces éléments, *F(X)* est vrai. Le quantificateur existentiel associe donc aussi la variable *X* à l'ensemble *A*.

Comme avec le quantificateur universel, la variable *X* n'est plus libre, et l'expression totale est une proposition logique.

Il faut noter que si l'ensemble *A* est vide, alors cette proposition est toujours fausse.

La variante, **le quantificateur unique**, s'écrit $\exists ! X \in A : F(X)$

Il implique qu'il existe exactement un seul élément de *A* qui, substitué à la place de *X* dans *F(X)*, fabrique une proposition vraie, et que pour tout autre élément éventuel de *A*, cette proposition devient fausse.

Considérons *A* = $\{X \in \mathbb{N} | X\, est\, multiple\, de\, 15\}$

Alors : $\forall X \in A : X\, est\, multiple\, de\, 5$ est une proposition vraie. Tous les éléments de *A* sont des multiples de 5.

$\exists X \in A : X\, est\, multiple\, de\, 120$ est aussi une proposition vraie. Il y a, dans *A*, des multiples de 120.

Logique des prédicats

Le domaine de la logique des prédicats est vaste, et on va se limiter à quelques notions. On considère d'abord **la négation du quantificateur universel, et la négation du quantificateur existentiel.**

$\neg(\forall X \in A : F(X))$ équivaut $\exists X \in A : \neg F(X)$

$\neg(\exists X \in A : F(X))$ équivaut $\forall X \in A : \neg F(X)$

Un autre aspect de la logique des prédicats consiste à tenir compte du **statut des variables** : est-ce des variables libres ou non. Un quantificateur enlève la « liberté » d'une variable, celle qu'il associe à un ensemble. Mais quand le prédicat contient plusieurs variables, l'application d'un quantificateur laisse les autres variables libres, et le résultat est donc un prédicat, mais avec moins de variables libres. On peut, à son tour, appliquer un quantificateur à ce prédicat, si on veut.

Imaginez qu'on veut exprimer : « pour tout nombre, si c'est un nombre premier, il existe un entier tel que le carré de cet entier est plus grand que le nombre premier ».

Considérons : *F(X,Y)* est un prédicat qui dit « X^2 est plus grand que *Y* ». Considérons *G(X)* qui dit : « *X* est un nombre premier ».

On écrit le prédicat *H(X,Y) : (G(Y) => F(X,Y))*

Ce prédicat dit « *Y* est un nombre premier, implique que X^2 est plus grand que *Y* ». Quand on ajoute un quantificateur existentiel sur *X*, on obtient un prédicat en *Y* :

K(Y) : $\exists X \in \mathbb{N} : H(X, Y)$

K(Y) est un prédicat qui se transforme en proposition vraie pour tout nombre naturel. Ainsi, on peut écrire :

$\forall Y \in \mathbb{N} : K(Y)$

Ce qui donne en total : $\forall Y \in \mathbb{N} : \exists X \in \mathbb{N} : (G(Y) \Rightarrow F(X, Y))$

$\forall Y \in \mathbb{N} : \exists X \in \mathbb{N} : (Y \textit{ est nombre premier} \Rightarrow X^2 \textit{ est plus grand que } Y)$

La combinaison « pour tous, il existe » sera souvent utilisée.

Nous pouvons bricoler des prédicats, en utilisant des quantificateurs, pour exprimer des conditions de solution. Par exemple, le prédicat « est un multiple de 5 », qu'on a écrit avec des mots, peut être exprimé de façon précise et formelle, en spécifiant exactement ce que veut dire « est un multiple de 5 » : ça veut dire qu'il existe un nombre naturel, qui, quand on le multiplie avec 5, donne le multiple en question.

Exprimons cela :

F(y) = $\exists x \in \mathbb{N} : y = 5 \times x$

Dans ce prédicat, il y a deux variables : *x* et *y*. Mais seulement *y* est une variable libre. Ce prédicat est donc un prédicat d'une seule variable, *y*, c'est pour ça qu'on le note *F(y)*. Il exprime l'idée « *y* est un multiple de 5 ».

Logique des prédicats et ensembles

La définition d'un ensemble par prédicat permet d'utiliser des prédicats qui contiennent des quantificateurs. Nous avions notre prédicat « est un multiple de 5 », qui s'écrivait : $\exists x \in \mathbb{N} : y = 5 \times x$

On peut ainsi définir l'ensemble des multiples de 5 :

$$A = \{ y \in \mathbb{N} | \exists x \in \mathbb{N} : y = 5 \times x \}$$

Essayons maintenant de définir l'ensemble des nombres premiers. Nous rappelons qu'un nombre premier est un nombre naturel qui n'est multiple que de 1 et de lui-même et qui n'est pas 1.

D'abord, on construit le prédicat : « *y* est multiple de *z* ». Notre exemple avec les multiples de 5 suggère qu'en remplaçant 5 par *z*, on devrait y arriver :

M(y,z) = $\exists x \in \mathbb{N} : y = z \times x$

Ce prédicat a encore 2 variables libres : *y* et *z*.

On va d'abord exprimer ce qui n'est pas un nombre premier. *Y* n'est pas un nombre premier, s'il existe un nombre *z* qui n'est ni

1, ni *y*, tel que *y* est un multiple de ce nombre *z*.

$N(y) = \exists z \in \mathbb{N} : \neg(z=1) \wedge \neg(z=y) \wedge (\exists x \in \mathbb{N} : y = z \times x)$

Ce prédicat exprime que le nombre *y* est un multiple d'un nombre *z*, qui n'est pas 1 ni *y*. Donc, ce prédicat exprime que *y* n'est pas un nombre premier.

Alors, nous pouvons finalement, définir l'ensemble des nombres premiers :

$$\{ y \in \mathbb{N} | \neg(\exists z \in \mathbb{N} : \neg(z=1) \wedge \neg(z=y) \wedge (\exists x \in \mathbb{N} : y = z \times x)) \}$$

Nous pouvons simplifier le prédicat. On laisse cela pour un exercice.

S'entraîner

1. Exprimez, avec un quantificateur, la proposition qui dit que tout multiple de 20 est aussi un multiple de 10. Définissez les ensembles correspondants aux multiples de 20 et aux multiples de 10. Exprimez la même chose, mais en utilisant une proposition concernant ces ensembles.

2. Exprimez, avec un quantificateur, que l'équation $X^2 = 25$ a des solutions dans les nombres naturels.

3. Exprimez, avec un quantificateur, que l'équation $X^2 = 2$ n'a pas de solution dans les nombres naturels.

4. Exprimez que l'équation $X^2 - 25 = 0$ a exactement une seule solution dans les nombres naturels en utilisant un quantificateur.

5. Écrivez le prédicat, au nom de *M*, sur les nombres naturels,

avec deux variables, qui exprime que la première variable est un multiple du carré de la deuxième. Ensuite, utilisez ce prédicat M pour fabriquer un prédicat L avec une seule variable, qui exprime que le carré de la variable est un diviseur de 360. Écrivez l'ensemble des variables dont le carré est un diviseur de 360 en utilisant ce prédicat.

6. Simplifiez le prédicat : $\neg \forall x \in \mathbb{N} : \neg (y = x^2)$ Que veut dire ce prédicat ?

7. Simplifiez le prédicat qui exprime que y est un nombre premier. (utilisez la négation des quantificateurs, et De Morgan).

Récapitulons pour le lycée

Dans le programme actuel au lycée, il y a deux notions centrales dont la nature exacte ne peut pas être expliquée clairement dans le cadre du programme, et qui deviennent des notions un peu floues et donc difficiles à assimiler : c'est la notion de **variable**, et la notion de **fonction numérique**. Avec les éléments que nous avons introduits, nous pouvons maintenant être parfaitement clairs là-dessus.

Une variable est toujours un indicateur d'emplacement d'un élément d'un ensemble précis dans un prédicat.

Une équation avec des variables est un prédicat. Une inégalité aussi, d'ailleurs. Quand on rencontre une variable, il faut donc toujours pouvoir **associer un ensemble à cette variable**. Cette association se fait implicitement ou explicitement de *deux* *façons possibles* :

- avec un quantificateur
- dans la définition d'un autre ensemble

Il n'y en a pas d'autre. Souvent, cette association n'est pas faite explicitement car on se trouve dans un contexte non-formel mais elle existe toujours et il faut s'en rendre compte.

Variable inconnue

Si la variable est « **une inconnue** », elle apparaît dans un prédicat et alors elle est associée à un **ensemble de solutions**. Si on écrit : « trouvez les solutions réelles de l'équation $x^2 + 3x - 7 = 0$ », il est clair que l'équation est le prédicat qui est utilisé pour définir le sous-ensemble des nombres réels, tel que ce prédicat est vrai pour les solutions demandées :

$$\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 3x - 7 = 0\}$$

Variable dans une « identité »

Si la variable apparaît dans **une « identité »**, alors elle est implicitement associée à un quantificateur universel :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

est en fait un prédicat avec deux variables, et il faut mettre $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}$: devant, pour transformer cela en proposition (vraie).

Variable dans une expression (formule)

Il faut distinguer nettement une variable d'un nom d'objet *défini.* Pas tous les noms d'objets sont des variables. L'énoncée informelle : « La fonction réelle $f(x) = x^2 + 3$ » implique que x est une variable associée à ℝ, mais f est juste le nom d'une fonction ; f n'est pas une variable.

Une fonction est un ensemble de couples. Toujours.

Souvent, la notion de fonction est confondue avec la notion d'expression, une « formule », par exemple :

$f(x) = sin(x)/(x^2 – 7)$.

Il faut voir une telle expression comme définissant implicitement une fonction (un ensemble de couples) par **une construction de composition de fonctions** (y compris, l'addition et la multiplication comme fonction) ; *le théorème de composition de fonctions définit le domaine de la fonction composée* à partir des domaines des fonctions composantes.

D'une certaine façon, la variable ne sert qu'à indiquer l'imbrication de fonctions dans une notation classique. C'est comme si on écrivait $h(x) = g(f(x))$ alors qu'on voulait écrire : $h = g \circ f$. Une formule consiste d'une imbrication d'opérations binaires (comme +, *, -, /) et de fonctions (comme *sin*). Des opérations binaires ne sont rien d'autre que des fonctions, de « couples de nombres » en nombres : + est une fonction qui contient par exemple, le couple $((3,5) , 8)$. L'image de $(3,5)$ sous la fonction + est 8. Autant que + et * sont des applications, / n'est pas une application : son domaine consiste de tous les couples qui n'ont pas 0 comme deuxième élément. Ici, nous avons donc : $f = / \circ (sin, - \circ (* \circ (I,I),7))$ avec I la fonction identique[3]. Nous n'avons pas l'habitude de voir une fonction écrite de la sorte. Ici, la fonction *f* est la composition suivante : c'est la fonction « division » qui s'applique au couple de fonctions, dont le premier membre est l'application « sin », et le deuxième membre est l'application « différence ». Cette différence s'applique à son tour à un couple de fonctions dont le premier membre est l'application « multiplication », et le deuxième membre, la fonction constante « 7 ». La multiplication, finalement, s'applique au couple de fonctions identiques. Le théorème des fonctions composées nous indique le domaine de cette fonction composée. Jusqu'à la division, toutes les fonctions sont des applications. Ainsi, le domaine de $(sin, - \circ (* \circ (I,I),7))$ est tout $\mathbb{R}$. Par contre, la division ne contient pas, dans son domaine, des couples de la forme $(X,0)$. Ainsi, tous les réels dont l'image sous $- \circ (* \circ (I,I),7)$ est 0, n'appartiendront pas au domaine de *f*, par le théorème de composition de fonctions.

La fonction *f* même sera toujours un ensemble de couples de nombres réels, et la variable *x* est associée au domaine de *f*.

L'expression même ne peut pas avoir d'existence indépendante, autre que celle qui suggère la fonction mentionnée ci-dessus, ou dans un prédicat (équation...).

3 Cette notation de composition de fonctions s'appelle aussi « préfixe » ou notation Polonaise. En inversant l'ordre, on obtient la notation « post-fixe » ou la notation Polonaise inverse. L'entreprise Hewlett-Packard a commercialisé beaucoup de calculatrices utilisant cette notation Polonaise inverse, car elle permet une saisie de formules complexes en moins de frappes de touches que la notation classique, qui s'appelle la notation « infixe ».

Une expression (une « formule ») doit donc :

- **définir implicitement une fonction par composition**
- **ou faire partie d'un prédicat (équation, inégalité…)**

Considérons la définition implicite $f(x) = x^2 / x$. La fonction f ne contient pas 0 dans son domaine, car la formule implique que f est une fonction composée contenant une division, et donc, ceci exclut 0 du domaine de la fonction composée f, car le couple $(0,0)$ ne fait pas partie du domaine de la fonction « / ». La fonction $g(x) = x$ est une autre fonction, qui, cette fois, contient bien le couple $(0,0)$ et donc, 0 fait partie du domaine de g. Nous avons que $f \subset g$, et que $g \setminus f = \{(0,0)\}$. On peut aussi dire que $g = f \cup \{(0,0)\}$ et $f = g \setminus \{(0,0)\}$.

Des égalités ambiguës.

Il y a des circonstances, dans des énoncés, qui peuvent laisser une ambiguïté. Par exemple, considérons la question suivante, avec f et g défini ci-dessus :

Est-ce que $f(x) = g(x)$ est une égalité vraie ?

S'il faut interpréter cela comme **une égalité de fonctions**, il est clairement faux que $f = g$. f n'est pas g. **Ce sont des ensembles différents**.

Si on écrit $x^2/x = x$, veut-on dire implicitement qu'à gauche, on définit une fonction $f(x) = x^2/x$, qu'à droite, on définit une fonction $g(x) = x$ et le signe « = » veut dire que $f = g$, alors nous sommes dans le même cas : les deux fonctions (les deux ensembles) sont différentes.

Par contre, s'il faut interpréter cela comme un prédicat avec un quantificateur, il faudrait savoir sur quel ensemble ce quantificateur s'applique. Si l'ensemble est $\mathbb{R}$ alors nous avons un problème : l'expression de gauche n'est pas définie en 0 et donc, *le prédicat est sans signification en 0* ! C'est comme si x était « banane ». Ce prédicat n'est pas défini sur $\mathbb{R}$. Faut-il alors considérer qu'une identité est à considérer seulement sur l'ensemble où les deux membres (gauche et droite) sont définies ? Dans ce cas, il faut donc considérer le coté gauche comme définissant une fonction, le coté droit comme définissant une autre fonction, et on considère comme « domaine du prédicat », l'intersection des deux domaines de fonction. Dans ce cas, nous avons : $x^2 / x = x$ est une identité valable, car cette identité définit à gauche la fonction f, sur la droite, la fonction g, et dans l'intersection de leurs deux domaines, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'égalité est vraie.

Pour pouvoir répondre à la question : « est-ce que $x^2/x = x$? » *il faut donc savoir de quelle égalité on parle* : égalité de fonctions définies implicitement, ou prédicat avec « domaine » implicite ?

Cas combinés

Au lycée, souvent de façon implicite, on mélange différents contextes de « variables », et il est judicieux de s'en rendre compte. Un exemple, traité en début de 1ière S, est l'équation quadratique paramétrée. Ceci est souvent un problème conceptuel pour les élèves. On parle de problèmes de type : « *trouvez les valeurs de k pour lesquelles* la fonction $f(x) = x^2$

+ *k x – k* est toujours positive ». Il faut trouver un ensemble de solutions (en *k*). Il faut trouver le prédicat qui définit l'ensemble de solutions. Ce prédicat sera un prédicat en *k*, et *x* ne peut pas être une variable libre dans ce prédicat. L'ensemble de solutions *S* prendra la forme suivante :

$$S=\{k\in\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R} : x^2+kx-k\geq 0\}$$

La condition est équivalente à l'exigence que le trinôme **en *x*** n'a pas deux racines, donc $D = k^2 + 4k \leq 0$ ce qui est équivalent à : $k\,(k+4) \leq 0$ avec solution : $-4 \leq k \leq 0$. Ainsi :

$$S=\{k\in\mathbb{R} \mid k^2+4k\leqslant 0\}=\{k\in\mathbb{R} \mid -4\leqslant k\leqslant 0\}$$

Un tout autre problème prend la forme : « *trouvez les valeurs de x tel que*, pour toute valeur de *k*, l'expression $x^2 + k\,x - k$ est toujours positive ». Cette fois, l'ensemble de solutions *S'* sera en *x*, et donc, le prédicat sera en *x*, et *k* n'est pas libre.

$$S'=\{x\in\mathbb{R} \mid \forall k\in\mathbb{R} : x^2+kx-k\geq 0\}$$

$(x-1)\,k + x^2 \geq 0$ *pour tous les k* seulement quand $x = 1$, car les seules droites **en *k*** « $a\,k + b$ » toujours positives ont coefficient directeur 0 et *b* positif. Ainsi :

$$S'=\{x\in\mathbb{R} \mid \forall k\in\mathbb{R} : (x-1)k+x^2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x-1=0\wedge x^2\geq 0\}$$

$S' = \{1\}$

L'écriture explicite du prédicat qui définit l'ensemble de solutions, et donc, la réflexion concernant les variables libres, et la nécessité d'avoir des quantificateurs pour les variables non-libres, permet de mieux saisir le problème à résoudre.

Construire des nombres

L'ensemble-quotient

On rappelle qu'une partition *S* de *A* est une partie de *P(A)*, tel que chaque élément de *A* appartient à exactement un élément de *S* et que *S* ne contient pas *{}*. Il faut aussi se rappeler qu' une relation d'équivalence *R* sur *A* est une relation qui est réflexive, symétrique et transitive.

Il s'avère qu'avec toute relation d'équivalence va une partition, et vice versa.

Tout élément *a* de *A* appartient au domaine de *R* car *R* est une relation réflexive, donc au moins *(a,a)* appartient à *R*.

On définit **la classe d'équivalence de *a*** :

$[a]_R = \{x \in A | (x, a) \in R\}$

C'est donc le sous-ensemble de *A* contenant les éléments qui sont en relation avec *a*. **La partition induite sur *A* par *R*** est alors l'ensemble de toutes les classes d'équivalence :

$A/R = \{V \in P(A) | \exists a \in A : V = [a]_R\}$

Il est relativement facile de démontrer que *A/R* est une partition :

- {} ne peut pas être un élément de *A/R*, car *{}* ne peut jamais être une classe d'équivalence $[a]_R$ qui contient au moins l'élément *a*

- comme tout élément *a* de *A* donne lieu à une classe d'équivalence (parce que *R* est réflexif), tout élément de *A* appartient à au moins un élément de *A/R*
- un élément *x* de *A* ne peut pas appartenir à deux classes d'équivalence différentes $[a]_R$ et $[b]_R$. On va démontrer que, si *x* appartient à deux classes, ces deux classes sont les mêmes. Imaginons que *x* appartienne à $[a]_R$ et à $[b]_R$. Donc *(x,a)* et *(x,b)* appartiennent à *R*. De la symétrie de *R* suit que *(a,x)* et *(b,x)* appartiennent aussi à *R*. Prenons maintenant un élément *y* quelconque de $[a]_R$ donc *(y,a)* appartient à *R*. Alors de *(y,a)* et *(a,x)* suit que *(y,x)* appartient à *R* (transitivité). De *(y,x)* et *(x,b)* suit que *(y,b)* appartient à *R*. Mais alors, *y* appartient à $[b]_R$. Nous avons donc montré que tout élément de $[a]_R$ appartient à $[b]_R$. De la même façon on peut montrer que tout élément de $[b]_R$ appartient à $[a]_R$. Ce sont donc bien les mêmes ensembles, ce qu'il fallait montrer : si *x* appartient à $[a]_R$ et à $[b]_R$ ces deux ensembles sont le mêmes. Ainsi, *x* n'appartient donc qu'à une seule classe d'équivalence.

***A/R* est appelé l'ensemble-quotient ; on l'appelle aussi *A* modulo *R*.**

Dans l'autre sens, c'est beaucoup plus facile. Si on a une partition *S* de *A*, alors la relation d’équivalence *R* qui va avec est donnée par l'idée qu'un couple *(a,b)* appartient à *R* si *a* et *b* font partie du même élément de *S*. Il est facile de démontrer que dans ce cas, *R* est une relation d'équivalence. Par exemple, la réflexivité est démontrée par le fait que tout élément *a* de *A* appartient à un élément de *S*, et que donc tout couple *(a,a)* appartient à *R*. On laisse comme exercice de démontrer la symétrie et la transitivité.

On peut avoir l'impression que c'est une jolie construction pour des gens qui aiment bien des jeux du genre. Mais il s'agit en fait de l'outil principal de construction d'objets mathématiques, car **cette construction de l'ensemble-quotient n'est rien d'autre que la formalisation du processus d'abstraction**.

La relation d'équivalence met en relation les éléments qui suggèrent la même idée (3 vaches, 3 pommes, 3 billes…) ; *la classe d'équivalence devient alors la nouvelle idée abstraite* (« trois »).

S'entraîner

1. Démontrez la symétrie et la transitivité de la relation « … appartient au même élément de la partition que ... ».

2. Considérez la relation interne aux nombres naturels « … a le même reste après division par 3 que ... ». Montrez que cette relation est une relation d'équivalence. Combien de classes d'équivalence y-a-t-il alors ?

Les nombres : entiers et fractions

Les nombres naturels

Il est possible de construire les nombres naturels à partir de l'ensemble vide (et un axiome d'infinité), **mais nous allons simplement supposer que l'ensemble des nombres naturels, $\mathbb{N}$ existe, avec l'addition, la multiplication et leurs inverses,**

la soustraction et la division, comme on le connaît.

L'essentiel des mathématiques sera construit sur cette notion d'ensemble de nombres naturels ; parfois il faudra introduire un axiome supplémentaire d'existence ou d'unicité. Les notions d'ensemble de parties *P(A)*, et la notion de produit d'ensembles, sont deux constructeurs de grands ensembles. Mais la vraie magie de construction vient avec l'ensemble-quotient. C'est en utilisant ce système que nous allons, successivement, introduire les entiers, les fractions, et les nombres réels.

Les notions ordinaires des nombres naturels se conforment aux notions d'ensembles. L'addition de deux nombres naturels est une application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$: elle prend un couple de nombres, et donne leur somme. On peut écrire :

« + » = $\{((a,b),c) \in \mathbb{N}^2 \times N \mid c = a + b\}$

Bien sûr, nous avons triché car nous avons utilisé l'addition dans sa propre définition – mais il est sous-entendu que nous savons, intuitivement, ce que c'est, l'addition. **Le but est simplement d'illustrer que la notion « addition de nombres naturels » n'est rien d'autre qu'un ensemble : un ensemble qui est une fonction.** La multiplication peut aussi être défini de façon similaire.

Les entiers

Les nombres naturels, c'est bien, mais ce qui nous embête, c'est que la soustraction ne marche pas toujours. Elle marche pour 5 – 3, c'est 2, mais 3 – 5 ne marche pas dans les nombres naturels. La soustraction est donc une fonction, mais n'est pas une application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Il y a des couples pour lesquels la soustraction n'existe pas. Il ne faut pas s'en étonner : les nombres naturels viennent de l'abstraction de « compter des objets ». L'interprétation non-abstraite de la soustraction, c'est «d'enlever des objets ». Eh bien, quand on n'a que 3 pommes, il ne faut pas espérer pouvoir enlever 5 pommes.

Mais comme, justement, les nombres naturels sont devenus des notions abstraites, on peut s'imaginer que la soustraction peut avoir un sens abstrait, déconnecté de la notion d'origine qui était de « compter des objets ».

On peut ainsi concevoir un nombre comme « une balance entre deux quantités ». C'est une vision comptable des nombres : la caisse, c'est la balance entre les entrées et les dépenses. S'il y a plus d'entrées que de dépenses, la caisse est positive ; s'il y a plus de dépenses que d'entrées, la caisse « est dans le rouge ». Mais les entrées sont positives, et les dépenses, vue comme dépense, sont positives aussi. Ce qui compte, c'est la balance entre les deux. *La balance ne change pas si on ajoute une même entrée et une même dépense*.

Ainsi, on pourrait, intuitivement, considérer que la notion de « balance », c'est une entrée et une dépense, mais qu'une autre entrée et une autre dépense peut représenter la même balance, à condition d'avoir ajouté le même montant à l'entrée et à la dépense. Par exemple, la balance (entrée = 1000, dépense = 800) est la même que (entrée = 1500, dépense = 1300). Nous allons formaliser cela, et le résultat sera l'ensemble des entiers (aussi appelé « nombres relatifs »).

Considérons les couples de nombres naturels *(a,b)* qui font parti de ℕ×ℕ. Nous allons considérer la relation *R* entre couples de nombres naturels : *(a,b)* et *(a+n,b+n)*.

R =

$$\{((a,b),(c,d))\in(\mathbb{N}^2)\times(\mathbb{N}^2) \mid \exists n\in\mathbb{N}:(a=n+c\wedge b=n+d)\vee(a+n=c\wedge b+n=d)\}$$

Ainsi, *((3,5), (9,11))* est un élément de *R* car il existe un *n* (6 dans notre cas) tel que *3 + 6 = 9* et *5 + 6 = 11*. *((9,11),(3,5))* est aussi dans *R*, car il existe un n (6 dans notre cas), tel que *9 = 3 + 6* et *11 = 5 + 6*.

On peut facilement vérifier que *R* est une relation d'équivalence. **L'ensemble des nombres entiers** est :

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}/R$$

Chaque nombre entier est une classe d'équivalence de couples, tels qu'ils sont reliés par la relation *R*. Ce sont les classes de « balances identiques avec des entrées et sorties différentes ».

On a donc fait abstraction de la notion d'entrée et de sortie en soi, et c'est la notion de « balance » qui est l'idée abstraite tirée de ceci.

La **notation classique** pour *[(a,b)]* finit par être *a – b*. Si *a > b*, alors, *a – b* est un nombre naturel ; si *a < b*, alors on note ce nombre entier comme *– (b – a)*, où *b – a* est un nombre naturel.

Par exemple, la classe d'équivalence *[(8,3)]*, c'est l'ancien nombre naturel 5 car 5 est la balance de 8 revenus et 3 dépenses. La classe d'équivalence *[(3,8)]* sera le nombre -5 en notation classique, car c'est la balance de 3 revenus et 8 dépenses.

Les anciens nombres naturels sont facilement retrouvés : l'ancien *n* de ℕ devient *[(n,0)]* dans ℤ.

Par contre, il nous faut maintenant définir les opérations d'addition, multiplication et autres sur ce nouvel ensemble. Si nous utilisons les éléments au hasard des classes d'équivalence pour définir une notion, il faudra toujours démontrer que le choix spécifique de cet élément n'influence pas le résultat. Voyons ce que ça donne pour l'addition.

Comment définit-on l'**addition de deux nombres entiers** ? Imaginons que nous voulons calculer la somme de *[(3,8)]* (ce qui est le nombre -5) et de *[(4,1)]* (qui est le nombre 3). C'est assez simple : le résultat est *[(7,9)]*, qu'on obtient en faisant la somme des premiers éléments $3 + 4 = 7$, et la somme des deuxième éléments $8 + 1 = 9$. Et *[(7,9)]*, c'est bien le nombre -2 : effectivement $-5 + 3 = -2$ en notation classique. Donc ***[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c,b+d)].*** Mais est-ce que le choix de l'élément de la classe ne joue pas ? Un autre élément serait *(a+n,b+n)* pour la première classe, et *(c+m,d+m)* pour la deuxième classe. On aurait alors calculé comme somme : *[(a+n+c+m, b+n+d+m)]*. Mais si on met $k = n + m$, alors cette classe est *[(a+c+k,b+d+k)]*, ce qui est bien la même classe que *[(a+c,b+d)]*.

Nous constatons que l'addition des entiers correspond à l'addition des naturels si nous avons à faire à des naturels :

[(n,0)] + [(m,0)] = [(n+m,0)].

Il y a, chez les nombres entiers, une notion qui n'existe pas chez les naturels : **le négatif d'un nombre. Le négatif de *[(a,b)]* est *[(b,a)]***, tout simplement. Il est facile de vérifier que le choix de l'élément ne change pas le résultat.

La **multiplication** est un peu plus compliquée :

[(a,b)] × [(c,d)] = [(ac+bd,ad+bc)]. On laisse comme exercice de vérifier que le choix des éléments ne change pas le résultat.

D'où vient cette formule ? Elle vient de l'idée que *[(a,b)]* représente *a – b*, et *[(c,d)]* représente *c – d*. Alors, le produit, *(a – b) (c – d) = a.c – a.d – b.c + b.d = (a.c + b.d) – (a.d + b.c)*, ce qui prend la forme *[(a.c+b.d,a.d+b.c)]*.

Il en suit automatiquement que la multiplication pour les naturels est la même, car *[(n,0)] [(m,0)] = [(n.m,0)]*, et il en suit aussi que positif fois positif est positif, négatif fois négatif est positif, et négatif fois positif ou positif fois négatif est négatif.

Au départ, on considère les nombres entiers comme des classes d'équivalence de couples de nombres naturels, comme ils sont défini. Mais après un certain temps et habitude, ces constructions *commencent à vivre leur propre vie comme nombre*. Alors nous oublions un peu cette construction, et le nouveau concept abstrait prend place dans le bestiaire des notions mathématiques abstraites, comme avant. *Seulement, chaque fois que nous avons un doute sur un détail de son existence, nous pouvons retourner à sa construction comme ensemble et cela enlèvera toute ambiguïté.*

Les nombres rationnels

La construction des nombres rationnels suit exactement le même chemin que la construction des nombres entiers, mais cette fois, nous ne nous occupons pas de l'addition, mais de la multiplication.

Nous formons des couples de nombres entiers *(a,b)* avec *a* et *b* des nombres entiers et *b* en plus, non nul. Cette fois, nous n'avons pas *a – b* en tête, mais *a/b* (c'est pour cela que *b* doit être non-nul). Et nous allons définir une relation d'équivalence *R* entre *(a,b)* et *(z.a, z.b)*, avec *z* un nombre entier non nul qui vient à dire que *(a.z)/(b.z)* est la même fraction que *a/b* :

$$R=\{((a,b),(c,d))\in F\times F|\exists n\in\mathbb{Z}_0:(a=n.c\wedge b=n.d)\vee(a.n=c\wedge b.n=d)\}$$

Nous avons noté $F=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0$ $\mathbb{Z}_0$ est l'ensemble des entiers, sans zéro.

Avec cette relation d'équivalence, nous pouvons maintenant définir ce qu'est l'ensemble des nombres rationnels (l'ensemble des fractions) :

$$\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0/R$$

Ainsi, un nombre rationnel est une classe d'équivalence de couples de nombres entiers : *[(-8,3)]* est la fraction *– 8/3*. C'est la même fraction que *-16/6*, car il y a un nombre entier, 2, qui donne l'équivalence entre *[(-8,3)]* et *[(-16,6)]*.

Les anciens nombres entiers sont facilement incorporés : **un ancien nombre entier *z* sera maintenant le nombre**

rationnel *[(z,1)]*.

La multiplication de deux nombres rationnels est simplement :

***[(a,b)] . [(c,d)] = [(a.c , b.d)]*.**

Par exemple, *[(8,3)] . [(2,7)] = [(16,21)]* et nous le savions, car *(8/3).(2/7) = 16/21*. Il est facilement démontrable que le choix de l'élément dans chaque classe ne change pas le résultat :

[(n.a,n.b)].[(m.c,m.d)] = [(n.m.a.c,n.m.b.d)] ; en mettant *k = n.m*, nous voyons que la classe du résultat est *[(k.a.c,k.b.d)]* ce qui est bien équivalent à *[(a.c , b.d)]*.

On peut noter que la multiplication reste celle qu'on connaît pour les nombres entiers : *[(u,1)].[(v,1)] = [(u.v,1)]*.

Dans les nombres rationnels, il y a une nouvelle notion, qui n'existait pas dans les nombres entiers : l**e réciproque.** C'est pour introduire cette notion que nous avons, d'ailleurs, inventé les nombres rationnels.

Le réciproque d'un nombre rationnel *[(a,b)]* est *[(b,a)]*. Mais il ne faut pas que a soit 0.

Effectivement, autant on pouvait prendre un négatif de tout nombre entier, car les nombres entiers étaient défini à partir de couples en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, autant nous ne pouvons pas faire cela pour tous les nombres rationnels, car ils sont basés sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0$ et on a donc exclu 0 du deuxième élément du couple, mais pas du premier. Quand on inverse l'ordre du couple, il ne faut donc pas que le premier nombre qui deviendra le deuxième, soit zéro.

Voici donc l'origine de la raison pour laquelle on ne pourra pas diviser par 0. Mais nous étions obligés d'exclure 0 du deuxième nombre, car sinon, certaines règles de calcul ne fonctionneraient plus.

L'addition de deux nombres rationnels sera suggérée par l'idée que $[(a,b)]$ représente a/b. Ainsi, $a/b + c/d = (a.d + c.b)/(b.d)$ quand on met sur le même dénominateur.

Donc, l'addition de deux nombres rationnels sera :

$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a.d + c.b,b.d)]$.

Pour les anciens nombres entiers, cela fonctionne :

$[(u,1)] + [(v,1)] = [(u.1 + v.1,1.1)] = [(u+v,1)]$.

Il faut maintenant démontrer que le choix de l'élément de chaque classe ne change pas le résultat. Ceci est laissé comme exercice pour le lecteur.

L'utilisation de cette construction des « fractions » (nombres rationnels) a l'avantage de lever une grande difficulté conceptuelle dans l'enseignement de ces « fractions ». Effectivement, sans la notion qu'un nombre rationnel est une classe d'équivalence, donc tout un ensemble de « couples de nombres *a/b* », la confusion est évidente : si on écrit *2/5*, c'est une « fraction » avec deux propriétés : son numérateur est 2, et son dénominateur est 5 ; mais on dit aussi que *2/5* est « égal » à *4/10* ; pourtant, le dénominateur de *4/10* n'est pas 5, mais 10.

Comment est-ce que deux objets identiques peuvent avoir des propriétés (la propriété « dénominateur » par exemple) différentes ? Comment se peut-il que *2/5* est « la même chose » que *4/10* ? Souvent, on présente cela comme une « opération non-achevée » et bien que *2/5* et *4/10* ne sont pas les mêmes opérations (expressions), ils indiquent le même résultat (non-exprimable alors). C'est souvent là où on perd une partie des élèves (et c'est compréhensible).

Avec la notion de « classe d'équivalence », ce problème disparaît. Le nombre rationnel est la classe, et *2/5* et *4/10* sont deux éléments de cette (même) classe. Ainsi, *2/5* (le couple *(2,5)*) n'est pas *4/10* (le couple *(4,10)*) comme *couple*, mais les nombres rationnels *[(2,5)] = [(4,10)]* car ce sont les mêmes ensembles. Par contre, « dénominateur » est une propriété d'un *couple* (le deuxième élément). Ainsi, *(2,5)* n'est pas égal à *(4,10)*. Mais *[(2,5)]* est bien égal à *[(4,10)]*. *[(2,5)]* n'a pas de dénominateur. *(2,5)*, si : c'est 5.

S'entraîner

1. Démontrez que la relation *R* qui définit les entiers, est bien une relation d'équivalence.

2. Démontrez que dans la construction des entiers, la multiplication comme elle est définie, ne dépend pas de l'élément choisi dans chaque classe.

3. Démontrez que dans la construction des nombres rationnels, l'addition comme elle est définie, ne dépend pas de l'élément choisi dans chaque classe.

Les nombres réels et l'infini

Motivation

La construction des nombres entiers, et la construction très comparable des nombres rationnels, étaient motivées parce que nous avons, dans les nombres naturels, deux opérations, l'addition et la multiplication, mais leurs « opérations inverses », à savoir, la soustraction et la division, ne marchaient pas toujours. Ce n'étaient pas des applications, mais des fonctions. Nous pouvions calculer $8 - 5$ (c'est 3), mais nous ne pouvions pas calculer $5 - 8$. Nous pouvions diviser 30 par 6, c'est 5, mais nous ne pouvions pas diviser 6 par 30. **Il semble donc qu'en arrivant aux nombres rationnels, le palmarès des nombres est complet.** C'est ce que pensaient les Grecs, jusqu'à ce qu'ils découvrent, à leur grande stupéfaction et horreur, qu'**il y a des choses, qui ont tout l'air d'être un nombre, et qui ne sont pas des nombres rationnels**.

L'exemple historique est la découverte, par un disciple de Pythagore, que la racine carrée de deux n'est pas une fraction, et que c'est la longueur de la diagonale d'un carré de coté 1 (par, justement, le théorème de Pythagore). On raconte que cela a tellement déplu au maître, qu'il a fait noyer son disciple.

Mais ceci pourrait faire croire que la prochaine extension de la notion de nombre, ce sont des choses comme racine carré de deux. En fait, cette extension existe. Elle s'appelle « les nombres algébriques », qui sont des solutions à des équations qu'on peut fabriquer avec des additions et des multiplications, mais ce n'est pas ce que nous entendons par « nombre réel ». Car il existe encore des machins-nombres qui ne sont pas des nombres algébriques, par exemple, le nombre pi, qui donne le rapport entre la circonférence du cercle et son diamètre. Le nombre pi n'est pas une solution d’ équation faite avec des additions et des multiplications et des nombres rationnels.

Les nombres réels ne sont pas motivés par un calcul. Ils sont motivés par quelque chose de totalement différent : « l'infiniment petit ».

Cette notion, qui vient de la physique, et notamment de la mécanique de Newton, découverte au 17ième siècle, a bousculé une bonne partie des mathématiques, car on n'a pas tout de suite découvert une bonne façon abstraite pour s'y prendre. Nous allons voir qu’avec les notions introduites, cela deviendra parfaitement limpide. Mais le chemin pour y parvenir sera un peu plus long que pour introduire les nombres entiers et rationnels. Là où ces nombres pouvaient se construire avec un *couple* de leurs prédécesseurs, un nombre réel aura besoin d'*une suite infinie* de ces prédécesseurs. Cela demande donc un peu plus de préparation.

Suites

Une suite *u* dans un ensemble *A* est une application des nombres naturels dans cet ensemble. On peut choisir si on commence à 0 ou à 1, donc si c'est une application sur $\mathbb{N}$ ou sur $\mathbb{N}_0$. Une suite est donc un ensemble de couples du genre *(n,a)*, avec n un nombre naturel, et *a* un élément de l'ensemble *A* (qui ne doit pas nécessairement être un ensemble de *nombres*, d'ailleurs), de telle façon, que chaque nombre naturel apparaît exactement une seule fois dans un couple de u. La façon traditionnelle de noter une suite u est par la notation u_n. Ainsi, un couple (n,a) de la suite u est noté $u_n = a$, et il y a un u_n pour chaque nombre naturel n, car u est une application.

L'ensemble A peut très bien être petit, et la suite peut bien sûr contenir plusieurs couples dont le deuxième élément est le même.

Un cas extrême et très important est **la suite constante** avec u_n égal au même élément a pour tout n.

L'ensemble des suites dans A est relativement grand, mais cet ensemble est quand-même un sous-ensemble de $P(\mathbb{N}\times A)$, ce qui démontre que cet ensemble existe.

Si l'ensemble A est un ensemble de nombres, par exemple, $\mathbb{Q}$, nous pouvons définir **la somme de deux suites *a* et *b*** :

$a + b = c$ si et seulement si $a_n + b_n = c_n$.

Nous pouvons aussi définir **le produit de deux suites** :

$a \,.\, b = c$ si et seulement si $a_n \,.\, b_n = c_n$.

La chose intéressante à une suite, c'est « son comportement à l'infini ». C'est une notion qui a longtemps baigné dans une sorte de conception surnaturelle, « aller à l'infini », mais finalement, nous allons voir comment cette notion devient relativement simple, et évidente.

Considérons un exemple simple : la suite $u_n = 1/n$ (il faudra commencer n à partir de 1). On « sent dans ses tripes » que cette suite « devient 0 à l'infini ». Seulement, aucune image de cette suite n'est 0. Qu'est-ce que cela voudrait bien dire, « à l'infini » ? « L'infini » veut en fait simplement dire : « pour des nombres n de plus en plus grands », rien de plus ou de moins. Mais il n'est pas vrai que u_n serait strictement 0 « pour des nombres de plus en plus grand ». Seulement, pour des nombres **de plus en plus grand, on est de moins en moins loin** de 0.

On peut le dire ainsi : « Est-ce qu'il y a un nombre N, tel que, pour tous les $n > N$, u_n est plus proche de zéro que 0.00001 ?

Et est-ce qu'il y a un autre N', tel que, pour tous les $n > N'$, u_n est encore plus proche, à savoir à moins que 0.0000000001 de 0 ? Et est-ce qu'on trouve encore un autre N'', tel que pour tous les $n > N''$, u_n sera encore plus proche de 0, à moins que 0.00000000000000000000000000000000000000000001 ?

On peut donc dire qu'une suite u « prend la valeur 0 à l'infini », s'il existe des N pour toute condition de proximité e (un nombre rationnel strictement positif) tel que $|u_n| < e$ quand $n > N$.

C'est ça, « aller à l'infini » : pouvoir indiquer un grand nombre N pour toute condition de rapprochement arbitrairement sévère à la valeur finale, tel qu'on est plus proche de la valeur finale que cette condition, si $n > N$. **L'infini n'est pas un lieu, mais un processus. Ce n'est pas un élément, mais une relation (qui donne des N pour toute condition de proximité e).**

Bien sûr, pour beaucoup de suites, ça ne marche pas : on ne trouve pas de N pour toute condition de proximité. Pour la suite où $u_n = 1$ si n est pair, et $u_n = -1$ si n est impair (qui est une suite tout à fait bien définie dans les nombres rationnels), on ne peut pas trouver un *N* pour une condition de proximité plus petite que 1/10, par exemple. C'est une suite qui « va nulle part à l'infini ». Mais il y a des suites pour lesquelles cela fonctionne, et ce sont les suites de Cauchy.

Les suites de Cauchy

Nous allons considérer **les suites dans les nombres rationnels**. Nous définissons **une suite rationnelle de Cauchy** comme une suite a_n, pour laquelle un prédicat est vrai :

$$\forall e \in \mathbb{Q}_0^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < e$$

Ceci est un prédicat en *a*, une suite, qui est relativement compliqué, avec 5 variables *a*, *e*, *n*, *m* et *N*, et 4 quantificateurs.

Ce prédicat veut dire que la suite *a* (la seule variable libre, associée à l'ensemble des suites dans les nombres rationnels) est telle, que les images sont arbitrairement proches les unes des autres si les *n*, *m* sont suffisamment grands. **On peut imposer n'importe quelle condition de proximité sévère *e*, on trouvera toujours un nombre naturel *N*, à partir duquel toutes les images ne s'écartent pas plus les unes des autres que cette condition.** Avec ce prédicat en *a*, on peut définir l'ensemble des suites rationnelles de Cauchy, *C*, et *C* est un sous-ensemble des suites dans $\mathbb{Q}$.

Les nombres réels sont toutes les valeurs « à l'infini » de ces suites rationnelles de Cauchy.

Nous pouvons comprendre cela intuitivement. Si on pense intuitivement à un nombre réel comme « un nombre avec un nombre infini de chiffres décimales après la virgule », nous pouvons imaginer une suite a dont a_0 est la partie entière du nombre, a_1 la partie entière, et un chiffre après la virgule, a_2 la partie entière et deux chiffres après la virgule, etc.

Par exemple, pour le nombre pi, nous prenons : $a_0 = 3$; $a_1 = 3.1$; $a_2 = 3.14$; $a_3 = 3.141$; $a_4 = 3.1415$ etc. Tous ces nombres, avec un développement décimal fini, sont des nombres rationnels (avec un dénominateur qui est une puissance de 10).

Il est facile de vérifier qu'une telle série est une suite de Cauchy, car toute condition d'écart maximal entre les images sera satisfaite à partir d'un certain indice N : N sera le nombre de zéros après la virgule dans la condition. Si nous voulons des écarts plus petits que 0.00003, ce sera satisfait après $N = 4$, par exemple. Toutes les images avec un n et un m plus grand que 4 seront plus proches l'une de l'autre que la condition donnée.

Mais nous ne pouvons pas identifier directement les nombres réels avec les suites de Cauchy, car il y a beaucoup de suites différentes qui « vont vers le même nombre » de la même façon qu'il y avait beaucoup de fractions qui sont le même nombre rationnel (comme *9/18* et ½). Il nous faudra appliquer la même abstraction : un nombre réel sera « la partie essentielle de la suite de Cauchy, à savoir, ce vers quoi cette suite va à l'infini » et il faudra faire abstraction de la façon détaillée comment cette suite y va. En d'autres termes, il nous faut une relation d'équivalence, qui « fait fi » des détails superflus.

Nous définissons la relation R, entre deux suites a et b, tel que le couple de suites de Cauchy *(a,b)* appartient à *R*, si :

$$\forall e \in \mathbb{Q}_0^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : |a_n - b_m| < e$$

Ceci est un prédicat en deux variables libres, *a* et *b* (suites de Cauchy). Il contient encore 4 autres variables, non-libres avec des quantificateurs : *e, N, n* et *m*.

La relation *R* est :

$$\{(a,b) \in C \times C | \forall e \in \mathbb{Q}_0^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : |a_n - b_m| < e\}$$

Il est facile de démontrer que la relation *R* est une relation d'équivalence. Par exemple, la réflexivité, *(a,a)* appartient à *R*, est évidente, car pour *(a,a)*, la condition est celle d'une suite de Cauchy, et *a* est une suite de Cauchy. La symétrie est aussi facile à démontrer (exercice pour le lecteur).

Pour la transitivité, c'est un peu plus de travail : il faut « couper *e* en deux ». Si *(a,b)* appartient à *R*, alors pour un *e/2*, il existe un N_1 tel que $|a_n – b_m| < e/2$; si *(b,c)* appartient à *R*, alors, pour *e/2,* il existe un N_2 tel que $|b_k – c_l| < e/2$; prenons *N* le maximum de N_1 et de N_2, alors pour tout *r,s* > *N*, et en choisissant un m > N, nous avons que $|a_r – b_m| < e/2$ et que $|b_m – c_s| < e/2$. Il en suit que $|a_r – c_s| < e/2 + e/2$ (inégalité triangle de la valeur absolue). Nous avons donc trouvé, pour toute valeur de *e*, une valeur *N*, tel que $|a_r – c_s| < e$. Ceci veut dire que *(a,c)* est bien un élément de *R*.

Les nombres réels sont l'ensemble-quotient de *C/R*. Un nombre réel est une classe d'équivalence de suites de Cauchy (les suites qui « ont la même valeur à l'infini »).

Il y a du travail, encore, pour introduire l'addition et la multiplication dans ce système. Mais d'abord, **il faut incorporer les nombres rationnels dans les nombres réels.** Ce n'est pas difficile. Si nous avons un nombre rationnel *q*, il faut considérer **la suite constante $a_n = q$**. *a* est bien sûr une suite de Cauchy (exercice facile pour le lecteur). Il existe donc un nombre réel, la classe d'équivalence de *a* : *[a]*. Ce nombre réel est l'incorporation du nombre rationnel *q*. Et effectivement, cette suite « tend vers le nombre *q* à l'infini » car elle y est déjà depuis le départ.

L'addition et la multiplication de deux nombres réels sont données simplement comme ceci : *[a] + [b] = [a+b]*, et *[a] . [b] = [a.b]*. Mais le travail un peu long consiste à démontrer que le résultat de ces opérations ne dépend pas du choix de la suite dans chaque classe. Pour l'addition, on peut utiliser l'astuce de *e/2* et *e/2* pour les deux suites comme nous l'avons fait avec la transitivité, mais pour la multiplication, c’est un peu plus difficile.

Il faut aussi démontrer que ces opérations se réduisent aux opérations que nous connaissons pour les nombres rationnels.

Dans la mesure où cela intéresse le lecteur, il peut faire quelques exercices de démonstration de ces propriétés. Mais le but de ce texte n'est pas d'être exhaustif et de construire un système complet ; c'est plutôt d'indiquer comment la notion d'ensemble est le fondement de toute idée mathématique.

S'entraîner

1. Démontrez la symétrie de la relation d'équivalence utilisée

pour définir les nombres réels.

2. Démontrez que la suite constante est une suite de Cauchy.
3. Considérez la suite *u* qui a comme images un développement décimal : 1 ; 1.9 ; 1.99 ; 1.999 ; 1.9999…. et la suite *v* qui est une suite constante $v_n = 2$. Démontrez que *u* est une suite de Cauchy. Démontrez que le couple *(u,v)* appartient à la relation d'équivalence. Que pouvez-vous dire alors du nombre réel représenté par 1.9999… et du nombre réel représenté par 2 ?

Limites et continuité

Environnements[4]

Environnements réels

Nous avons déjà dit que les nombres réels sont introduits à partir de la notion de l'infiniment petit, et que cette notion a été imposée par des développements mathématiques à partir du 17ième siècle. Dans la définition du nombre réel, nous avons déjà obtenu une idée de l'infini, et ce n'était pas ce qu'on croyait : l'infini n'est pas un nombre bizarre, mais est une « notion d'approche », un « pour toute condition, il existe un suffisamment grand nombre tel que ». La notion de l'infiniment petit est du même genre : c'est aussi une notion d'approche, mais plutôt : « pour toute condition, il existe un environnement suffisamment petit tel que … ».

Un environnement d'un nombre réel *a*, *E(a)*, sera défini comme une suite dans *P*($\mathbb{R}$) : pour chaque nombre naturel $n > 0$, il y aura un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, donné par les nombres réels x qui satisfont : $| x - a | < 1/n$

Il y a des gens qui considèrent plutôt des fonctions de $\mathbb{R}$ en $P(\mathbb{R})$, et qui prennent $| x - a | < e$. J'ai préféré une suite. Ça marche aussi bien. Donc, l'environnement *E(a)* est :

$$\{(n, I) \in \mathbb{N}_0 \times P(\mathbb{R}) | : I = \{x \in \mathbb{R} | |x - a| < 1/n\}\}$$

4 A strictement parler, ce que nous appelons « environnement » ne l'est pas selon la définition courante. Ce que nous appelons « environnement » ici s'approche d'une base d'environnement.

C'est une succession d'intervalles autour de *a*, qui se resserrent de plus en plus. Donc, $E(a)_n$ est l'intervalle de nombres réels *x* donnée par $|x - a| < 1/n$ (notez que $n = 0$ est exclu).

Par exemple, $E(5.3)_{100}$ est l'intervalle $]\, 5.29, 5.31[$.

Nous pouvons d'ailleurs étendre cette notion d'environnement aux *couples* de nombres réels. Si (a,b) est un couple de nombres réels, alors nous pouvons définir l'environnement de ce couple, $E(\,(a,b)\,)$, comme $E(\,(a,b)\,)_n = E(a)_n \times E(b)_n$. En d'autres termes, un environnement du couple (a,b) est « un petit carré » autour de ce couple.

Environnements en général

On dit que **les environnements des nombres réels forment une base topologique sur** $\mathbb{R}$. Nous n'allons pas définir exactement ce que ça veut dire, mais on peut s'imaginer que « une base topologique sur un ensemble » indique qu'**on a des environnements pour chaque élément de cet ensemble**, qui vont définir ce que c'est, « l'infiniment petit » dans cet ensemble ; ce que c'est : « se rapprocher de plus en plus ».

Il suffit qu'on attache un environnement à chaque élément de la même façon qu'on a fait pour les intervalles dans les nombres réels : on peut attacher une suite dans $P(A)$ à chaque élément de *A*. Il y a quelques propriétés qui doivent être satisfaites par ces suites pour qu'on puisse parler d'environnement, mais ceci sortirait du cadre de ce texte.

Limite d'une fonction

La notion de limite en général

La notion de limite d'une fonction en un élément *a* veut intuitivement exprimer « la valeur infiniment proche de l'image de la fonction, prise quand on est infiniment proche du point *a* ». **Cela peut avoir un sens pour une fonction de *A* en *B*, quand il y a une base topologique en *A*, et une base topologique en *B*, c'est à dire, quand il y a un environnement pour les éléments de *A*, et quand il y a un environnement pour les éléments de *B*.**

L'astuce sera qu'**une limite de la fonction *f*, dans l'élément *a*, sera un élément *b*, si, pour tout élément de l'environnement de *b*, nous allons pouvoir trouver un élément de l'environnement de *a*, tel que l' image de *f* de cet élément est une partie l'élément de l'environnement de *b* choisi.**

En d'autres termes, on peut être aussi sévère qu'on le désire sur l'élément de l'environnement de *b*, on trouvera toujours un élément de l'environnement de *a* qui sera projeté *entièrement* par *f* dans ce tout petit élément de l'environnement de *b*.

Si on peut trouver un tel point *b*, alors *b* est une limite de *f* en *a*.

Il y a en fait une subtilité : souvent, on enlève le point *a* même de l'exigence : *f(a)* n'est pas considéré. *f(a)* peut exister ou non, on ne l'utilise pas. Certains mathématiciens ne font pas cela, mais le plus souvent, on exclut ce point *a*.

On peut donc, en toute généralité, définir une limite d'une fonction *f* de *A* en *B*, si on suppose que chaque élément *a* de *A* possède un environnement *E(a)* et que chaque élément *b* de *B* possède un environnement *E(b)*.

b* est une limite de la fonction *f* en *a, si :

1) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x \in E(a)_n \cap dom(f) \setminus \{a\}$

2) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : \forall x \in E(a)_m \cap dom(f) \setminus \{a\} : f(x) \in E(b)_n$

La première condition exige que la fonction *f* possède des éléments de son domaine dans chaque environnement de *a* (à part *a* même éventuellement).

La deuxième condition est exactement ce qu'on vient d'exprimer : pour tout élément de l'environnement de *b* (indiqué par l'indice *n*), il y a un élément de l'environnement de *a* (indiqué par l'indice *m*) dont l'image sous *f* rentre *entièrement* dans le premier, à part *a* même.

Notez qu'on n'avait pas besoin de spécifier la nature des ensembles *A* et *B* ; Il suffit qu'il y ait des environnements défini dessus.

Si *b* est une limite de *f* en *a*, on écrit tout cela en raccourci :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Cette notation avec le signe « = » suppose déjà que si *b* est une limite de *f* en *a*, **il n'y a pas d'autre *b'* qui peut aussi être limite**, mais pour la plupart des bases topologiques, c'est effectivement le cas (il faut que la base topologique soit « séparable »).

Limites pour les fonctions réelles

Tout ce qu'on vient de dire est immédiatement applicable pour les fonctions réelles : nous avons défini l'environnement réel pour chaque nombre réel et donc, les notions générales de limites de fonctions s'appliquent directement aux fonctions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. D'ailleurs, pour ces environnements, la base topologique est bien séparable, et **si une limite de la fonction *f* dans *a* existe, cette valeur est unique**.

Mais ils s'appliquent aussi pour les fonctions de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, car nous avons aussi défini des environnements pour les couples de nombres réels. **Il y a deux fonctions spéciales de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$: c'est l'addition et la multiplication.**

On peut montrer que la limite, dans le couple *(a,b)*, de l'addition, est toujours $a + b$; de la même façon, la limite dans le couple *(a,b)*, de la multiplication, est $a.b$.

Donc :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x+y) = a+b$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x.y) = a.b$$

L'exemple-type de l'utilisation de la notion « limite » est avec une fonction « avec un trou dedans ». Par exemple, la fonction $f = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} | x\neq 0 \wedge y=1\}$ implicitement $f(x) = x/x$.

Cette fonction est 1 partout, mais n'est pas définie en 0 (0 ne fait pas partie de son domaine).

On démontre facilement que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Effectivement :

1) pour tout $E(0)_n$ il y a des éléments du domaine de f dans cet intervalle.

2) pour tout $E(1)_n$ il y a un $E(0)_m$ tel que l'image de tous les éléments de ce dernier rentrent dans le premier. Ici, tout élément est projeté sur 1, on peut donc prendre n'importe quelle valeur de m, ça marche toujours.

Continuité et dérivée

Continuité

La notion de continuité est simple quand on a défini la notion de limite :

Une fonction *f* de *A* en *B* est continue dans un point *a*, si *f(a)* est la limite de *f* en *a*.

Une fonction est continue sur *U*, une partie de son domaine, si *f* est continue dans chaque élément de *U*.

Nous avons déjà vu deux exemples de fonctions continues : **l'addition de nombres réels, et la multiplication de nombres réels sont des fonctions continues.**

Il y a une propriété très importante des fonctions continues :

Si *f* est une fonction de *A* en *B*, et *g* est une fonction de *B* en *C*, et $g \circ f$ existe en *a* et en au moins un point différent de *a* dans son domaine dans chaque élément de l'environnement

de *a*, alors, si *f* est continu en *a*, et *g* est continu en *f(a)*, il en suit que $g \circ f$ est continu en *a*.

De cette propriété suivent beaucoup de conclusions sur la continuité de fonctions. Par exemple, toute composition de produits et d'additions fera des fonctions continues. Ainsi, **tous les polynômes seront des fonctions continues**.

On peut démontrer que la fonction « **est le réciproque de** » est une fonction continue dans son domaine (c'est à dire, quand l'argument n'est pas 0).

Avec la propriété de composition de fonctions continues, alors **toute fonction rationnelle (une fraction de deux polynômes) sera une fonction continue dans son domaine** (donc là où le dénominateur n'est pas 0).

La fonction « **valeur absolue** » est aussi une fonction continue, ainsi que « **racine carré de** » dans son domaine.

La preuve de ce théorème va ainsi. Il faut démontrer que la limite de $g \circ f$ en *a* est égal à $g \circ f\ (a)$, en utilisant les hypothèses du théorème. Il faut donc démontrer que cette limite existe, et qu'elle est égale à $g \circ f\ (a)$. Pour que la limite existe, il faut deux conditions :

1) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x \in E(a)_n \cap dom(g \circ f) \setminus \{a\}$

2) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : \forall x \in E(a)_m \cap dom(g \circ f) \setminus \{a\} : g \circ f(x) \in E(b)_n$

La première condition est satisfaite, car on l'a explicitement exigée dans les hypothèses du théorème.

La deuxième condition peut être prouvée ainsi. La fonction *g* est continue en *f(a)*, ce qui veut dire que pour tout *n*, il existe un *m*, tel que l'image de *g* de tous les éléments de l'intersection du domaine de *g* et de $E(\ f(a)\ )_m$ appartiennent à l'environnement $E\ (\ g(f(a))\ )_n$.

La fonction *f* est continue en *a*, donc pour cet *m*, il existe aussi un *k*, tel que l'image sous *f* de tous les éléments de l'intersection du domaine de *f* et $E(a)_k$ appartiennent à $E(f(a))_m$.

Si *u* est un élément du domaine de $g \circ f$, alors *u* appartient au domaine de *f*, et *f(u)* appartient au domaine de *g*. Ainsi, l'intersection du domaine de $g \circ f$ avec $E(a)_k$ est une partie de l'intersection du domaine de *f* avec $E(a)_k$, et l'image de tous ses éléments font partie de l'intersection du domaine de *g* et de $E(\ f(a)\ )_m$.

On peut donc conclure que pour tout *n*, il existe un *k*, tel que l'image sous $g \circ f$ de tous les éléments de l'intersection du domaine de $g \circ f$ et de $E(a)_k$ appartiennent à $E(\ g \circ f(a)\ )_n$.

Ceci affirme que $g \circ f(a)$ est la limite de $g \circ f$ en *a*, ce qui prouve que $g \circ f$ est continu en *a*.

Dérivée

Nous arrivons finalement au but de tout ceci. Effectivement, on pourrait se poser la question à quoi tout cela est bon ? Pourquoi introduire ces notions de nombre réel, de limite, de continuité ? A quoi bon ces notions de l'infiniment petit ? Comme nous l'avions déjà indiqué, tout ceci était inspiré par des nouvelles notions mathématiques, nécessaires dans la mécanique de Newton. Newton avait besoin de la notion de « changement instantané ». Le changement instantané de la position, c'est la vitesse. Et le changement instantané de la vitesse, c'est l'accélération. Newton avait besoin de cette notion pour introduire sa deuxième loi.

Le « changement moyen » était une notion bien connue : le changement moyen d'une fonction entre *a* et *b*, c'est :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si vous avez fait 45 kilomètres de vélo en 3 heures, votre vitesse moyenne est de 15 kilomètres l'heure. Il se trouve que vous avez pédalé fort pendant une heure, et que la première heure, vous avez fait 30 km, et que les derniers 15 km, vous les avez fait en deux heures. Alors la première heure, votre vitesse moyenne était de 30 km l'heure, et les deux dernières heures, de 7.5 km l'heure. C'est déjà un peu plus précis. Mais peut-être que pendant les 2 dernières heures, vous avez fait plus que 7.5 km l'heure « à certains moments », et moins « à d'autres moments ». Newton avait besoin de la notion de « vitesse sur le moment même ». Il avait donc besoin de la vitesse moyenne « du moment ». On se rapproche de cela quand *b* se rapproche de *a* dans la formule ci-dessus. Mais on ne peut pas mettre *b* = *a*, car on diviserait par zéro.

On introduit donc une nouvelle fonction, *u(b)*, qui est « vitesse moyenne entre *a* et *b* en fonction de *b*» :

$$u_a(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On garde le point *a* fixe, et on considère la fonction en *b*. Cette fonction est définie partout où *f(b)* est définie, sauf en *a*, car on diviserait par 0 sinon. Seulement, le nombre qui nous intéresse, c'est justement, quand *b* « se rapproche de *a* ».

C'est pour pouvoir définir cela qu'il fallait introduire la notion de limite et d'infini ! Ce que nous voulons, c'est la valeur de $u_a(b)$ quand *b* est « infiniment proche » de *a*, sachant qu'on ne peut pas prendre $u_a(a)$ car cette fonction n'y est pas définie.

La vitesse instantanée en a est donc :

$v(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ à condition que cette limite existe, ce qui n'est pas toujours le cas.

Voici donc la définition du **nombre dérivé de la fonction *f*, une fonction numérique de ℝ en ℝ, en *a*** :

$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ si la limite existe.

Pour chaque valeur réelle *a*, on peut se poser la question si le nombre dérivé existe. Si c'est le cas, on peut dire que *a* appartient au domaine de *f'*, une nouvelle fonction. Si le nombre dérivé n'existe pas en *a*, alors *a* n'est pas un élément du domaine de *f'*.

Ainsi, **nous avons donc défini, pour chaque fonction numérique *f*, une autre fonction unique *f'*, qui s'appelle « la fonction dérivée de *f* ».** Cette fonction est bien définie, car son domaine est bien défini, et pour tout élément de son domaine *a*, sa valeur *f'(a)* est définie de façon unique.

En d'autres termes, nous venons de définir **une application *D*, interne à ensemble des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, qui prend toute fonction *f*, et qui a, comme image unique, *f'***. C'est **l'opérateur dérivée**. On le note souvent :

$D\,f = f'$.

C'est bien une application, car toute fonction a une fonction dérivée unique ; cette dérivée peut être l'ensemble vide bien sûr. Donc attention : ce n'est pas parce que la fonction dérivée existe, qu'elle contient un certain *a* dans son domaine.

Comme *D* est une application interne à un ensemble, on peut appliquer *D* plusieurs fois :

$D^2 = D \circ D$

est l'opérateur « deuxième dérivée ». $D^2\ f$ est la fonction dérivée de la fonction dérivée de *f*. On l'écrit aussi *f''*. Et ainsi de suite :

$D^n = D \circ D^{(n-1)}$ est **l'opérateur dérivée d'ordre *n***.

Fonctions exotiques

La fonction suivante :

$d1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y = 1) \wedge (\neg(x \in \mathbb{Q}) \Rightarrow y = 0)\}$

est une fonction numérique qui a 1 comme valeur si son argument est un nombre rationnel, et 0 si c'est un réel qui n'est pas un nombre rationnel. Elle s'appelle aussi **la fonction de Dirichlet**.

Cette fonction n'a aucune limite, et elle est **continue nulle part**. Sa fonction dérivée est {}.

La fonction suivante :

d2 = $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|(x\in\mathbb{Q}\Rightarrow y=x)\wedge(\neg(x\in\mathbb{Q})\Rightarrow y=-x)\}$

ressemble beaucoup à la fonction précédente, mais cette fonction est **continue en 0**, et c'est le seul point de son domaine où elle est continue et où elle a une limite.

Considérons un nombre rationnel *q*. Rappelons-nous que *q* est une classe d'équivalence de couples d'entiers *q = [(a,b)]* (c'est dans ces moments-ci que le « retour aux sources » est utile). Rappelons-nous que le couple *(a,b)* représente la fraction *a/b*. Nous choisissons dans la classe d'équivalence le couple avec **la plus petite valeur positive de *b*** : appelons ce couple *(u,v)*. Il faudrait prouver que ce couple existe et est unique, mais nous l'acceptons ici. Ce couple représente la **fraction réduite** ou encore **fraction irréductible**. du nombre rationnel: c'est la fraction qu'on ne peut plus simplifier. Par exemple, pour la classe *[(3,-15)]* ce représentant unique est *(-1,5)*. On peut donc associer, à chaque nombre rationnel *q*, un seul et unique couple *(u,v)*, tel que *q = [(u,v)]*, et que *u/v* est la fraction réduite de *q*. Appelons *(u,v)* = q_{red}. Donc *q* est la classe, et q_{red} est le couple *(u,v)* de la classe.

Avec cet outil, nous pouvons définir une autre fonction « exotique », **la fonction de Thomae** :

t = $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|(x\in\mathbb{Q}\Rightarrow((a,b)=x_{\mathrm{red}}\wedge y=1/b))\wedge(\neg(x\in\mathbb{Q})\Rightarrow y=0)\}$

En d'autres termes, quand l'argument *x* est rationnel, *d(x)* prend la valeur de *1/b* où *b* est le dénominateur réduit de *x* ; sinon, *d(x)* est 0. Cette fonction a la propriété remarquable d'être **continue dans chaque nombre irrationnel** (donc « presque partout »), et discontinu dans les nombres rationnels. Elle est dérivable nulle part.

Ces fonctions nous semblent bizarres, car les fonctions que nous concevons normalement sont construites avec des outils qui produisent plutôt des fonctions continues : des additions, des multiplications, la fonction réciproque, et quelques autres. Mais il faut se rendre compte que la plupart des fonctions réelles sont de ce genre et *que la fonction continue et dérivable est plutôt l'animal rare*.

Épilogue

Dans ce texte, nous avons essayé d'indiquer *que la notion d'ensemble est «l'abstraction de l'idée d'objet mathématique »*, et que cela nous permet d'avoir une conception parfaitement claire et logique des différents objets utilisés en mathématique au lycée. Nous avons essayé d'indiquer exactement quand ceci peut aider le lecteur dans la compréhension des notions comme fonction, variable(s), équation, solution, identité, les fractions, les nombres réels, l'infini, l'infiniment petit,… A la question, « c'est quoi, exactement, une variable, une fonction, l'infini, …. ? » le lecteur aura une réponse précise, claire, et finalement, facile à comprendre.

Nous n'avons pas construit un système de façon rigoureuse, exhaustive et systématique. Nous avons d'abord investi un effort modeste dans l'exposé de quelques notions fondamentales d'ensembles, relations et fonctions, suivi d'un traitement plus détaillé de la logique. Ceci nous a procuré les outils indispensables pour construire les systèmes de nombres, culminant dans les nombres réels et les notions essentielles de l'analyse, à savoir, limite, continuité et fonction dérivée, sans « flou artistique».

Dans ce texte-ci, nous avons introduit la notion d'ensemble, et son utilité dans la construction de notions mathématiques. Nous n'avons pas parlé de *structures* mathématiques. Ce sera pour un autre texte.